

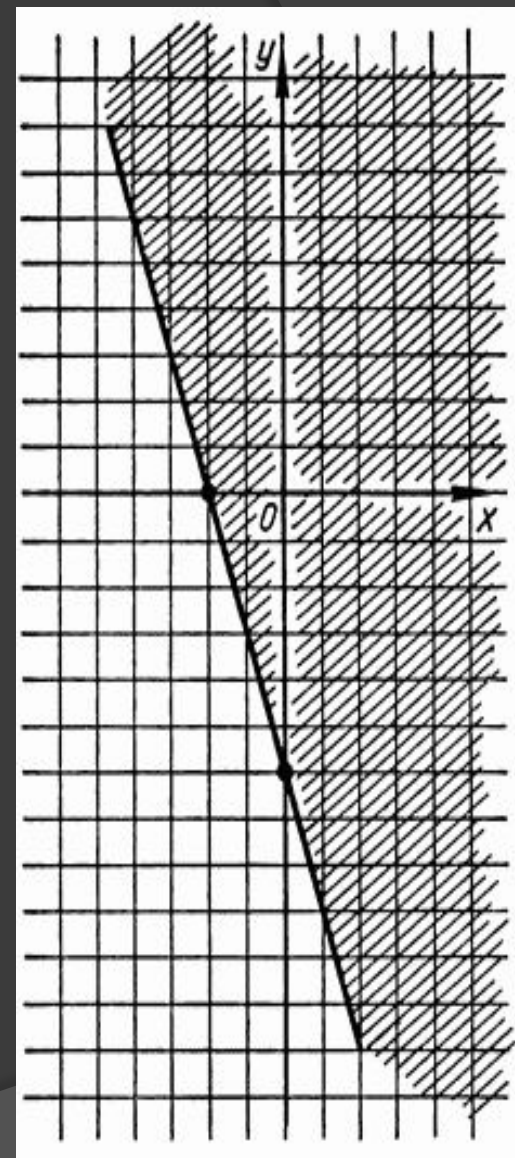
НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Бактыбай Алпамыс 11,,Ж”

Все неравенства с двумя переменными
равносильны неравенствам вида : $F(x, y) > 0$

Например , неравенство $3x^2 - y < 7x + 2xy + 1$
равносильно неравенству $7x + 2xy + 1 - 3x^2 + y > 0$

Чаще всего встречается случай , когда уравнение $F(x, y) = 0$ задает линию, разбивающую плоскость на две или несколько частей. В одной из этих частей выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в других – неравенство $F(x, y) > 0$. Иными словами, линия $F(x, y) = 0$ отделяет часть плоскости, где $F(x, y) > 0$, от части плоскости, где $F(x, y) < 0$.
Чтобы решить $F(x, y) > 0$, можно сначала изобразить линию $\Gamma: F(x, y) = 0$ и в каждой из областей, на которые она делит плоскость , выбрать пробную точку. Знак , который принимает F в этой точке, она принимает и во всей области.
После этого остается отобрать области, в которых F положительно.



Пример 1. Решим неравенство

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 > 0$$

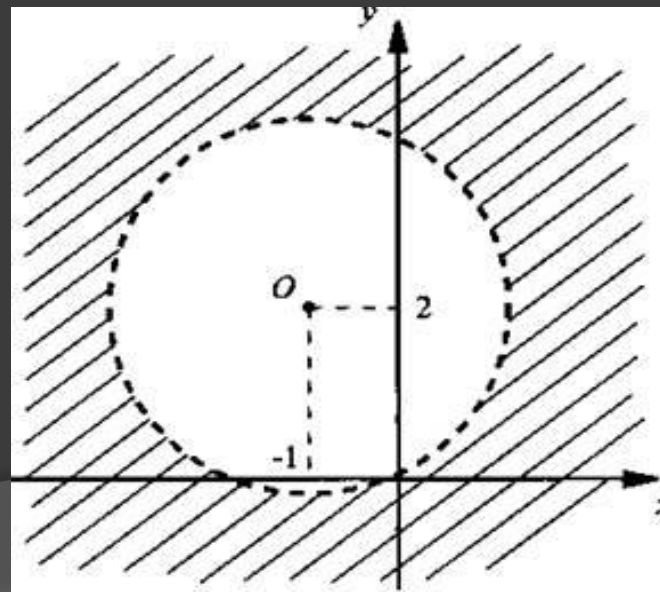
Построим сначала график уравнения $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$. Выделим в этом уравнении уравнение окружности: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4$, или $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Это уравнение окружности с центром в точке $O(-1; 2)$ и радиусом $R = 2$.

