

Задачи на применение
прогрессий встречаются
в старых учебниках
по математике

Презентацию подготовила
учитель МОУ СОШ №5
МО, г. Ивантеевка
Любецкая Н.Ф.

Задачи из «Арифметики» Л. Ф.Магницкого

- Купец имел 14 чарок серебряных, причем веса чарок растут по арифметической прогрессии с разностью 4. Последняя чарка весит 59 латов. Определить, сколько весят все чарки.

Решение

- $a_{14}=a_1+13d$, $a_1=59-13\cdot 4=7$,
 $S_{14}=(7+59)/2\cdot 14=462$.
Ответ: все чарки весят 462 лата.

Задачи из «Арифметики» Л. Ф.Магницкого

Яблоки

Садовник продал первому покупателю половину всех яблок и ещё пол-яблока, второму покупателю — половину оставшихся и ещё пол-яблока; третьему — половину оставшихся и ещё пол-яблока и так далее. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблоки ещё пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

Решение. Пусть у садовника было x яблок.

1 покупатель	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$
2 покупатель	$\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$
3 покупатель	$\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$
7 покупатель	$\frac{x+1}{128}$

Составим уравнение: $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + \dots + \frac{x+1}{128} = x$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128}$ - геометрическая прогрессия, где

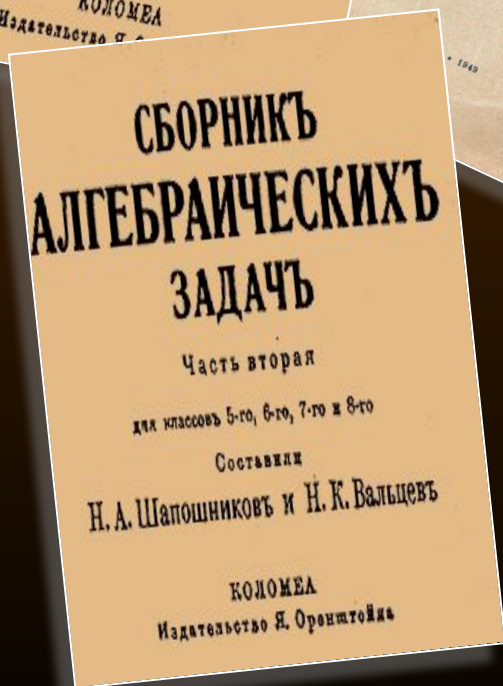
$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad n = 7, \quad S_7 = \frac{b_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^7 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{128}$$

Уравнение примет следующий вид:

$$(x + 1) \cdot \frac{127}{128} = x \quad \frac{127 \cdot (x+1)}{128} = x,$$

$$x = 127$$

Ответ: 127 яблок было у садовника.



В «Сборнике алгебраических задач» (часть вторая, авторы Шапочников Н.А., Вальцов Н.К.; Москва, Ленинград, Учпедгиз, 1949) было найдено двадцать задач на арифметическую прогрессию.

Работники нанялись вырыть колодезь с таким условием, чтобы за первый аршин глубины им заплатили 40 копеек, а за каждый следующий 15-ю копейками больше, чем за предыдущий. Сколько аршин вырыли они, если за всю работу получили 16 р. 90 к.?

▣ *Решение.* $a_1=40$, $d=15$, $S_n=1690$. Найти n .

$$S_n=(2a_1+d(n-1))\cdot n:2; n>0;$$

$$1690=(80+15(n-1))\cdot n:2;$$

$$1690=(80+15(n-1))\cdot n:2;$$

$$3380=(65+15n)\cdot n;$$

$$15n^2+65n-3380=0;$$

$$3n^2+13n-676=0;$$

$$n_1=-52/3; n_2=13.$$

Так как по условию задачи $n>0$, то $n=13$.

Работники выкопали колодезь глубиной 13 аршин.

Некто, будучи должен 720 руб., обязался уплачивать этот долг по частям, выдавая каждый месяц 10-ю рублями меньше, чем в предыдущий. Сколько он уплатил в первый месяц и во сколько времени погасил весь свой долг, если в последний месяц ему пришлось отдать 40 р.?

▣ **Решение.** Применим формулы n –го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 - 10n - 30 = 0, \\ a_1 n + 10n - 1440 = 0; \end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, найдем $n = -16$ и $n = 9$. Так как $n > 0$, то приходим к выводу, что свой долг человек вернул за 9 месяцев, отдав в первый месяц 120 рублей.

Два тела движутся навстречу одно другому из двух мест, находящихся в расстоянии 153 футов. Первое проходит по 10 футов в секунду, а второе в первую секунду прошло 3 фута и в каждую следующую секунду проходит 5-ю футами больше, чем в предыдущую, Через сколько секунд тела встретятся?

▣ *Решение.* Второе тело пройдет за n сек

$S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = (2 \cdot 3 + 5 \cdot (n-1)) \cdot n : 2 = (1+5n) \cdot n : 2$ (фут), а первое тело - $10n$ фут,

$((1+5n) \cdot n : 2 + 10n)$ фут — расстояние между телами в начальный момент, по условию оно равно 153 футам. $(1+5n) \cdot n : 2 + 10n = 153$. $n=6$, $n=-10,2$. Так как $n > 0$, то $n=6$.

Значит, тела встретятся через 6 секунд.

□ Числа градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах некоторого многоугольника, составляют прогрессию, разность которой 10; наименьший угол этого многоугольника 100° . Сколько в многоугольнике сторон?

□ *Решение.* $S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = (200 + 10(n-1)) \cdot n : 2 = 5n^2 + 85n$.
Сумма внутренних углов многоугольника находится по формуле, известной из геометрии: $(n-2) \cdot 180$.

$$5n^2 + 95n = 180n - 360;$$

$$5n^2 - 85n + 360 = 0;$$

$$n^2 - 17n + 72 = 0;$$

$$n = 8, \quad n = 9.$$

Существует два многоугольника, удовлетворяющие условию задачи.

Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 16,1 фута, а в каждую следующую на 32,2 фута больше, чем в предшествующую. Если два тела начали падать с одной высоты, спустя 5 секунд одно после другого, то через сколько секунд они будут друг от друга на расстоянии 724,5 фута?

Решение. Найдем путь каждого тела.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

$$S_t = \frac{2 \cdot 16,1 + 32,2(t-1)}{2} \cdot t = \frac{32,2(1+t-1)}{2} \cdot t = 16,1t^2;$$

$$S_{t+5} = \frac{2 \cdot 16,1 + 32,2((t+5)-1)}{2} \cdot (t+5) =$$

$$= \frac{32,2(1+t+5-1)}{2} \cdot (t+5) = 16,1(t+5)^2;$$

$$S_{t+5} - S_t = 724,5;$$

$$16,1(t+5)^2 - 16,1t^2 = 724,5;$$

$$t = 2.$$

Тела будут друг от друга на расстоянии

$$724,5 + 16,1 \cdot 2^2 = 789,7 \text{ фута.}$$



Список использованных источников

1. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений/ А.Г.Мордкович. – 9-е изд., стер. – М.:Мнемозина, 2007. – 231 с.;
2. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных.9 кл.: Учебник для общеобразовательных учебных заведений/ Г.В. Дорофеев , С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева; под ред. Г. В. Дорофеева. -М. :Дрофа, 2000,-352с.;
3. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 классов средней школы -М.: Просвещение, 1990.-224сю;
4. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. А.П.Савин.- М.: Педагогика, 1989.-352с..

