

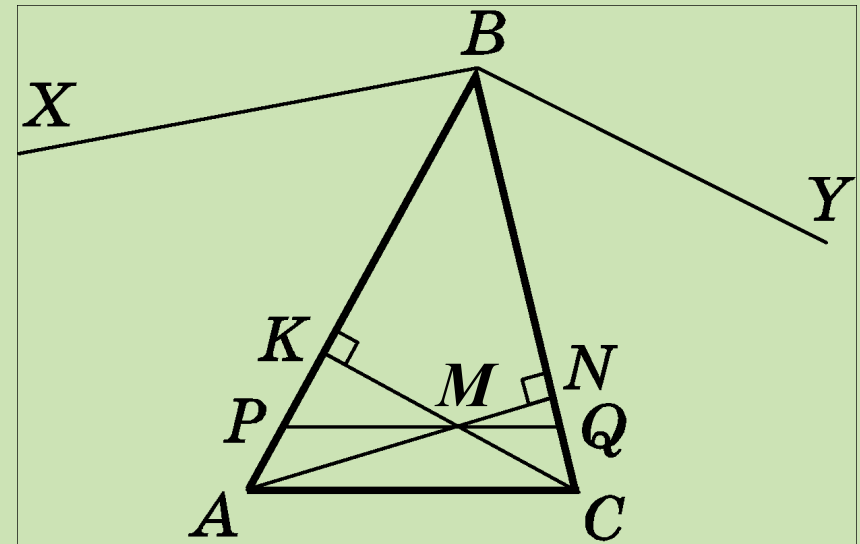
**Не будем жалеть
времени, или решение
задачи несколькими
способами**

Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 1

В прямоугольном треугольнике BKC угол KCB равен 60° , тогда в треугольнике NMC угол NMC равен 30° . Значит, смежный с углом NMC угол AMC имеет градусную меру 150° .



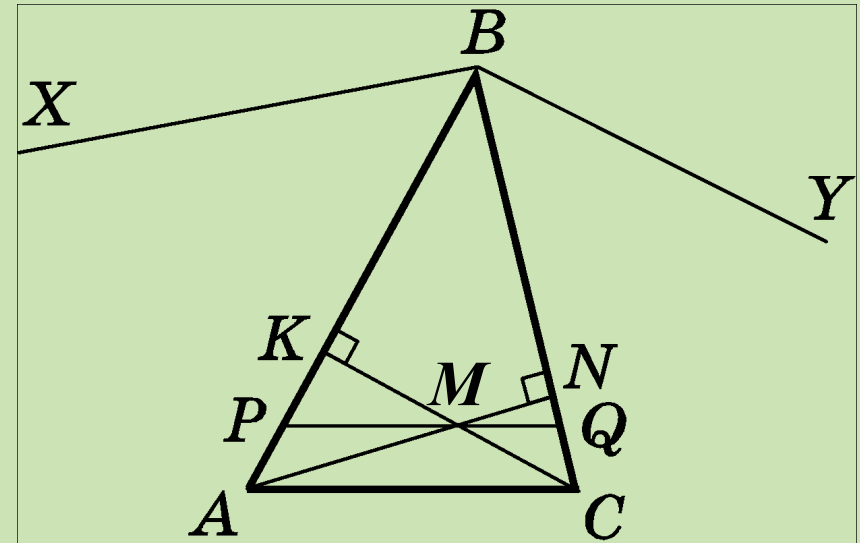
Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 2

Через точку M проведем прямую $PQ \parallel AC$. По свойству углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, углы KPM и BAC равны 70° .

Тогда угол KMP равен 20° (из прямоугольного треугольника PKM). Аналогично, угол NMQ равен 10° . Тогда углы KMN и AMC равны $180^\circ - (20^\circ + 10^\circ) = 150^\circ$ (по свойству вертикальных углов).

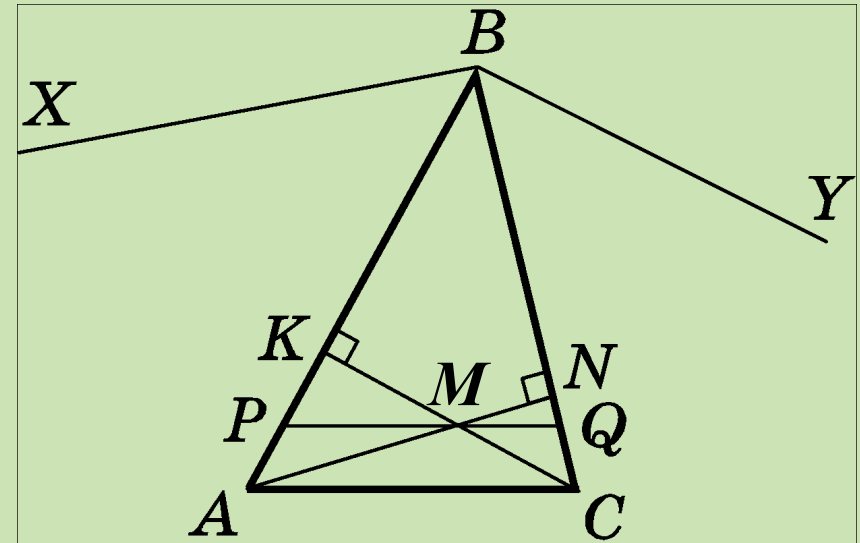


Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 3

В четырехугольнике $MKBN$ угол KBM равен 30° , а углы BKN и BNM равны 90° . Угол KMN , вертикальный с искомым углом AMC , равен $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.



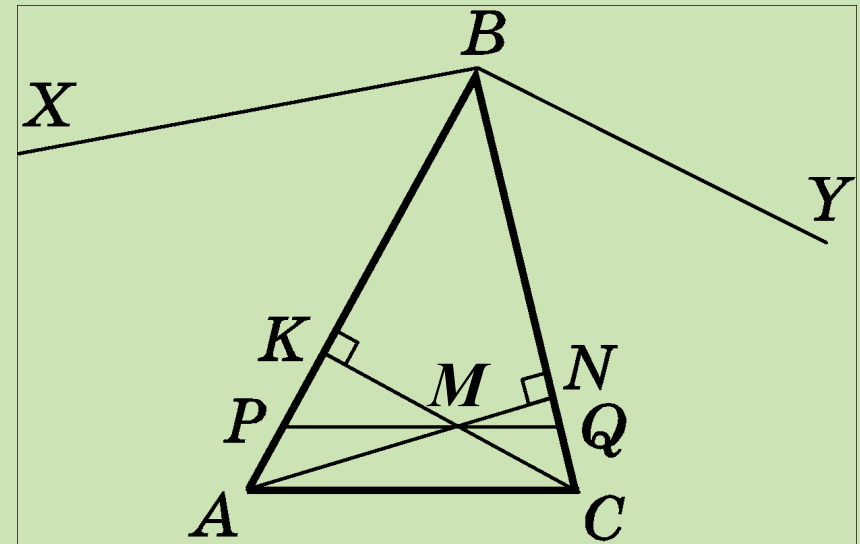
Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 4

