

ЛЕКЦИЯ 8а

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Вырожденные и невырожденные коллективы частиц.
2. Классические и квантовые статистики. Функция распределения.
3. Фазовое пространство микрочастицы и его квантование.
4. Плотность состояний. Критерий невырожденности идеального газа.
5. Функция распределения для невырожденного газа.

ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВЫ ЧАСТИЦ

Свойства коллектива частиц как целого зависят от специфики частиц. Различают два вида коллективов частиц.

Пусть на N одинаковых частиц приходится G различных состояний, в которых может находиться отдельная частица.

Если число различных вакантных (свободных) состояний много больше числа микрочастиц ($G \gg N$), то свойства коллектива как целого не будут зависеть от специфики микрочастиц, из которого он состоит.

Такие коллективы называются *невыврожденными*.

Условие невырожденности:

$$\frac{N}{G} \ll 1$$

ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВЫ ЧАСТИЦ

Если число состояний G оказывается одного порядка с числом частиц N , т.е.

$$\frac{N}{G} \approx 1$$

то тогда возможно заселение частицами некоторых состояний не поодиночке, а группой.

В этом случае специфика микрочастицы проявляется в полной мере, оказывая значительное влияние на свойства коллектива как целого.

Такие коллективы называются *вырожденными*.

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Статистика, изучающая свойства невырожденных коллективов - *классическая статистика* или *статистика Максвелла – Больцмана*.

Квантовая статистика – это раздел статистической физики, исследующий свойства вырожденных коллективов.

По коллективным свойствам частицы делятся на *фермионы* и *бозоны*.

Фермионы – это частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны).

Бозоны – это частицы с нулевым или целочисленным спином (например, фотоны).

Для этих двух групп частиц существуют разные квантовые статистики.

Квантовую статистику фермионов называют *статистикой Ферми – Дирака*, а статистику бозонов – *статистикой Бозе – Эйнштейна*.

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Состояние частиц описывается *полной статистической функцией распределения*.

Полную функцию распределения $N(E)dE$ представляют в виде произведения числа состояний $q(E)dE$, приходящихся на интервал энергий dE , на вероятность $f(E)$ заполнения частицами этих состояний:

$$N(E)dE = q(E)dE f(E)$$

Функцию $f(E)$ называют просто *функцией распределения*.

Таким образом, отыскание полной функции распределения частиц по состояниям сводится к решению двух задач:

1. Отыскание функции $q(E)dE$, описывающей распределение состояний по энергиям;
2. Отыскание функции $f(E)$, определяющей вероятность заполнения этих состояний частицами.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО МИКРОЧАСТИЦЫ И ЕГО КВАНТОВАНИЕ.

Для применения статистического метода нахождения функций распределения используется особая система координат – *фазовое пространство*.

Введем в рассмотрение воображаемое шестимерное пространство с взаимно перпендикулярными осями x, y, z и p_x, p_y, p_z .

Такое пространство называют *фазовым μ -пространством*.

Положение точки в шестимерном фазовом пространстве определяется шестью координатами.

В *μ -пространстве* рассматриваются бесконечно малые области в виде кубических ячеек в пространстве координат и пространстве импульсов (элементарные объёмы).

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО МИКРОЧАСТИЦЫ И ЕГО КВАНТОВАНИЕ.

Особенность описания поведения квантовой частицы в фазовом пространстве: необходимо учитывать принцип неопределенностей. Ячейки необходимо взять таких размеров, чтобы произведение объема ячейки (элемента объема) пространства координат $\Delta\Gamma_V$ на объем ячейки пространства импульсов $\Delta\Gamma_p$ было порядка h^3 :

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_V \cdot \Delta\Gamma_p = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \cdot (\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z) \sim h^3$$

$\Delta\Gamma$ по смыслу называется элементом объема шестимерного фазового пространства.

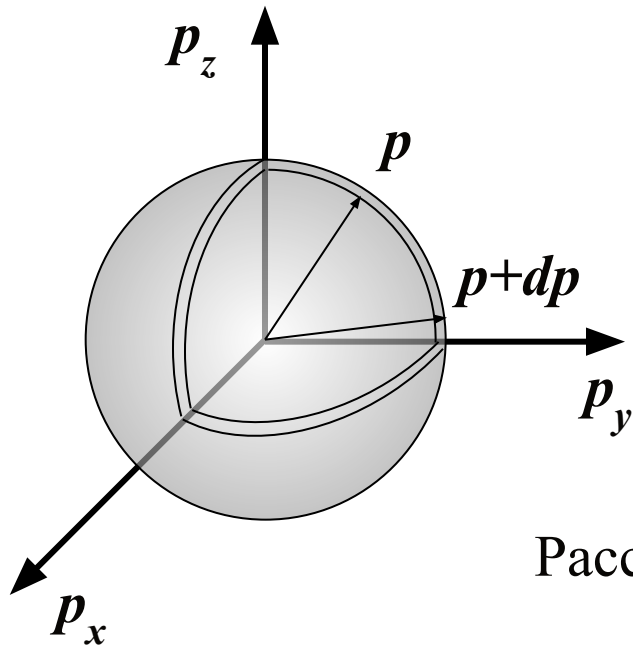
Формулировка записанной формулы:

Различным элементам объема шестимерного фазового пространства будут отвечать различные квантовые состояния микрочастицы лишь в том случае, если размер этих элементов объема не меньше h^3 .

