



**МЕТОД
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ИНДУКЦИИ**

Индуктивное умозаключение —

метод рассуждения от частного к общему.

Метод доказательства, при котором проверяется утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называют **полной индукцией**.

Этот метод применим сравнительно редко, поскольку математические утверждения касаются, как правило, не конечных, а бесконечных множеств объектов.

- Например, утверждение: «Каждое двузначное чётное число является суммой двух простых чисел» – следует из серии равенств, которые вполне реально установить:
 - $10=5+5$ $12=5+7$ $14=7+7$ $16=5+11$
 - $92=3+89$ $94=5+89$ $96=7+89$ $98=19+79$.
- НО утверждение о четных двузначных числах является лишь частным случаем теоремы: «Любое четное число является суммой двух простых чисел».
- Эта теорема до сих пор ни доказана, ни опровергнута.
- **Проблема Гольдбаха** (*гипотеза Гольдбаха, проблема Эйлера, бинарная проблема Гольдбаха*) — одна из классических аддитивных проблем в теории чисел.

Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:

1) база индукции:

доказывают или непосредственно проверяют справедливость утверждения для $n=1$ (иногда $n=0$ или $n=n_0$);

2) индукционный шаг (переход):

предполагают справедливость утверждения для некоторого натурального $n=k$

и, исходя из этого предположения,

доказывают справедливость утверждения для $n=k+1$.

Доказать, что при любом натуральном n число $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7.

Обозначим $A(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$.

База индукции. Если $n=1$, то $A(1)=3^3+2^3=35$ и, очевидно, делится на 7.

Предположение индукции. Пусть $A(k)$ делится на 7.

Индукционный переход. Докажем, что $A(k+1)$ делится на 7, то есть справедливость утверждения задачи при $n=k$.

$$\begin{aligned} A(k+1) &= 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 3^{2k+1} \cdot 3^2 + 2^{k+2} \cdot 2^1 = 3^{2k+1} \cdot 9 + 2^{k+2} \cdot 2 = \\ &= 3^{2k+1} \cdot 9 + 2^{k+2} \cdot (9-7) = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \cdot 9 - 7 \cdot 2^{k+2} = 9 \cdot A(k) - 7 \cdot 2^{k+2}. \end{aligned}$$

Последнее число делится на 7, так как представляет собой разность двух целых чисел, делящихся на 7.

Следовательно, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7 при любом натуральном n .



На плоскости дано n окружностей.
Доказать, что при любом расположении
этих окружностей образуемую ими карту
можно правильно раскрасить двумя
красками.



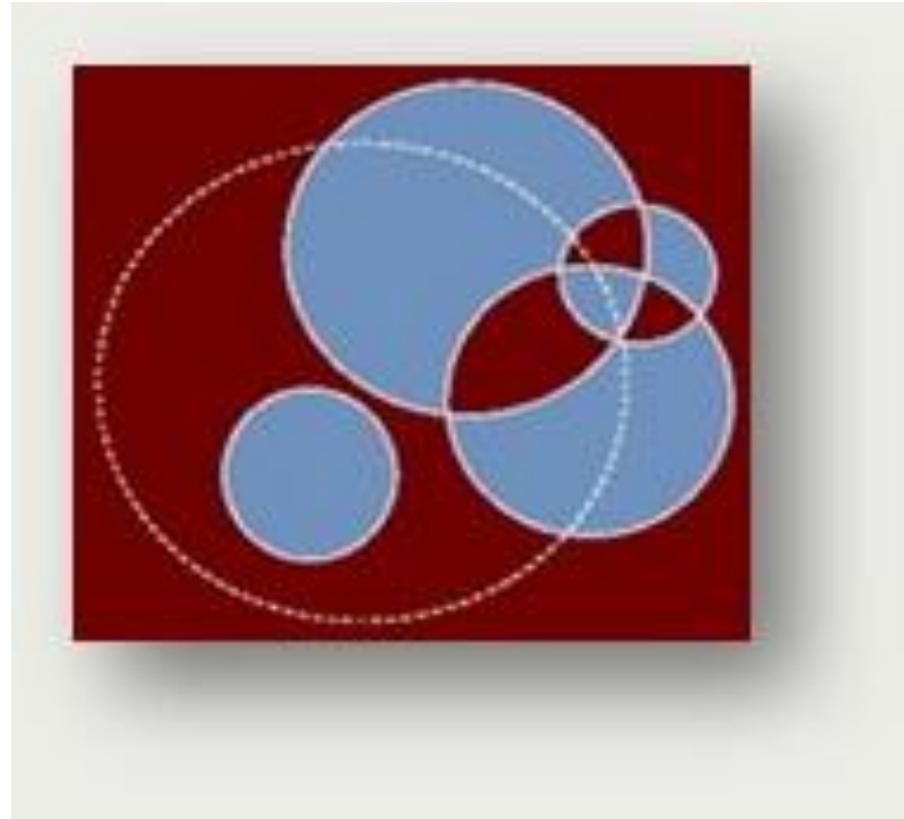
При $n=1$ утверждение

очевидно.