В прямоугольных треугольниках AKC и CNC угол KCA равен $90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$,
угол NCB равен $90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$,
тогда в треугольнике AMC
угол AMC равен

$$180^\circ - (20^\circ + 10^\circ) = 150^\circ.$$

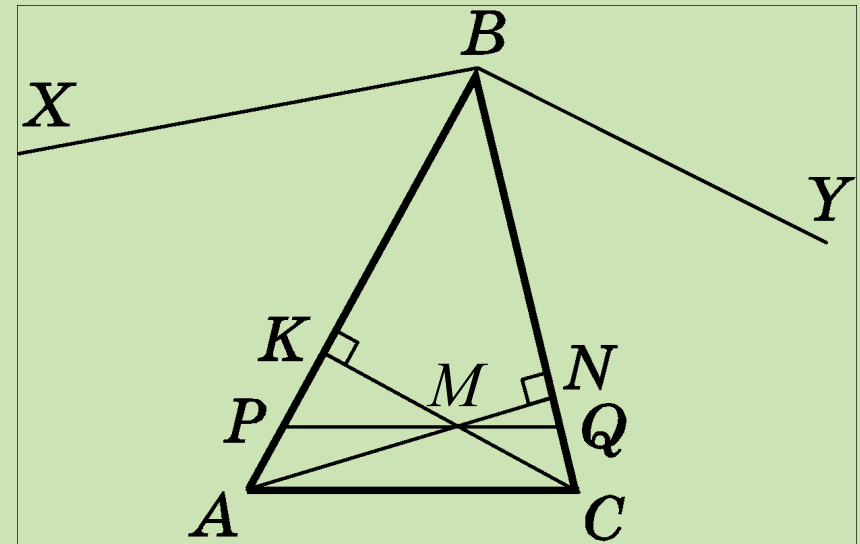


Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 5

В прямоугольных треугольниках ANB и CKB углы BAN и BCK равны 60° . Тогда угол NAC будет равен $70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$, угол KCA равен $80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$. Тогда в треугольнике AMC угол AMC равен $180^\circ - (20^\circ + 10^\circ) = 150^\circ$.



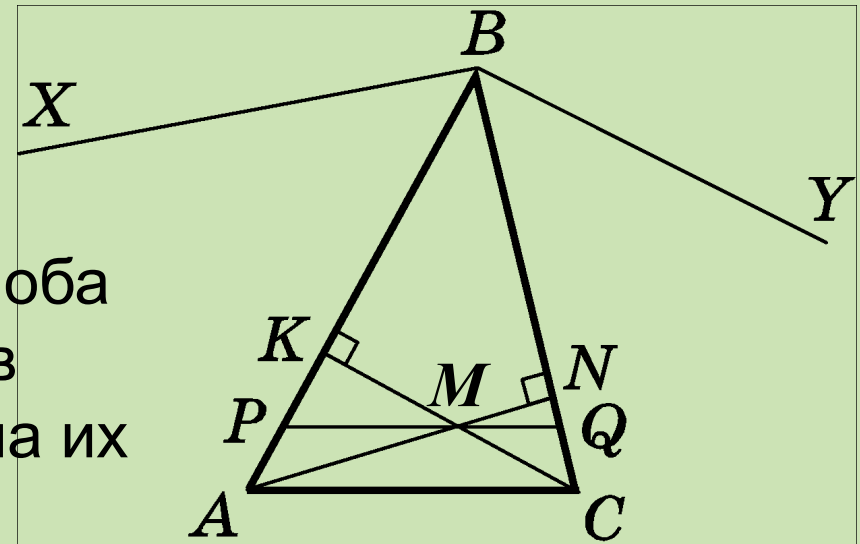
Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 6

Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба тупые или оба острые. Если один из этих углов острый, а другой тупой, то сумма их градусных мер равна 180° .

Поэтому если угол B острый и равен 30° , то угол AMC тупой и равен 150° .



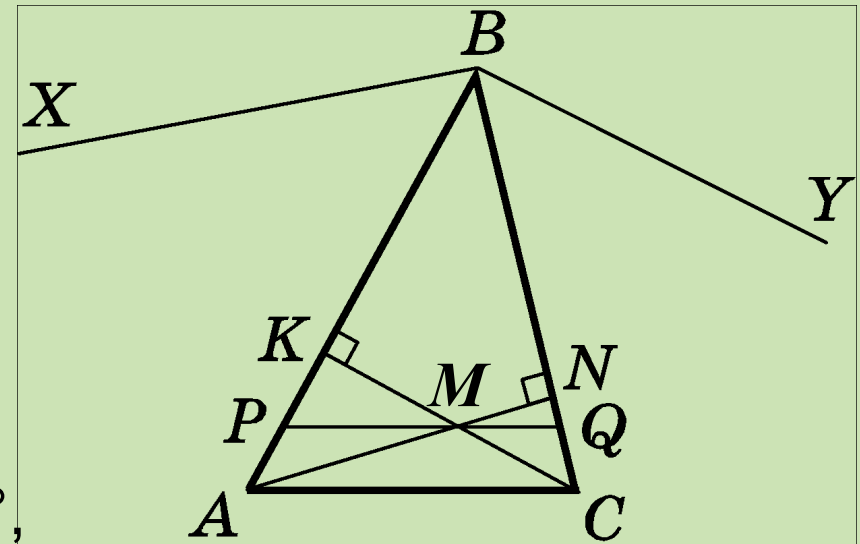
Задача 1. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите угол AMC , если угол A равен 70° , а угол C равен 80° .

Решение.

Способ 7

Через вершину B проведем лучи $BX \parallel NA$ и $BY \parallel KC$. Величина угла между этими лучами равна величине угла AMC . Поскольку углы XBC и YBA прямые, а угол B равен 30° , то углы $XB Y$ и AMC будут равны

$$60^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$



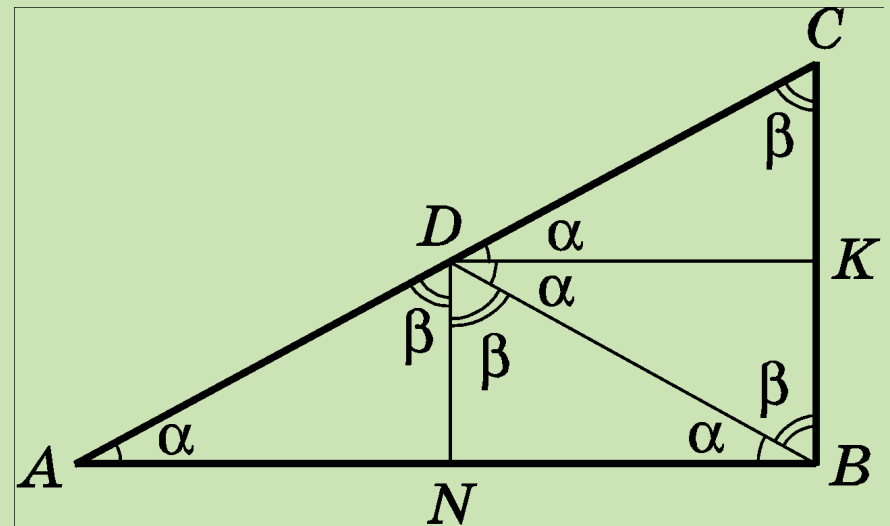
Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника ABC .

