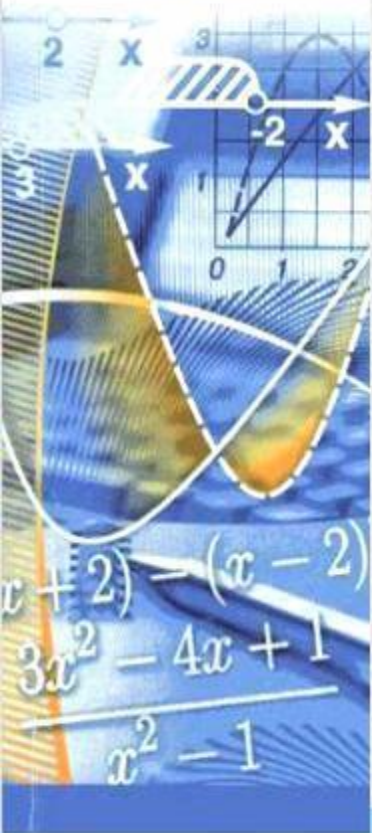




Решение неравенств методом интервалов

урок алгебры в 9 классе



АЛГЕБРА

9

КЛАСС



Устная работа



Являются ли следующие неравенства неравенствами второй степени с одной переменной?

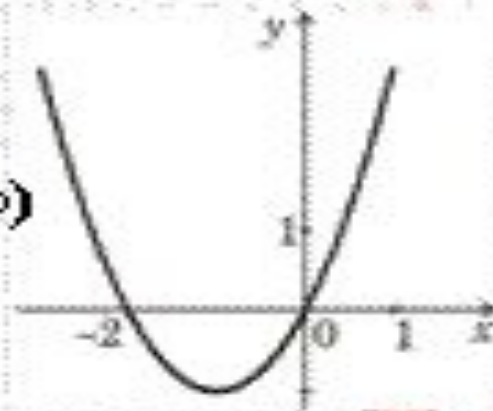
1) $x^2 - 6x - 7 \geq 0$; 2) $4 - x^2 > 0$; 3) $2x + 1 < 0$;

4) $(x-30)(25-x) \leq 0$; 5) $(4-x)^2 \leq 0$

На рисунке изображен график функции $y = x^2 + 2x$. Используя график, решите неравенство $x^2 + 2x > 0$.

