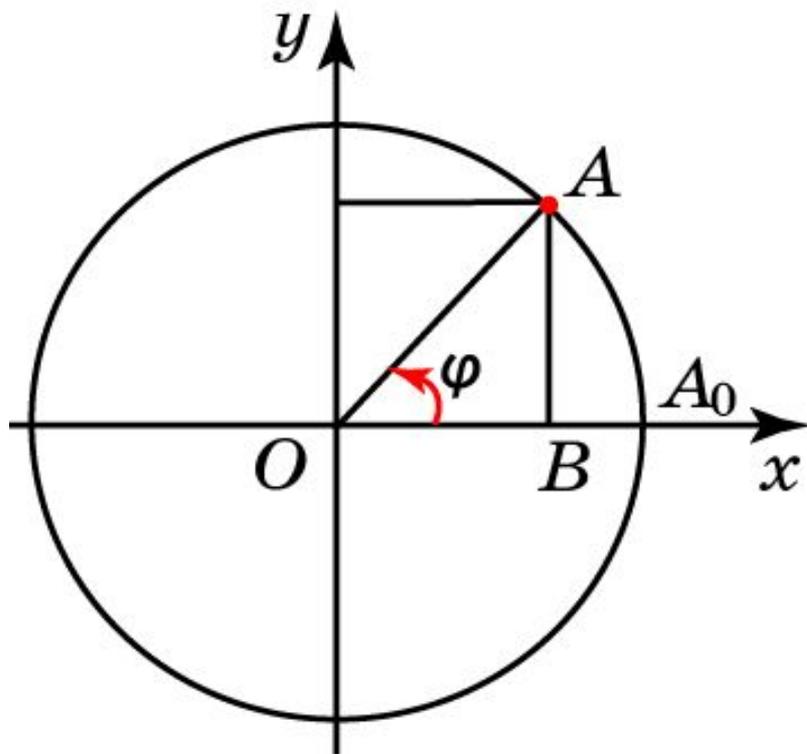


Тригонометрические функции

произвольного угла

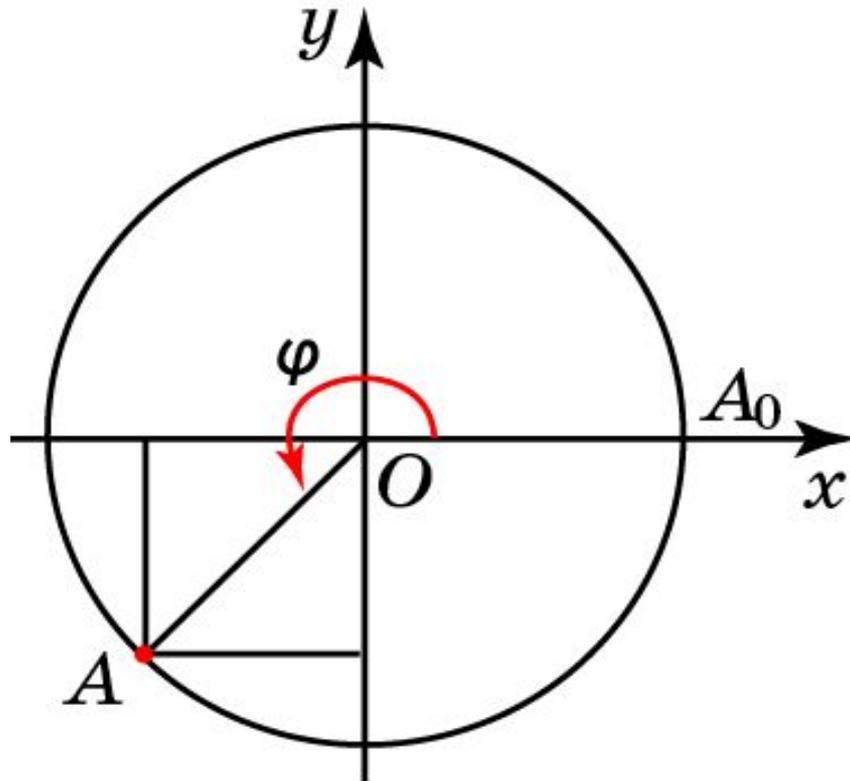
Рассмотрим декартову систему координат и окружность единичного радиуса с центром в начале координат O . Такую окружность будем называть **единичной**.



Каждому углу φ , $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, соответствует точка A на единичной окружности, полученная поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой стрелки. Поскольку гипотенуза OA прямоугольного треугольника OAB равна единице, то, как легко видеть, синус этого угла будет равен ординате точки A , а косинус – абсциссе точки A .