Решение.

Способ 1

В треугольнике ABC проведем среднюю линию DK . В равнобедренном треугольнике BDC медиана DK является одновременно и высотой, то есть DK и CB перпендикулярны.

По свойству средней линии треугольника $DK \parallel AB$, тогда и сторона AB перпендикулярна стороне CB , то есть угол B равен 90° .

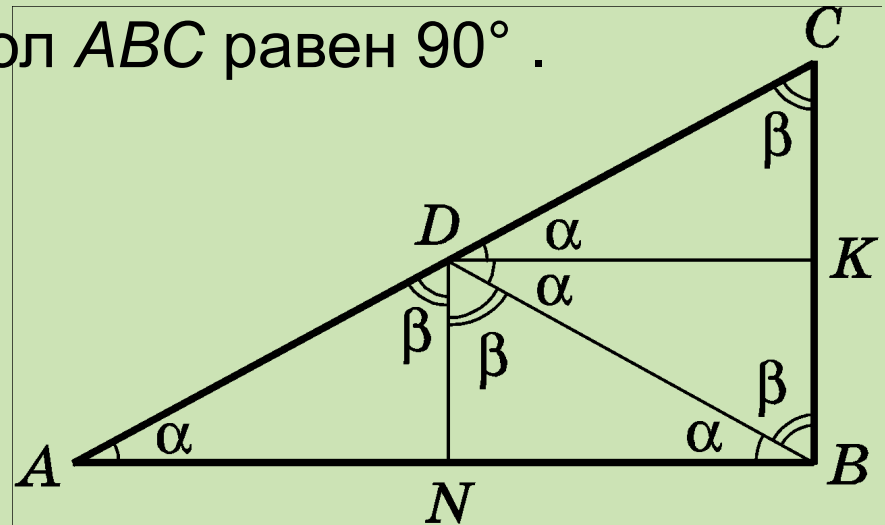


Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника ABC .

Решение.

Способ 2

Обозначим α угол DAB , β — угол DCB . По условию, $BD = AD = DC$, значит, угол DBA равен α , угол DBC равен β . В треугольнике ABC $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, следовательно, угол ABC равен 90° .

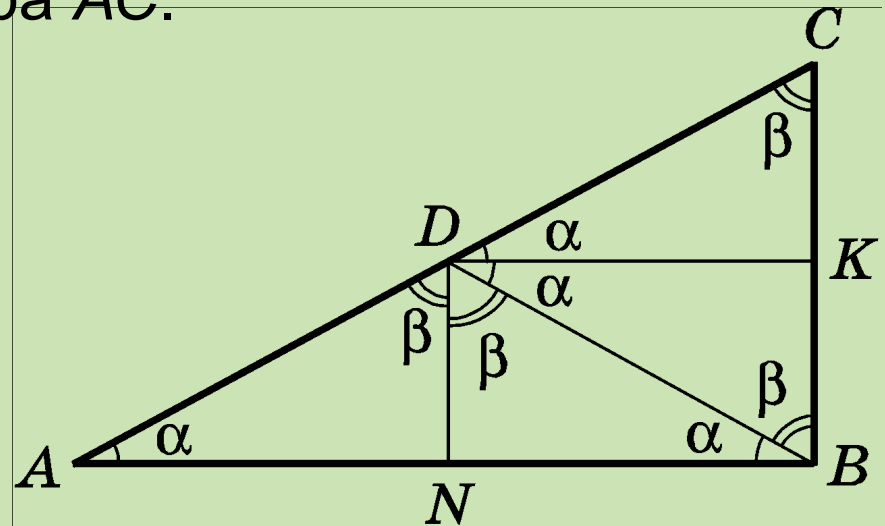


Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника.

Решение.

Способ 3

По условию, $DA = DB = DC$, значит, точки A , B и C принадлежат окружности с центром D . Тогда угол ABC будет равен 90° — по свойству вписанного угла, стороны которого проходят через концы диаметра AC .



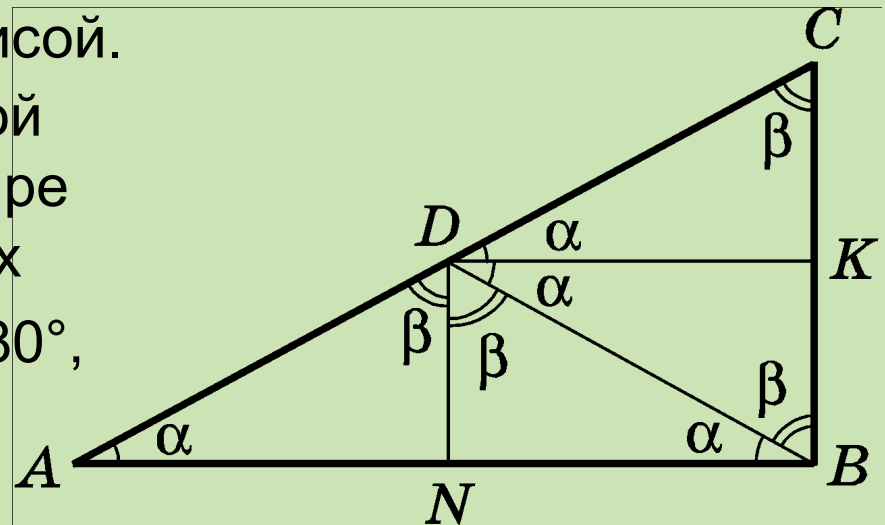
Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника.

Решение.

Способ 4

Пусть угол $A = \alpha$, угол $C = \beta$. Проведем DK и DN параллельно соответственно сторонам AB и BC . По теореме Фалеса, они окажутся средними линиями для треугольника ABC . Медиана равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является и биссектрисой.

При точке D на прямой AC в одной полуплоскости «скопилось» четыре попарно равных угла. Сумма всех четырех равна 180° , $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, следовательно, угол ABC равен 90° .