1) $(-\infty; 0)$ 2) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

3) $(-2; 0)$ 4) $(-2; +\infty)$

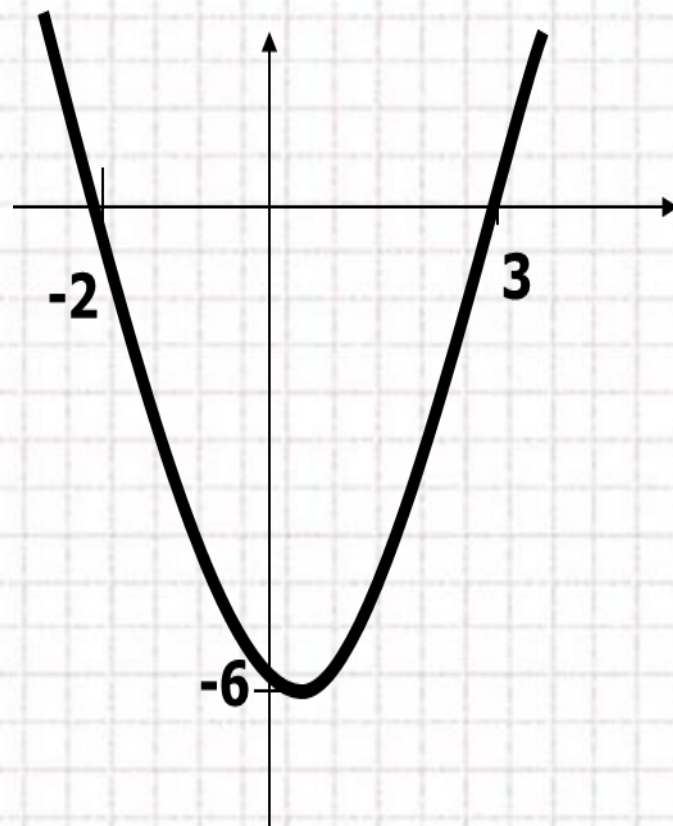


На рисунке изображен график функции

$$y = x^2 - x - 6.$$

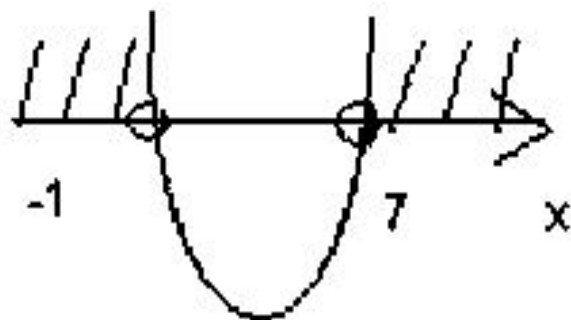
Используя график, решите неравенство

$$x^2 - x - 6 > 0$$

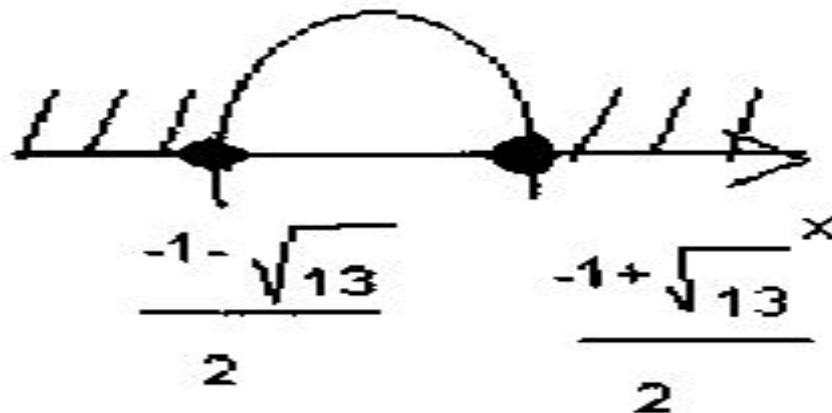


Повторение

$$x^2 - 6x - 7 \geq 0$$

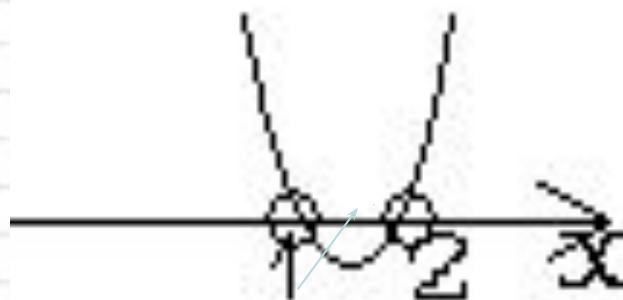
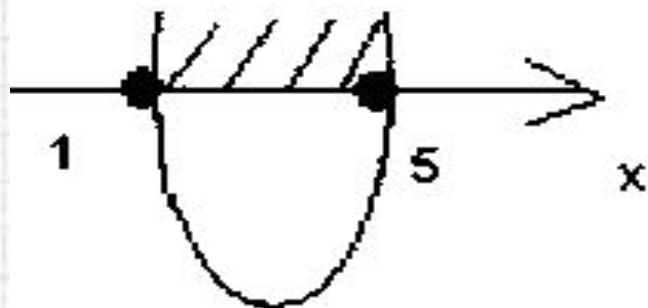


$$-x^2 - x + 3 \leq 0$$



$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$



1) Рассмотрим квадратичную функцию
 $f(x) = x^2 - 5x - 50$ и
найдем такие значения x , для которых $f(x) < 0$.

2) Графиком рассматриваемой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 1$, $1 > 0$.