Предположим, что утверждение справедливо для любой карты, образованной n окружностями, и пусть на плоскости задано $n+1$ окружностей.

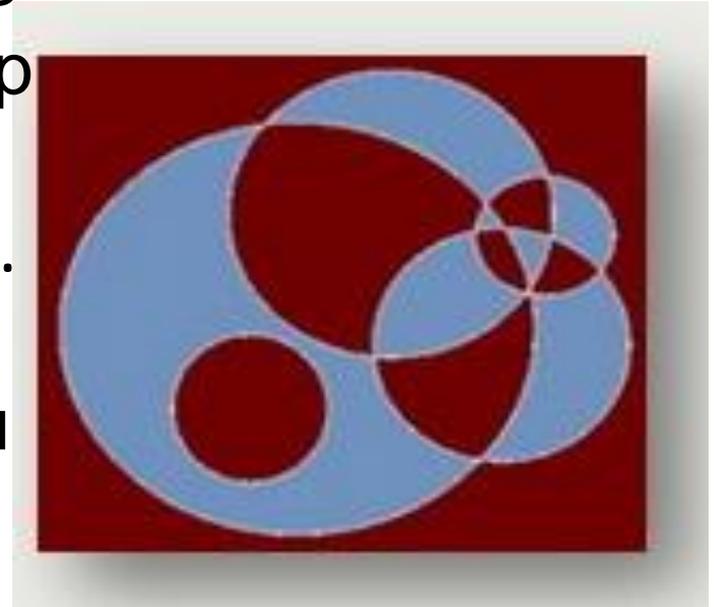
Удалив одну из этих окружностей, мы получим карту, которую в силу сделанного