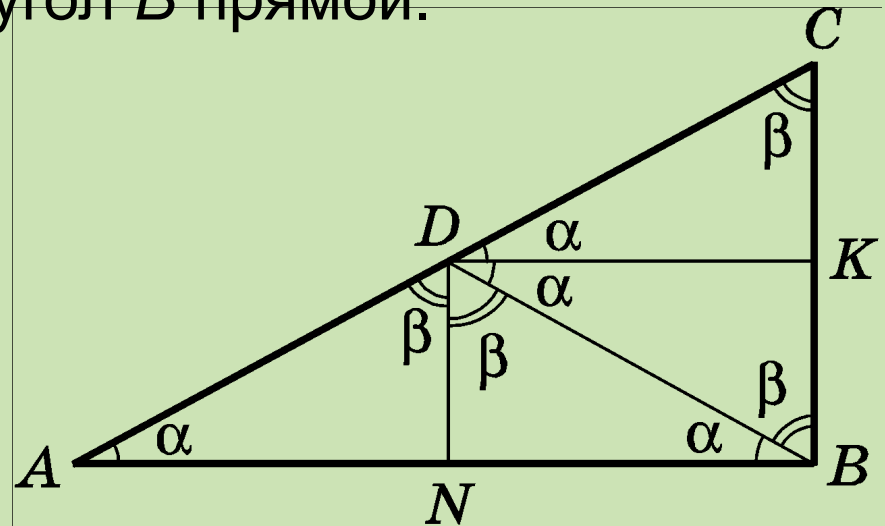


Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника.

Решение.

Способ 5

Продолжив BD за точку D и отложив от точки D отрезок DE , равный BD , получим четырехугольник $AECB$, у которого диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. По признаку прямоугольника, угол B прямой.



Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

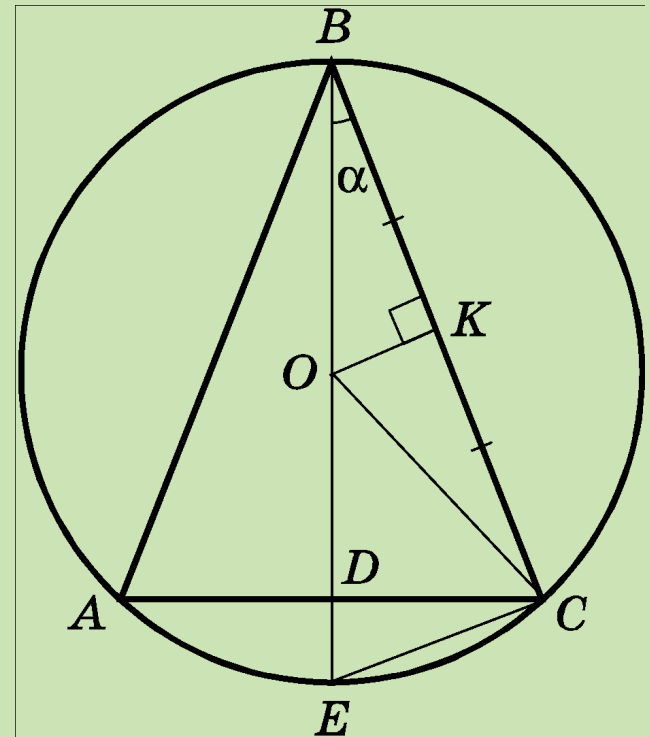
Способ 1

Проведя серединный перпендикуляр KO , получим точку O – центр описанной окружности ($BK = KC = 6,5$ см):

$$OB = OC = R, OD = BD - OB = 12 - R.$$

Из треугольника ODC , по теореме Пифагора, $OD^2 = OC^2 - DC^2 = R^2 - 5^2$, $R^2 - 5^2 = (12 - R)^2$. Решив это уравнение, получим:

$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$



Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

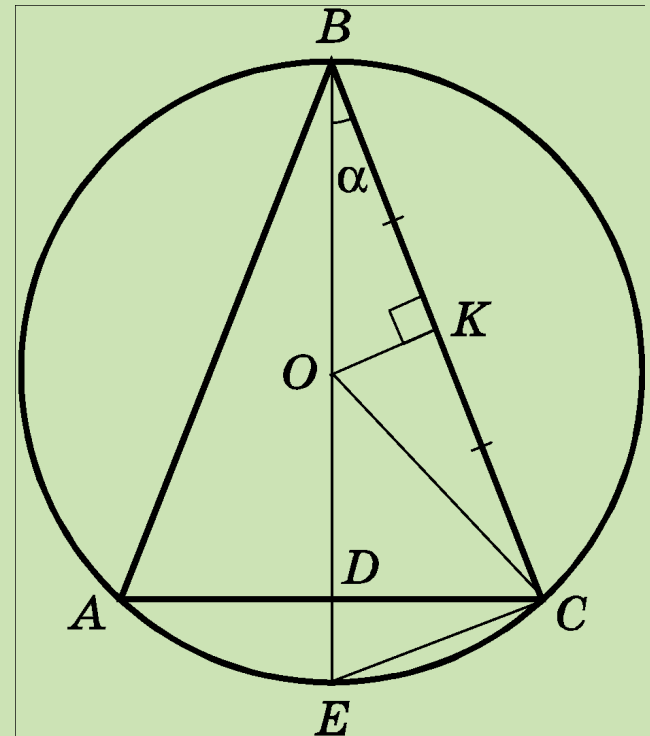
Способ 2

Пусть угол DBC равен α , тогда

$$\cos \alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Из треугольника OKB

$$R = OB = \frac{BK}{\cos \alpha} = 6,5 : \frac{12}{13} = \frac{169}{24}$$



Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 3

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

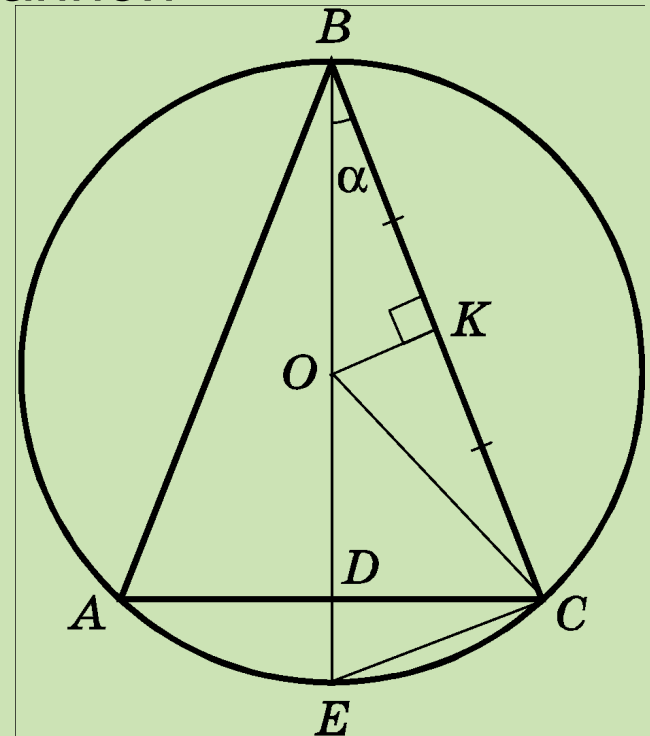
Из треугольника DBC имеем:

$$\sin \alpha = \frac{DC}{BC} = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Получим: $\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R,$