Построим эту окружность.

Так как данное неравенство строгое и точки, лежащие на самой окружности, неравенству не удовлетворяют, то строим окружность.

Легко проверить, что координаты центра O окружности данному неравенству не удовлетворяют. Выражение $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1$ меняет свой знак на построенной окружности. Тогда неравенству удовлетворяют точки, расположенные вне окружности. Эти точки заштрихованы.

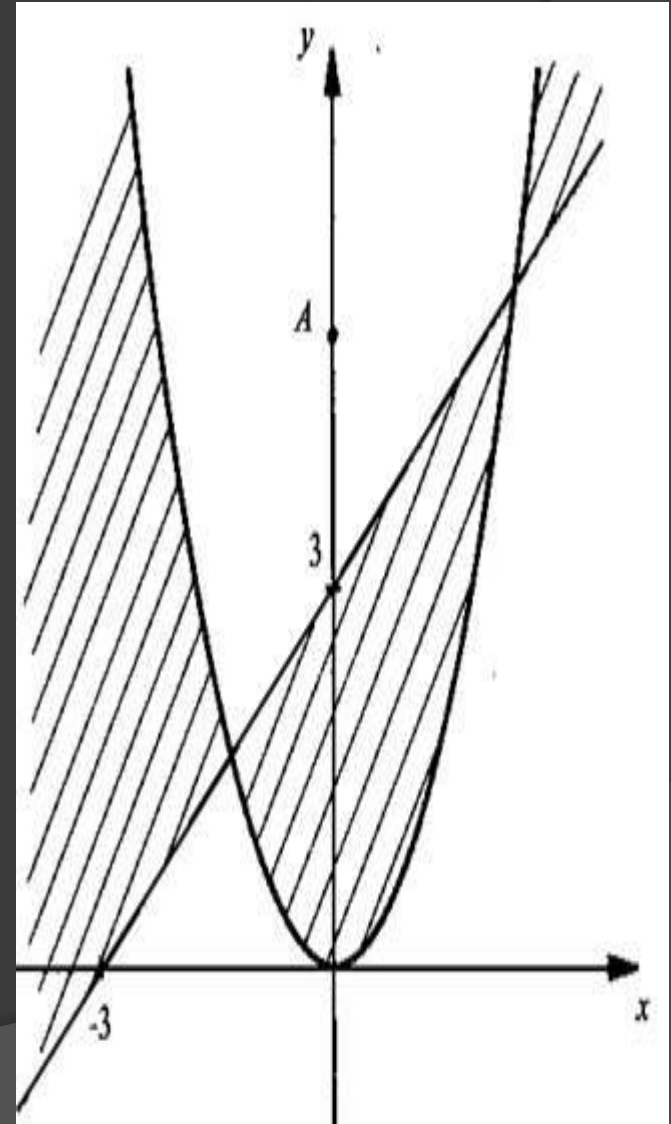


Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства

$$(y - x^2)(y - x - 3) \leq 3.$$

Сначала построим график уравнения $(y - x^2)(y - x - 3) = 0$. Им является парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 3$. Построим эти линии и отметим, что изменение знака выражения $(y - x^2)(y - x - 3)$ происходит только на этих линиях. Для точки $A(0; 5)$ определим знак этого выражения: $(5 - 0^2)(5 - 0 - 3) > 0$ (т. е. данное неравенство не выполняется). Теперь легко отметить множество точек, для которых данное неравенство выполнено (эти области заштрихованы).