предположения можно правильно раскрасить двумя красками

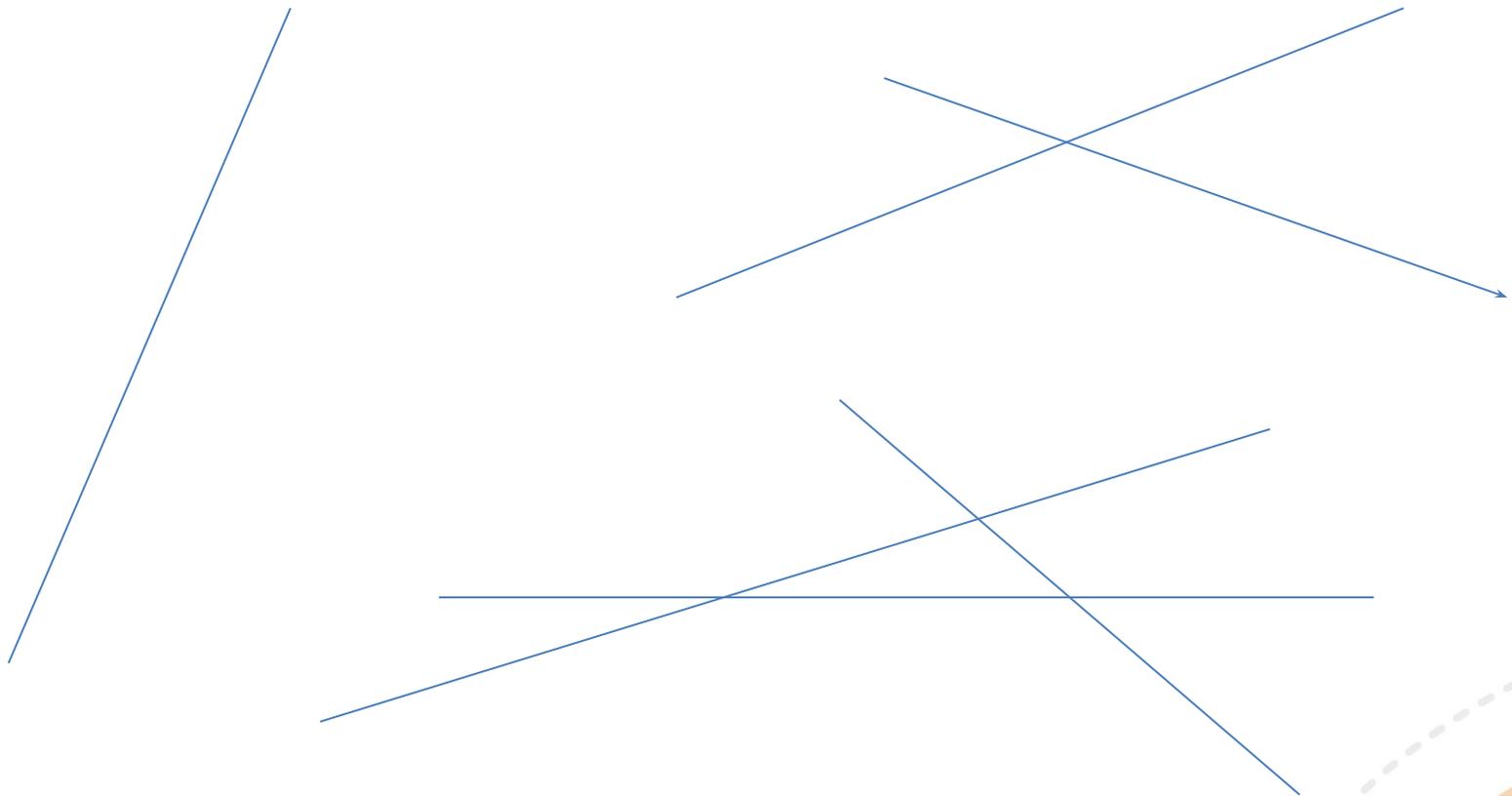


Восстановим затем отброшенную окружность и по одну сторону от нее, например внутри, изменим цвет каждой области на противоположный.

Легко видеть, что при этом мы получим карту, правильную раскрашенную двумя красками, но только теперь уже при $n+1$ окружностях, что и требовалось доказать.



В плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые.




$$N(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$


Сделав предположение индукции рассмотрим $k+1$ прямых, удовлетворяющих условию задачи.

Выделим из них произвольным образом k прямых.

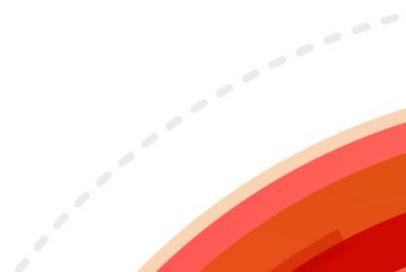
По предположению индукции они разобьют плоскость на $1 + k(k+1)/2$ частей. Оставшаяся $(k+1)$ -я прямая разобьётся выделенными k прямыми на $k+1$ частей и, следовательно, пройдёт по $(k+1)$ -й части, на которые плоскость уже была разбита, и каждую из этих частей разделит на 2 части, то есть добавится ещё $k+1$ часть. Итак,

$$N(k) + k + 1 = 1 + \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = 1 + \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

что и требовалось доказать.



В любой момент времени число людей на земле , сделавших нечётное число рукопожатий , чётно.

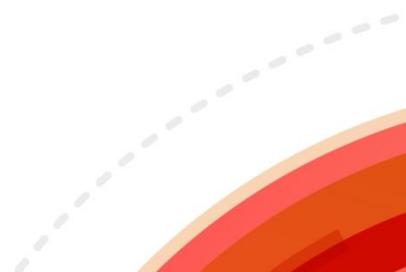




Назовём людей, сделавших нечётное число рукопожатий «плохими», а остальных «хорошими».

После рукопожатия с номером 1 стало два «плохих» человека, т.е. чётное число.

Пусть после рукопожатия с номером k число «плохих» людей чётно.



Пусть происходит рукопожатие номер $k+1$. При этом может быть 3 случая:

1. Пожимают руки двое «хороших»,
2. двое «плохих»,
3. «хороший» и «плохой».

В первом случае двое «хороших» прибавляют к своему чётному числу рукопожатий ещё одно, т.е. становятся «плохими» ;

Во втором случае двое «плохих» становятся «хорошими». И в третьем - «хороший» становится «плохим» , а «плохой» -«хорошим».

Т.о. , число «плохих» людей либо увеличивается на два, либо уменьшается на два, либо не меняется, т.е. в любом случае остаётся чётным.

Доказать методом математической индукции формулу:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Доказать, что любое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи, имея только купюры 3 и 5 рублей.