где $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{120}{169},$

$$2R = 10 : \frac{120}{169}, \quad R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$



Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

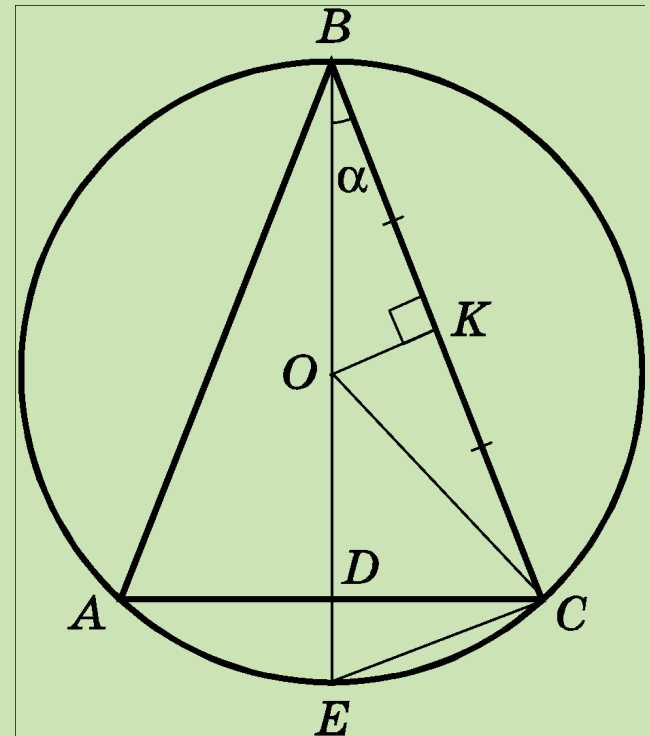
Решение.

Способ 4

Из подобия треугольников OBK и CBD имеем:

$$\frac{OB}{CB} = \frac{BK}{BD}, \quad \frac{R}{13} = \frac{6,5}{12}.$$

Отсюда $R = \frac{169}{24}$ см.



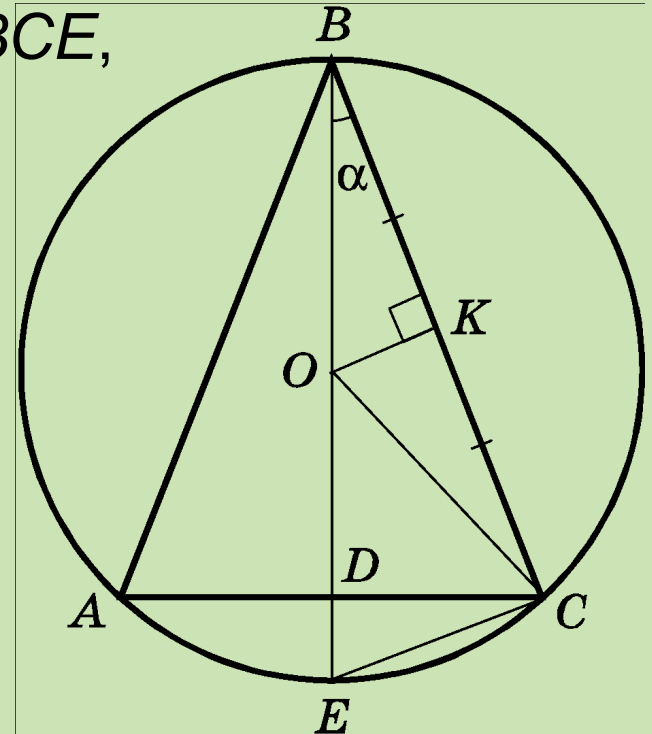
Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 5

Продолжим BD до пересечения с описанной окружностью, получим прямоугольный треугольник BCE , откуда $BC^2 = BD \cdot BE$, $13^2 = 12 \cdot 2R$.

Отсюда радиус равен $\frac{169}{24}$ см.



Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

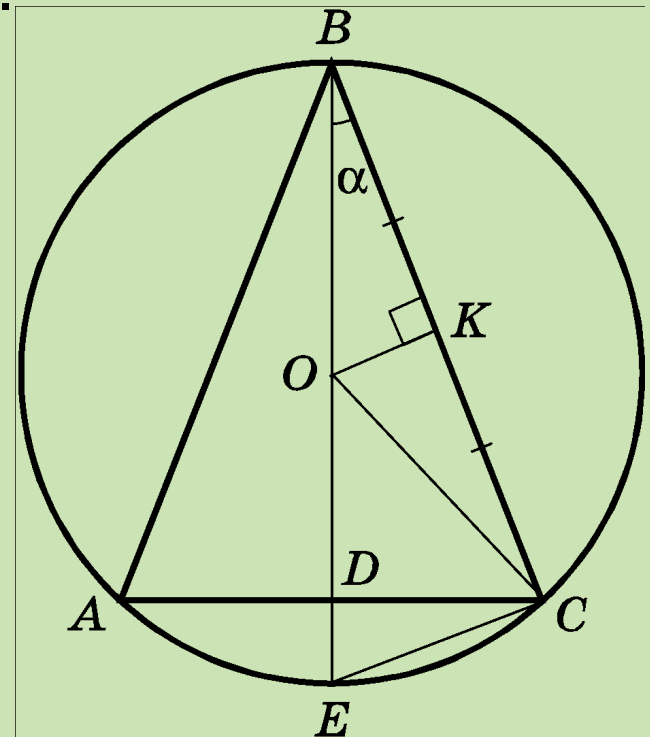
Решение.

Способ 6

По свойству хорд, пересекающихся внутри круга,
 $BD \cdot DE = AD \cdot DC$, $12 \cdot (2R - 12) = 5 \cdot 5$.