3) Найдем нули функции (то есть абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox).

$$x^2 - 5x - 50 = 0, \quad a = 1, \quad b = -5, \quad c = -50.$$

$$D = b^2 - 4ac;$$

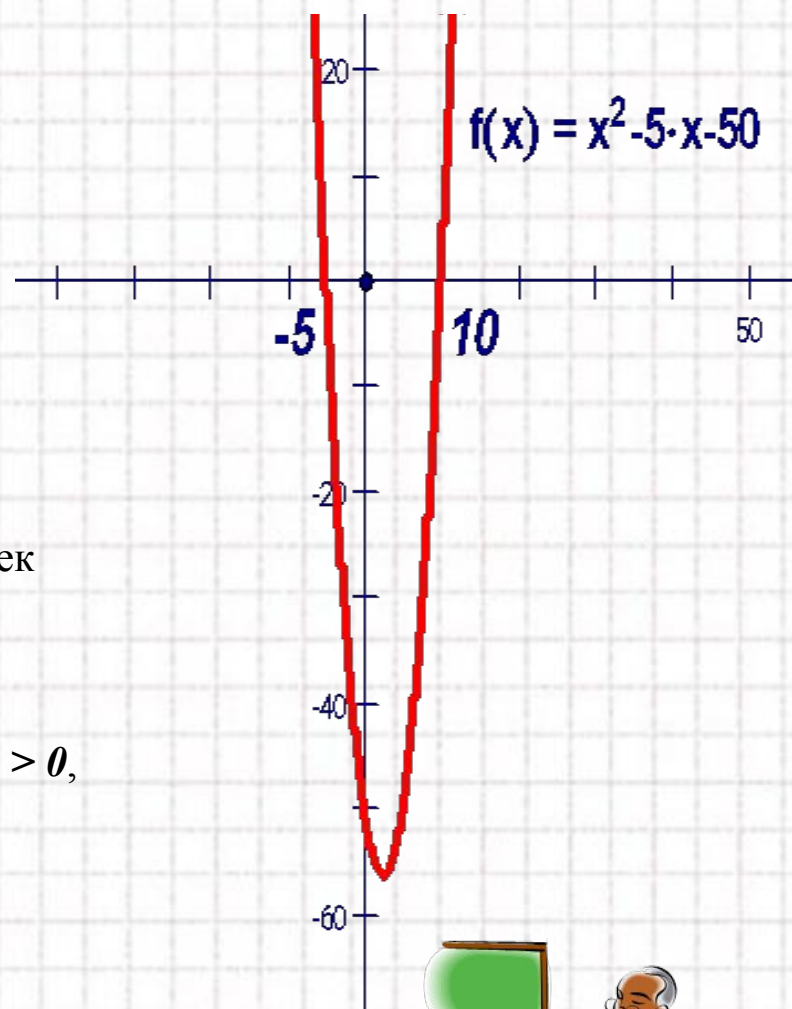
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50) = 25 + 200 = 225 = 15^2, \quad 225 > 0,$$

уравнение имеет два действительных корня.

$$x_1 = (-(-5) - 15) : 2 = -5;$$

$$x_2 = (-(-5) + 15) : 2 = 10.$$

Нули функции: $x = -5$ и $x = 10$.

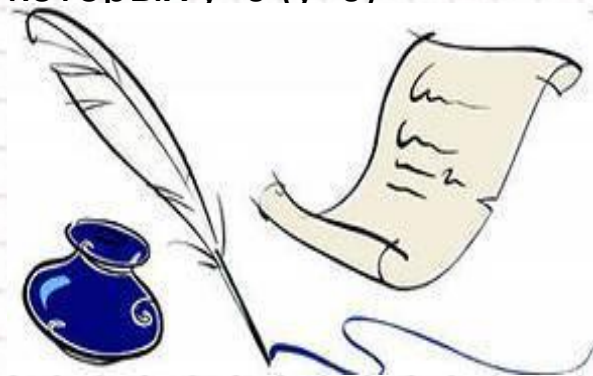


Ответ: $(-5; 10)$.



Алгоритм решения неравенств второй степени с одной переменной

1. Приведите неравенство к виду $ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c<0$)
2. Рассмотрите функцию $y=ax^2+bx+c$
3. Определите направление ветвей
4. Найдите точки пересечения параболы с осью абсцисс (для них $y=0$; x_1 и x_2 найдите, решая уравнение $ax^2+bx+c=0$)
5. Схематически постройте график функции $y=ax^2+bx+c$
6. Выделите часть параболы, для которой $y>0$ ($y<0$)
7. На оси абсцисс выделите те значения x , для которых $y>0$ ($y<0$)
8. Запишите ответ в виде промежутков.