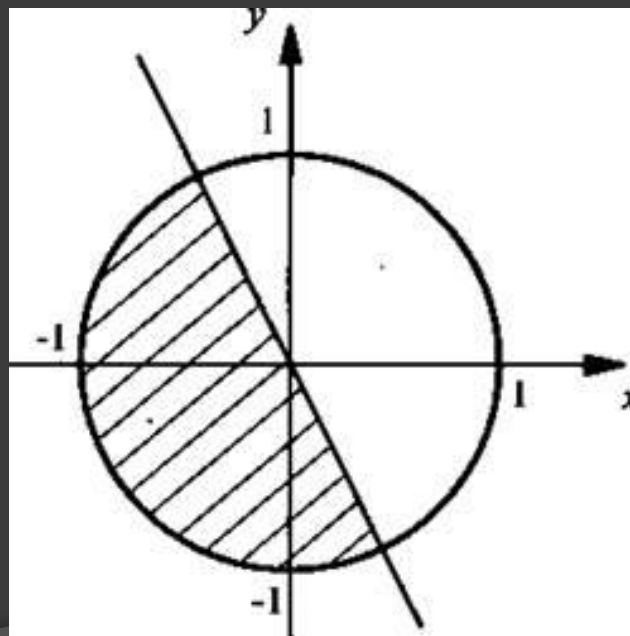
Как видно из рассмотренных примеров, для построения множества решений неравенства с двумя переменными используется метод интервалов на координатной плоскости.



Пример 3. Изобразим графическое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 2x + y \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задает на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Второе неравенство задает полуплоскость, расположенную ниже прямой $2x + y = 0$. Итак, решениями данной системы неравенств являются точки полукруга (они заштрихованы).



Пример 4. Изобразим графическое решение системы неравенств

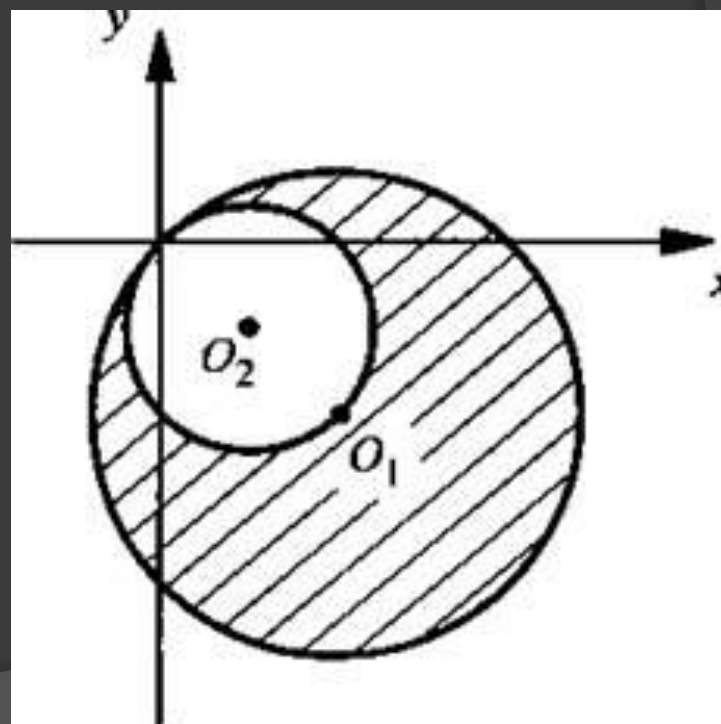
$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 8y \leq 0, \\ x^2 - 4x + y^2 + 4y \geq 0, \end{cases}$$

Запишем систему неравенств в следующем виде:

$$\begin{cases} (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 8y + 16) \leq 32, \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) \geq 8, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 4)^2 \leq (4\sqrt{2})^2, \\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \geq (2\sqrt{2})^2. \end{cases}$$