Решив это уравнение, получим:

$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$



Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

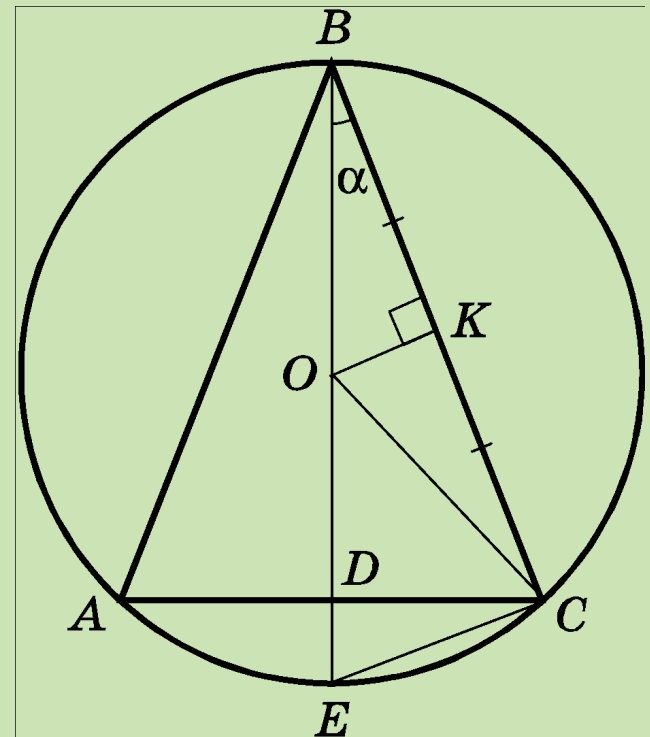
Способ 7

Внешний угол треугольника BOC равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Угол DOC имеет величину 2α .

$$OC = DC : \sin 2\alpha = 5 : \frac{120}{169}.$$

Имеем $R = \frac{169}{24}$ см.



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

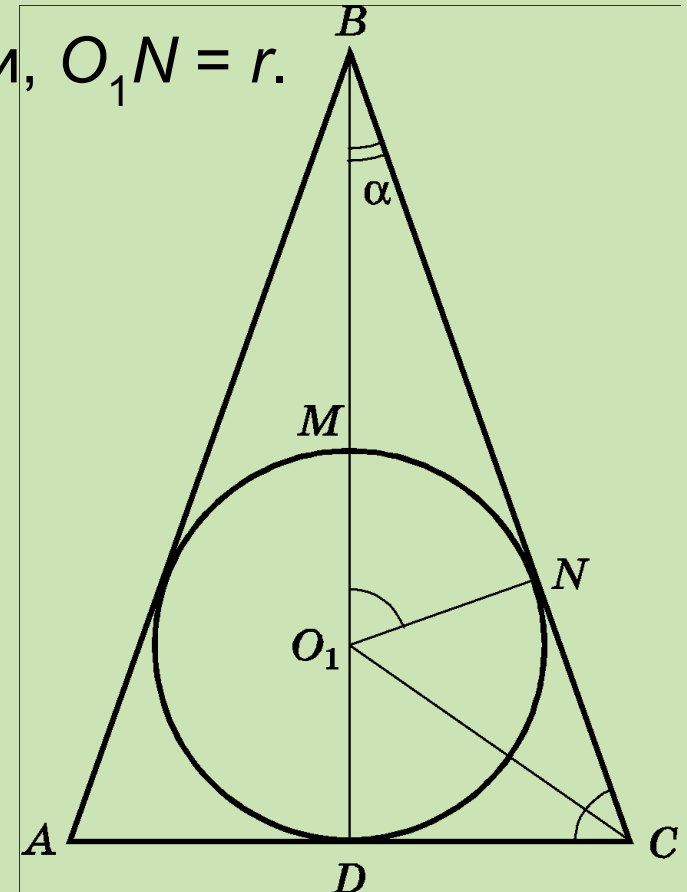
Способ 1

Точка O_1 – центр вписанной окружности, $O_1N = r$.

В треугольнике BNO_1

$$O_1N = r = BO_1 \cdot \sin \alpha,$$

$$\text{то есть } r = (12 - r) \cdot \frac{5}{13}, \quad r = \frac{10}{3} \text{ см.}$$



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 2

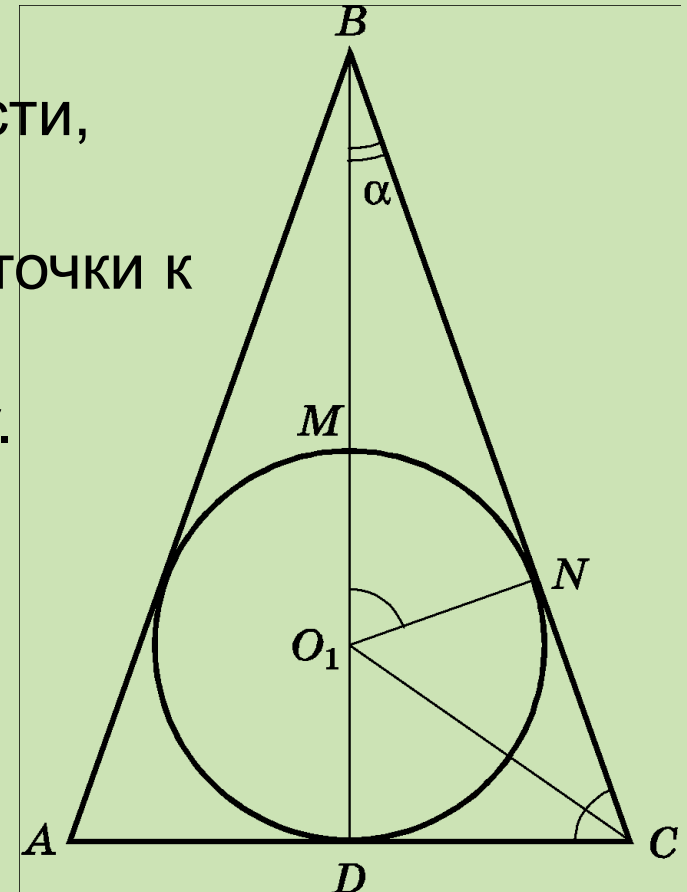
Точка O_1 – центр вписанной окружности, $O_1N = r$. $DC = CN = 5$ см, по свойству касательных, проведенных из одной точки к одной окружности.

$$BN = 13 - 5 = 8 \text{ см}, BO_1 = 12 - r.$$

По теореме Пифагора для треугольника BNO_1

$$r^2 = (12 - r)^2 - 8^2,$$

откуда $r = \frac{10}{3}$ см.



