

Семинар 1. Последовательности. Предел последовательности.

1. Понятие предела.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число a , что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. При этом число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$. В соответствии с этим определением всякая бесконечно малая последовательность сходится и имеет своим пределом число 0.

Другое определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число a , что можно указать номер N , такой, что при $n \geq N$ все x_n удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. Число a — предел последовательности.

Символическая запись

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ или } \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ при } n \geq N \text{ } |x_n - a| < \varepsilon$$

2. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1

Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2

Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3

Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

$$\{y_n\}$$

$$\{x_n\}$$

Теорема 4

Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен разности пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

Теорема 5

Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема 6

Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел последовательности $\{y_n\}$ отличен от 0, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема 7

Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b, (x_n \leq b)$, то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b, (a \leq b)$

Теорема 8

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Пусть также начиная с некоторого номера элементы последовательности $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n \leq z_n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

2. Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (число m), что каждый элемент последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$)

M – верхняя грань; m – нижняя грань. $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) - условие ограниченности последовательности сверху (снизу).

Замечание Любая ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет бесчисленное множество верхних (нижних) граней.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной с обеих сторон или просто ограниченной, если существуют такие числа M и m , что каждый элемент последовательности удовлетворяет неравенству $m \leq x_n \leq M$

M – верхняя грань; m – нижняя грань.

Если $\{x_n\}$ ограничена, то все элементы этой последовательности удовлетворяют

неравенству $|x_n| \leq A$ где $A = \max\{|M|, |m|\}$

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$

Примеры:

1) последовательность $-1, -4, -9, \dots, -n^2, \dots$ - ограничена сверху и не ограничена снизу. Верхняя грань – число больше или равно -1 .

2) Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ - ограничена. $M \geq 1, m \leq 0$

3) Последовательность $1, 2, 1, 3, \dots, n, 1, (n+1), \dots$ - не ограничена.

3. Монотонные последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для всех номеров n справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$).

Общее название – монотонные последовательности.

Если для всех n $x_n < x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\}$ - возрастающая.

Если для всех n $x_n > x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\}$ - убывающая.

Общее название – строго монотонные.

4. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение 1.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A можно указать номер N такой, что для $n \geq N$ все элементы удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$

Определение 2

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для $\forall \varepsilon > 0$, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$

Примеры с решениями

Пример 1. Доказать исходя из определения, что число 1 является пределом последовательности

Доказательство. Рассмотрим модуль разности $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$. Введем

произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $1/(n+1) < \varepsilon$ то есть при $n > 1/\varepsilon - 1$. В качестве N возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N > 1/\varepsilon - 1$, то есть $1/(N+1) < \varepsilon$. Тогда для всех $n \geq N$

выполнены неравенства $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Это и означает, что число 1

есть предел последовательности $x_n = n/(n+1) (n = 1, 2, \dots)$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Пример 2. Доказать исходя из определения, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^n = 0$.

Доказательство.

Так как $3^n > n$ для любого $n \geq 1$, то $|(1/3)^n - 0| = 1/3^n < 1/n$.

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$. Тогда для любого $n \geq N$ имеем $|(1/3)^n - 0| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$. Значит $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^n = 0$.

Пример 3. Доказать, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ расходится.

Доказательство. Докажем, что данная последовательность неограниченна. Имеем

$x_n = n - 10/n \geq n - 10$
 Пусть C – произвольное положительное число. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n_0 > C + 10$, тогда $x_{n_0} \geq n_0 - 10 > C$. Это означает, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ неограниченна, а поэтому расходится.

Пример 4. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$

Решение. Преобразуем формулу общего элемента к виду $x_n = \frac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3}$.

Учитывая, что $\{1/n\}, \{1/n^3\}$ - бесконечно малые последовательности, и используя теоремы о пределах, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 3/n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n^3)} = \frac{5}{1} = 5$$

Пример 5. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, x_n \geq -1$ для любого n ; пусть p – натуральное число.

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{1 + x_n} = 1$

Доказательство. Если $x_n \geq 0, \Rightarrow 1 + x_n \geq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[p]{1 + x_n} \leq (\sqrt[p]{1 + x_n})^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|$

а если $-1 \leq x_n < 0 \Rightarrow 0 \leq 1 + x_n < 1$ поэтому $1 > \sqrt[p]{1 + x_n} \geq (\sqrt[p]{1 + x_n})^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|$

Объединяя эти результаты, для любого $x_n \geq -1$ получаем $1 - |x_n| \leq \sqrt[p]{1 + x_n} \leq 1 + |x_n|$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + |x_n|) = 1$. Отсюда

следует, что и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{1 + x_n} = 1$

Пример 6. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

Решение. Преобразуем формулу общего элемента:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1}.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 1/n} + 1} = \frac{1}{2}$

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, указав для каждого $\varepsilon > 0$ такое N , что для любого $n \geq N$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon$, если

1) $x_n = 1/n$; 2) $x_n = a/n$; (a – произвольное данное число);

3) $x_n = (-1)^{n+1} 1/n$; 4) $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$

5) $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ 6) $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$

2. Доказать, что:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+b}{n} = 1, b \in R$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}$ 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$ 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, p \geq 1$

1. Доказать, что $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, если

$$1) x_n = \frac{n^2 - 1}{n^3}; \quad 2) x_n = \frac{2n + 3}{n^2};$$

$$3) x_n = q^n / n; |q| \leq 1 \quad 4) x_n = \frac{2n + 1}{(n + 1)2^n} \quad 5) x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

4. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если

$$1) x_n = (-1)^n n; \quad 2) x_n = n^{(-1)^n};$$

$$3) x_n = \frac{n^2 - 2n}{n + 1} \quad 4) x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4} \quad 5) x_n = (0,5)^{((-1)^n - 1)n}$$