Метод интервалов

1) Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 5x - 50$ и найдем такие значения x для которых $f(x) < 0$.

$D(f) = R$ (то есть множество всех действительных чисел).

2) Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 5x - 50$ на множители (то есть представим его в виде произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена).

3) Для нахождения корней квадратного трехчлена решим уравнение $x^2 - 5x - 50 = 0$.

(Его мы уже решали, поэтому воспользуемся готовым результатом).

Так как $x_1 = -5$, $x_2 = 10$, то получаем следующее разложение квадратного трехчлена на множители

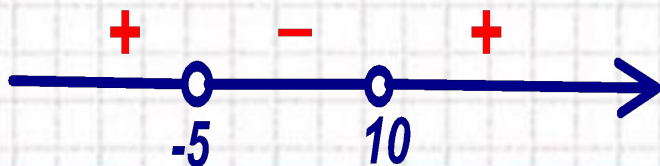
$$x^2 - 5x - 50 = (x - (-5))(x - 10) = (x + 5)(x - 10).$$

Выбираем промежутки, в которых $f(x) < 0$:

это выполняется

для всех $-5 < x < 10$.

Ответ: $(-5; 10)$.

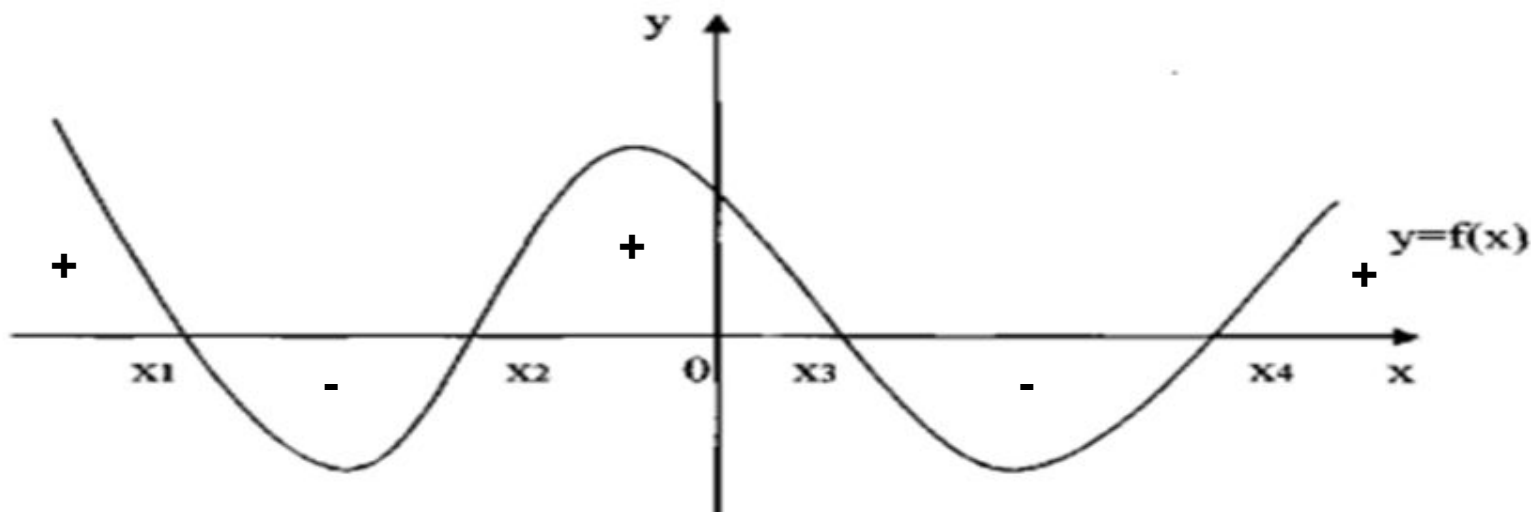


Изучение нового материала.