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

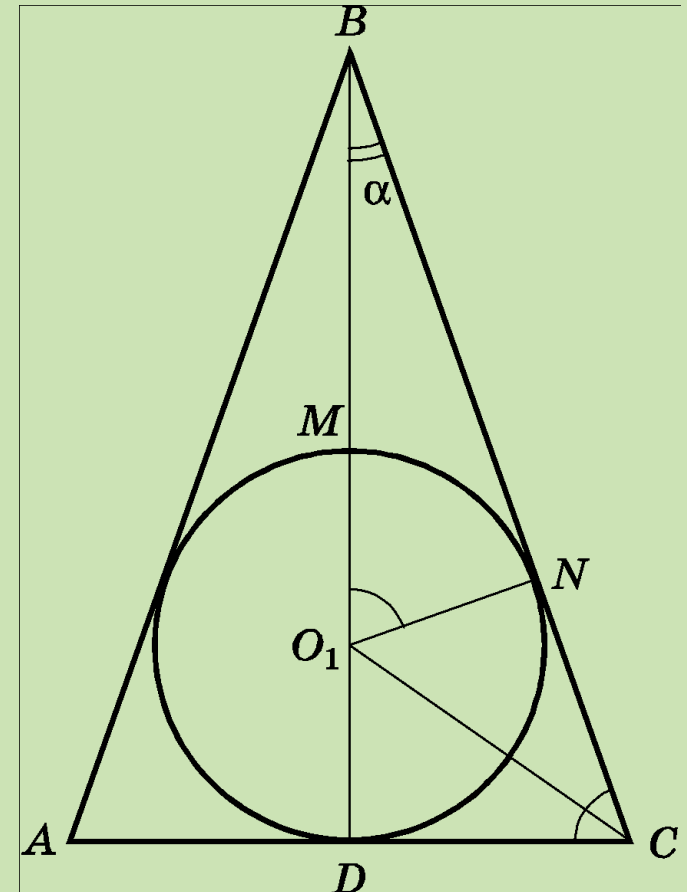
Решение.

Способ 3

$$r = \frac{2S}{a + b + c},$$

$$r = 2 \cdot \frac{60}{13 + 10 + 13},$$

$$r = \frac{10}{3} \text{ см.}$$



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

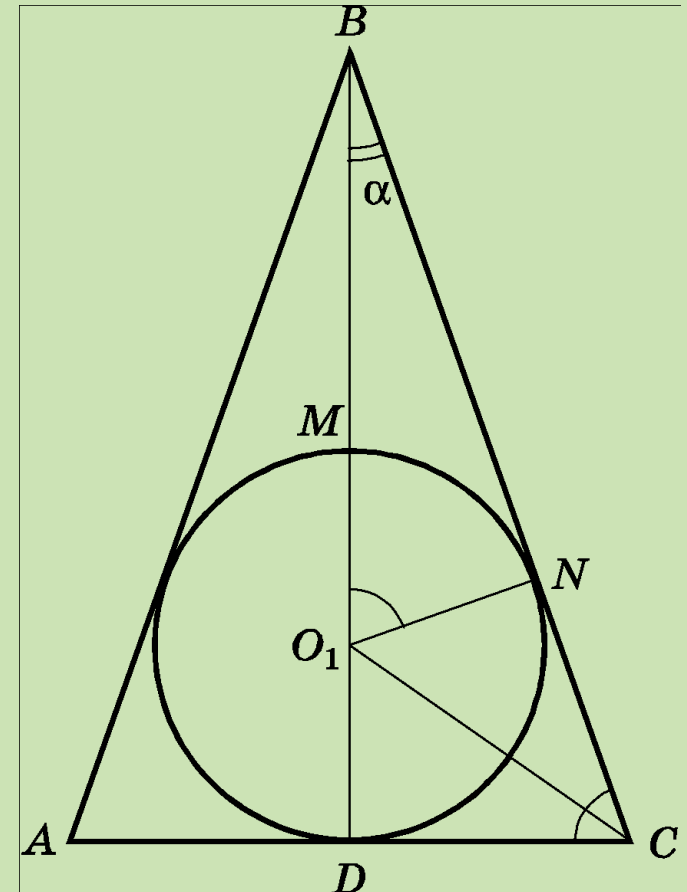
Способ 4

Из треугольника BNO_1 имеем:

$$r = O_1N = BN \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Из треугольника BDC $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$,

поэтому $r = 8 \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{3}$ см.



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

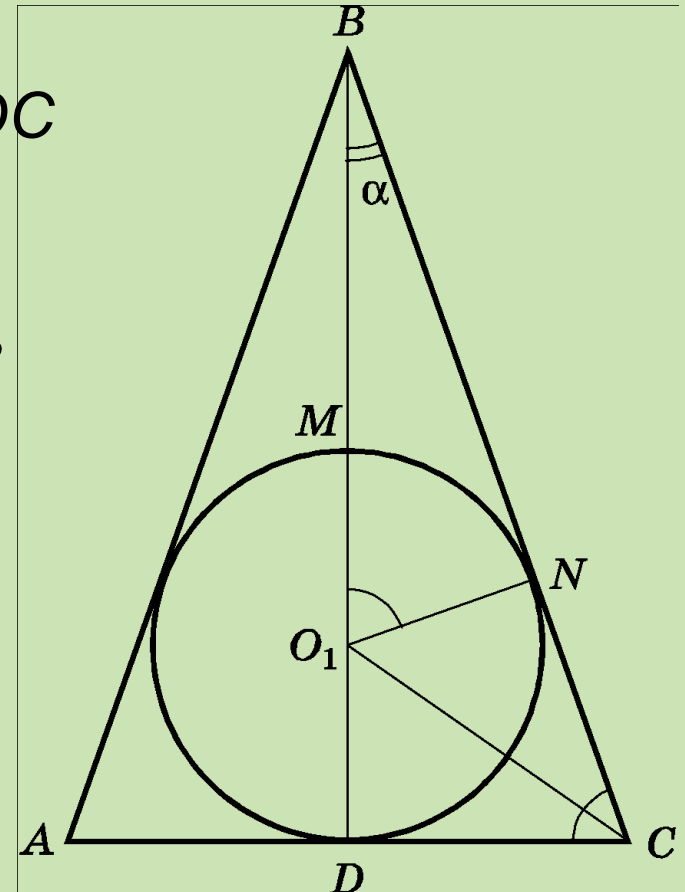
Решение.