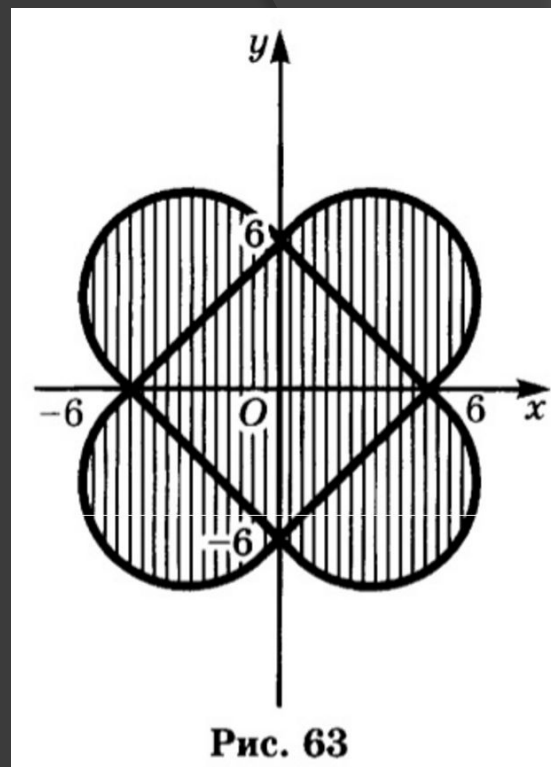


Пример 5. Зададим с помощью неравенств область, изображенную на рисунке 63

Решение. Эта область состоит из квадрата и четырёх полукругов. Легко проверить, что квадрат задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x + y - 6 \leq 0, \\ x + y + 6 \geq 0, \\ x - y - 6 \leq 0, \\ x - y + 6 \geq 0, \end{cases}$$

А полукруги — соответственно неравенствами



$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9, \\ x + y - 6 \geq 0; \\ (x - 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 9, \\ x - y - 6 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 9, \\ x + y + 6 \leq 0; \\ (x + 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9, \\ x - y + 6 \leq 0. \end{cases}$$

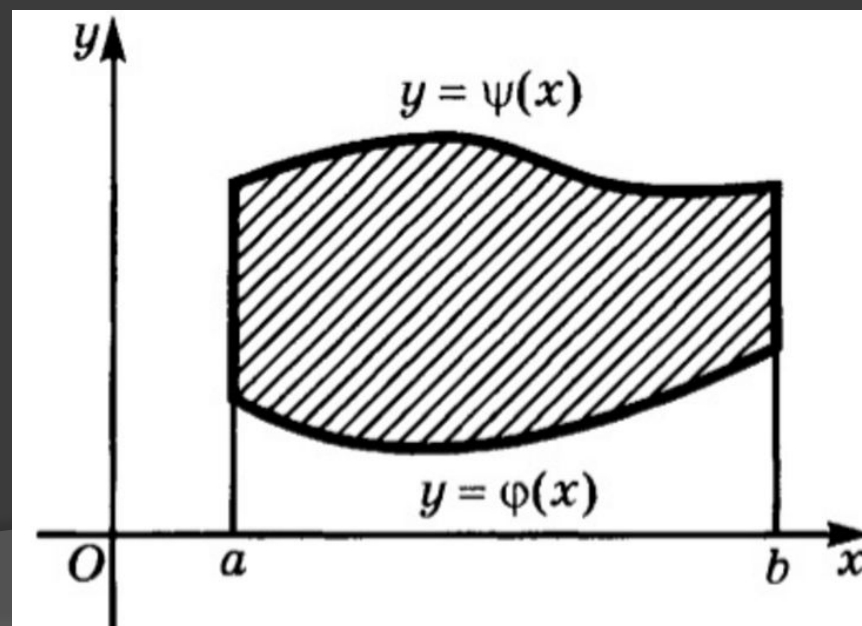
Во многих случаях бывает удобно задавать области системой неравенств вида

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{cases} \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} c \leq y \leq d, \\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y). \end{cases} \quad (3')$$

Система (3) указывает, во-первых, границы a и b изменения x , а для каждого x , лежащего между a и b , — границы изменения y (рис. 64). Аналогичный смысл имеет система неравенств (3'). Иногда приходится предварительно разбивать область на части и задавать неравенствами вида (3) или (3') каждую из этих частей.