1. Если функция задана формулой вида: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, где x - переменная, а $x_1, x_2, \dots, x_n$, не равные друг другу числа. Эти числа являются нулями функции. В каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль ее знак изменяется. Это свойство используется для решения неравенств вида:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0$$



Свойство: Если на интервале $(a;b)$ функция непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.



Алгоритм решения неравенств методом интервалов.

1. Привести неравенство к виду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

$(f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n))$ Выделить функцию $y = f(x)$.

2. Найти область определения функции.

3. Найти нули функции, решив уравнение $f(x) = 0$.

$$(f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n))$$

4. Отметить на координатной прямой промежутки, на которые область определения разбивается нулями функции.

5. Определить знаки функции на одном из интервалов и расставить на остальных интервалах чередуя знаки.

6. Рассмотреть полученный рисунок и записать решение в виде промежутка, учитывая знак исходного неравенства:

– если $f(x) > 0$, то выбираем промежуток со знаком “+”;

– если $f(x) < 0$, то выбираем промежуток со знаком “-”.

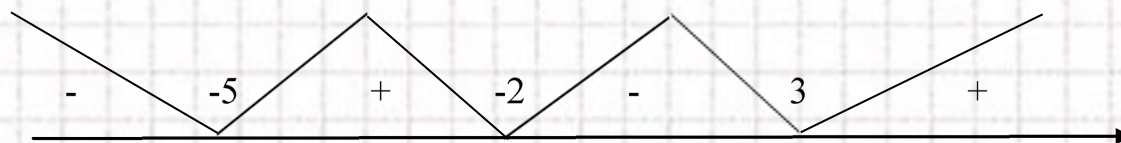
Пример 1. Решить неравенство $(x+2)(x-3)(x+5)>0$.

Рассмотрим функцию $f(x)=(x+2)(x-3)(x+5)$.

$D(f)=\mathbb{R}$.

Найдем нули функции, решив уравнение $f(x)=0$:

$$(x+2)(x-3)(x+5)=0; \quad x_1 = -5, x_2 = -2, x_3 = 3,$$



Решением данного неравенства является множество значений x , при которых $f(x)>0$.

Из рисунка видно, $f(x)>0$ при $x \in (-5;-2) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $(-5;-2) \cup (3;+\infty)$.

2 .При решении неравенств широко используется разложение на множители

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

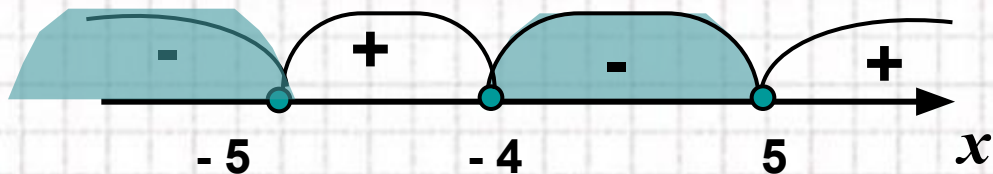
Проверь своё решение

Решить неравенство $(x - 5)(x + 4)(x + 5) \leq 0$

Решение.

$$f(x) = (x - 5)(x + 4)(x + 5)$$

Нули функции $x = 5$, $x = -4$, $x = -5$



Ответ: $(-\infty; -5] \cup [-4; 5]$



Давайте закрепим

Решите методом интервалов неравенства:

1) $x(x + 2)(x - 1) \geq 0$

2) $(x - 1)(3 - x)(x - 2) \leq 0$



Решите неравенство:

3) $(x-4)(x+7)(x-6) < 0$

4) $(x-9)(x-1)(x+5) > 0$

5) $\sqrt{(x-3)(x+2)}$

6) $\sqrt{(x-6)(2x+3)}$



Работа в группах

Определить промежутки, который принадлежит неравенству

7) $(x-1)(x+4) \leq 0$. $[-4;1], (-3;1), [0;1], (-4;1), [-4;-2]$

8) $(x+2)(x-5) \leq 0$. $[-2;-5], (2;5), [0;2], [-1;2), [3;-5]$

9) $(x-6)(x-4) > 0$. $(7;10), [-5;3], [8;11), [-6;4), [-7;0)$



Домашнее задание.



- 1) §15 (глава II)
- 2) №325, 327, 333