Тригонометрические функции произвольного угла

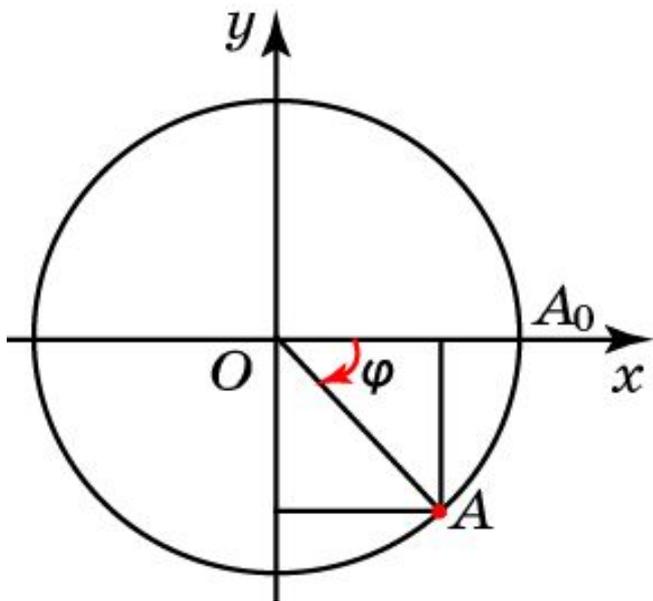
Определим $\sin \phi$ и $\cos \phi$ для $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$. Рассмотрим точку A , получающуюся поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол против часовой стрелки. Ордината этой точки называется синусом и обозначается $\sin \phi$. Абсцисса этой точки называется косинусом и обозначается $\cos \phi$.



Тригонометрические функции

произвольного угла

Определим поворот точки $A_0(1, 0)$ на градусную величину $\phi \geq 360^\circ$. Для этого представим ϕ в виде суммы $\phi = \phi_1 + \dots + \phi_n$, где ϕ_1, \dots, ϕ_n меньше 360° . Результат последовательного выполнения поворотов на углы ϕ_1, \dots, ϕ_n против часовой стрелки и будет искомым поворотом точки A_0 на ϕ . Ордината и абсцисса полученной в результате полного поворота точки A называется соответственно синусом и косинусом ϕ и обозначается $\sin \phi$ и $\cos \phi$.



Для градусных величин $\phi < 0^\circ$ поворот на ϕ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. В этом случае $\sin \phi$ и $\cos \phi$ также полагаются равными соответственно ординате и абсциссе точки A полученной в результате поворота точки A_0 .

Тригонометрические функции

произвольного угла

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} \phi$ и $\operatorname{ctg} \phi$ для произвольных градусных величин ϕ определяются обычным образом, а именно,

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}, \operatorname{ctg} \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}.$$

Из определения синуса и косинуса непосредственно следует, что выполняются следующие тождества:

$$(1) \sin(\phi + 360^\circ) = \sin \phi, \cos(\phi + 360^\circ) = \cos \phi;$$

$$(2) \sin(\phi + 180^\circ) = -\sin \phi, \cos(\phi + 180^\circ) = -\cos \phi;$$

$$(3) \sin(-\phi) = -\sin \phi, \cos(-\phi) = \cos \phi;$$

$$(4) \sin(90^\circ - \phi) = \cos \phi, \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi.$$

Теорема. Для произвольных градусных величин имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1.$$

Пример 1

На какую градусную величину повернется минутная стрелка за 2 ч 15 мин?

Ответ: 810° .

Пример 2

Найдите $\sin 390^\circ$ и $\cos(-300^\circ)$.

Ответ: $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$\cos(-300^\circ) = \cos(360^\circ - 300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Упражнение 1

Найдите: а) $\sin 330^\circ$; б) $\sin(-150^\circ)$; в) $\cos 420^\circ$; г) $\cos(-135^\circ)$.

Ответ: а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 2

Могут ли синус и косинус произвольного угла принимать значения: а) большие 1; б) меньше -1 ?

Ответ: а) Нет, не могут;
б) нет, не могут.

Упражнение 3

Укажите, для каких градусных величин синус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

Ответ: а) $360^\circ k < \varphi < 180^\circ + 360^\circ k$;

б) $\varphi = 180^\circ k$;

в) $180^\circ + 360^\circ k < \varphi < 360^\circ + 360^\circ k$.

Упражнение 4

Укажите, для каких градусных величин косинус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

Ответ: а) $-90^\circ + 360^\circ k < \varphi < 90^\circ + 360^\circ k$;

б) $\varphi = 90^\circ + 180^\circ k$;

в) $90^\circ + 360^\circ k < \varphi < 270^\circ + 360^\circ k$.

Упражнение 5

Для каких градусных величин не определен: а) $\operatorname{tg} \varphi$; б) $\operatorname{ctg} \varphi$?

Ответ: а) $\varphi = 90^\circ + 180^\circ k$;

б) $\varphi = 180^\circ k$.

Упражнение 6

Могут ли тангенс и котангенс принимать значения:

а) большие 1; б) меньшие -1 ?

Ответ: а) да;

б) да.

Упражнение 7

Для каких градусных величин φ тангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

Ответ: а) $180^\circ k < \varphi < 90^\circ + 180^\circ k$;
б) $\varphi = 180^\circ k$;
в) $-90^\circ + 180^\circ k < \varphi < 180^\circ k$.

Упражнение 8

Для каких градусных величин φ котангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

Ответ: а) $180^\circ k < \varphi < 90^\circ + 180^\circ k$;

б) $\varphi = 90^\circ + 180^\circ k$;

в) $90^\circ + 180^\circ k < \varphi < 180^\circ + 180^\circ k$.

Упражнение 9

Найдите угол между лучом OA и осью абсцисс, если точка A имеет координаты: а) $(2, 2)$; б) $(0, 3)$; в) $(-\sqrt{3}, 1)$; г) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Ответ: а) 45° ;
б) 90° ;
в) 150° ;
г) 135° .

Упражнение 10

На какую градусную величину повернется минутная стрелка за: а) 1 ч 45 мин; б) 2 ч 30 мин; в) 3 ч 20 мин?

Ответ: а) 630° ;
б) 900° ;
в) 1200° .