Пример 6. Запишите с помощью системы неравенств вида (3) область, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} y \leq 2x + 9, \\ y \geq 2x^2 - 2x - 7. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем точки пересечения прямой $y=2x+9$ и параболы $y=2x^2-2x-7$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x + 9, \\ y = 2x^2 - 2x - 7. \end{cases}$$

Находим $A_1(-2;5)$ и $A_2(4;17)$. Из рисунка 65 видим, что значения x изменяются от -2 до 4 . При заданном значении x значение y уменьшается от $2x^2-2x-7$ до $2x+9$. Поэтому данная область задается системой неравенств

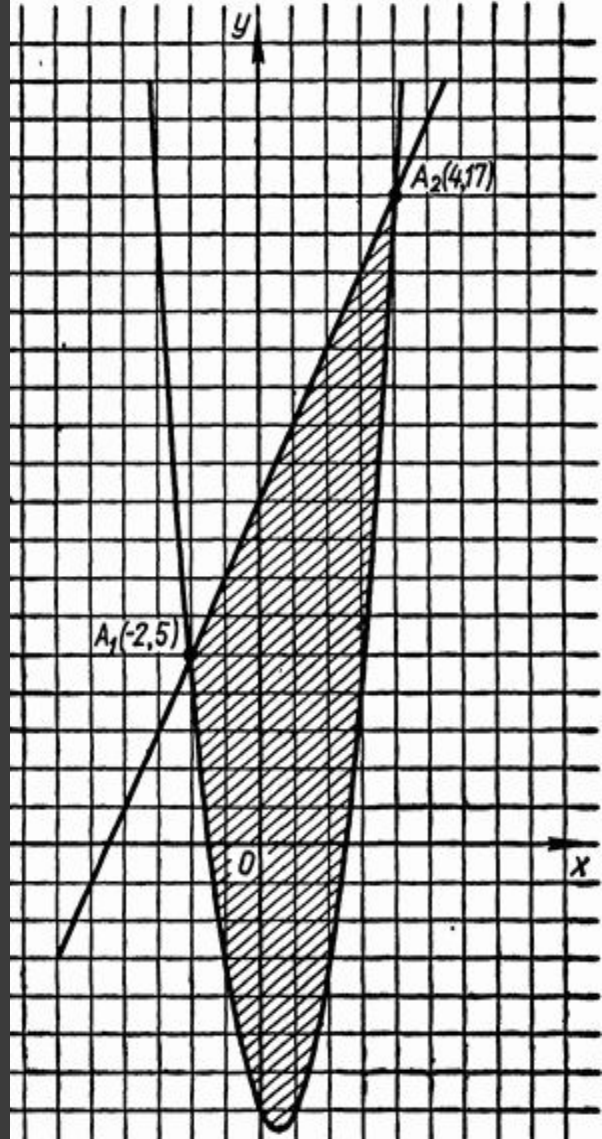


Рис. 65

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ 2x^2 - 2x - 7 \leq y \leq 2x + 9. \end{cases}$$

Пример 7. Зададим системой неравенств вида (3) круг радиусом 6 с центром в точке A(-4; 3).

Решение. Уравнение границы этого круга имеет вид

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

Отсюда находим

$$y - 3 = \pm \sqrt{36 - (x + 4)^2},$$

и поэтому

$$y = 3 \pm \sqrt{36 - (x + 4)^2}.$$

Уравнение

$$y = 3 - \sqrt{36 - (x + 4)^2}$$

задаёт нижнюю полуокружность, а уравнение

$$y = 3 + \sqrt{36 - (x + 4)^2}$$

Верхнюю полуокружность. Так как, кроме того, ясно, что x изменяется от -10 до 2, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} -10 \leq x \leq 2, \\ 3 - \sqrt{36 - (x + 4)^2} \leq y \leq 3 + \sqrt{36 - (x + 4)^2}. \end{cases}$$