Процесс деления фазового пространства на ячейки конечной величины (h^3 или h^3/V) называется квантованием фазового пространства.

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

Итак, отыскание полной функции распределения частиц по состояниям мы разделили на два этапа.



На первом этапе необходимо определить вид функции $q(E)dE$, описывающей распределение состояний по энергиям.

Проведем в пространстве импульсов две сферы радиусами p и $p+dp$.

Между этими сферами находится шаровой слой объемом $4\pi p^2 dp$.

Рассмотрим простой случай свободных частиц.

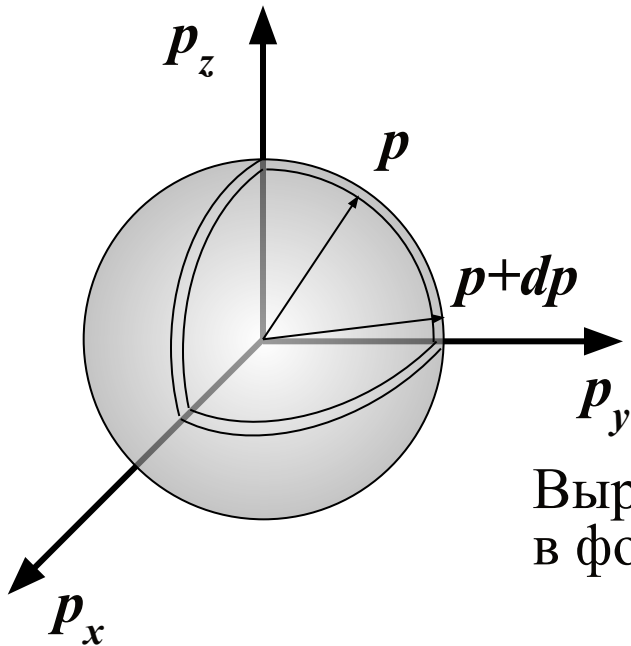
Число элементарных фазовых ячеек, содержащееся в этом слое, равно объему слоя, деленному на объем одной ячейки:

$$\frac{4\pi p^2 dp}{\Delta\Gamma_p} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

$\Delta\Gamma_p = \frac{h^3}{V}$

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

Так как каждой ячейке соответствует одно состояние микрочастицы, то число состояний, приходящееся на интервал dp , заключенный между p и $p+dp$, равно числу ячеек:



$$q(p)dp = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

Теперь осталось перейти от импульсов к энергии:

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad dE = \frac{p}{m} dp$$

Выражая из этих формул p и dp и подставляя их в формулу, получим окончательно

$$q(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

Это и есть число состояний частицы в интервале энергий E и $E+dE$.

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

$$q(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

Поделив правую и левую часть этого соотношения на dE , получим *плотность состояний* $q(E)$, выражающую число состояний микрочастицы, приходящееся на единичный интервал энергий:

$$q(E) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}$$

Видно, что плотность состояний пропорциональна $\sqrt{E}$. Кроме того, плотность состояний увеличивается с ростом массы частиц.

В случае электронов каждой фазовой ячейке соответствует не одно, а два состояния, отличающихся друг от друга направлением спина. Поэтому для электронов число состояний и плотность состояний нужно удвоить.

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

$$q(E) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}$$

Если проинтегрировать это выражение в пределах от 0 до E , получим число состояний микрочастицы, заключенное в интервале энергий от 0 до E :

$$G = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{3} E^{3/2}$$

Полагая $E = \frac{3}{2} kT$, получим

$$G \approx V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2}$$

Подставим это выражение в записанное ранее условие невырожденности

$$\frac{N}{G} \ll 1$$

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

получим $\frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \ll 1$, или, поскольку $\frac{N}{V} = n$,

n - число частиц в единице объема, то условие невырожденности примет вид:

$$n \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \ll 1$$

Оценки показывают, что, например, молекулярный газ в нормальных условиях является невырожденным и, следовательно, описывается классической статистикой Максвелла-Больцмана.

Электронный газ в металле в реальных условиях всегда вырожден, вследствие чего к нему применима только квантовая статистика.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА.

Мы определили вид функции $q(E)dE$, описывающей число состояний, приходящихся на интервал энергии dE

$$q(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

Для того, чтобы записать полную функцию распределения частиц по состояниям, необходимо теперь знать вид функции распределения $f(E)$, определяющей вероятность заполнения этих состояний частицами.

Функция распределения для невырожденного газа нам известна. Это функция распределения Максвелла – Больцмана:

$$f(E) = \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-E/kT}$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА.

Вспомним, что произведение $f(E)dE$ выражает вероятность заполнения частицами состояний с энергиями, заключенными между E и $E+dE$.

Теперь легко записать выражение для полной статистической функции распределения $N(E)dE = f(E)q(E)dE$:

$$N(E)dE = \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \cdot e^{-E/kT} \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

После преобразований получим

$$N(E)dE = \frac{2N}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} \sqrt{E} dE$$

Это полная функция распределения Максвелла – Больцмана.