Способ 5

Из подобия треугольников BNO_1 и BDC следует, что

$$\frac{BO_1}{BC} = \frac{BN}{BD}, \quad \frac{12-r}{13} = \frac{8}{12},$$

$$r = \frac{10}{3} \text{ см.}$$



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

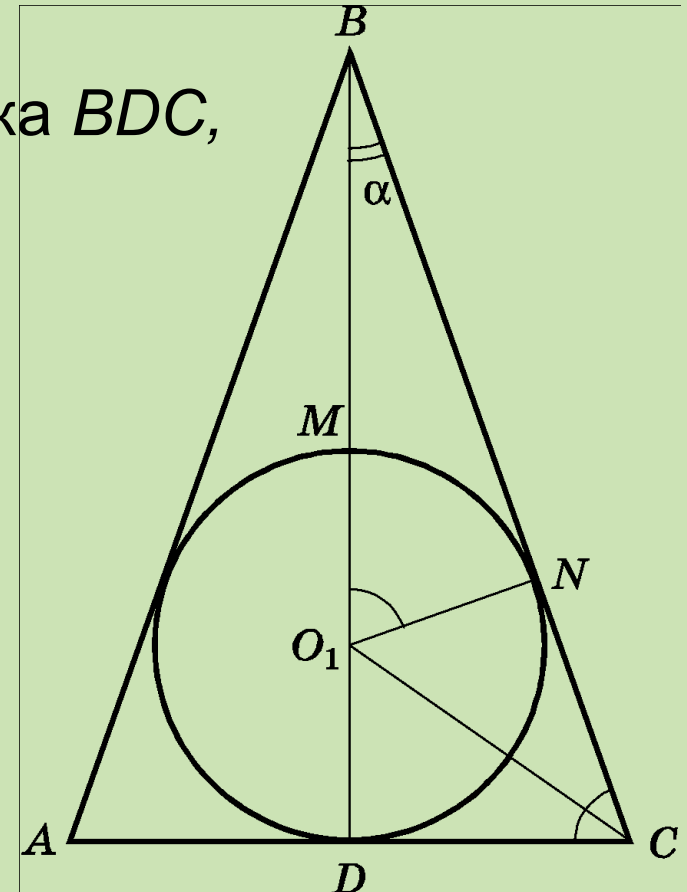
Решение.

Способ 6

По свойству биссектрисы треугольника BDC ,
имеем:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DO_1}{BO_1}, \quad \frac{5}{13} = \frac{r}{12-r},$$

тогда получим $r = \frac{10}{3}$ см.



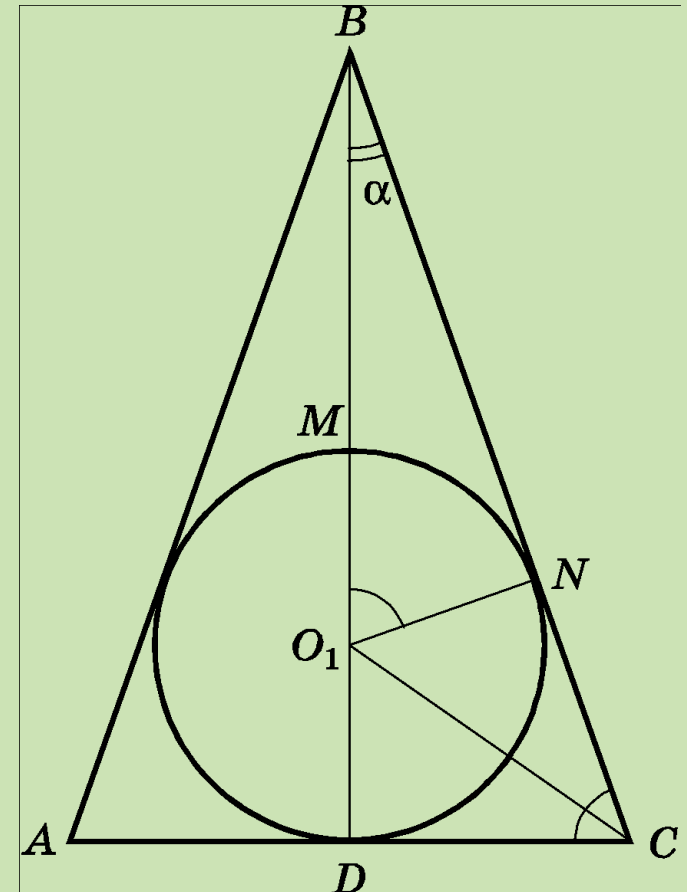
Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 7

По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к одной окружности: $BN^2 = BD \cdot BM$,
то есть $8^2 = 12 \cdot (12 - 2r)$.

Откуда $r = \frac{10}{3}$ см.



ЗАДАЧА 5

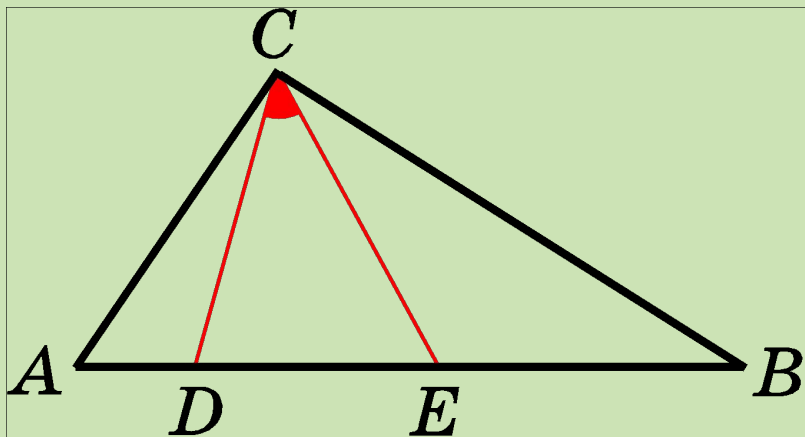
В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки E и D так, что $AE = AC$, $BD = BC$. Доказать, что $\angle DCE = 45^\circ$.

Способ 1.

Треугольники ACE и BCD — равнобедренные, поэтому

$$\angle CEA = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}, \angle CDE = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

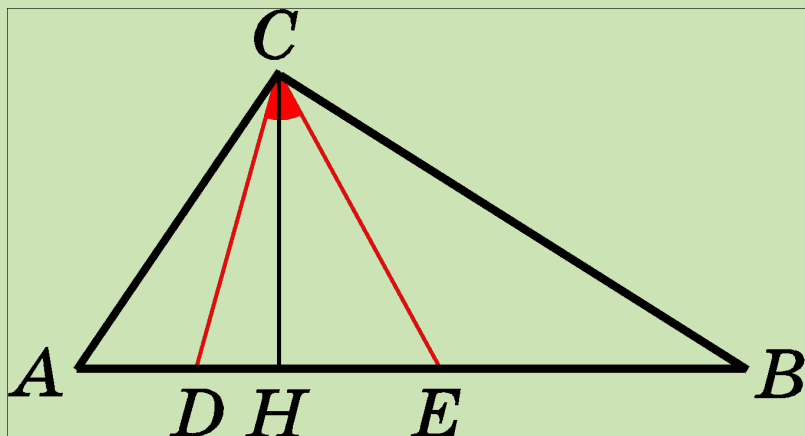
$$\text{Тогда } \angle DCE = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} \right) = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ.$$



Способ 2.

Проведем высоту CH . Так как треугольники ACH и BCH подобны, то $\angle A = \angle HCB$. Треугольник DBC — равнобедренный, поэтому $\angle CDB = \angle DCB$.

Тогда $\angle A + \angle ACD = \angle HCB + \angle DCH$, $\angle ACD = \angle DCH$, а CD — биссектриса угла ACH . Аналогично, CE — биссектриса угла HCB .



Следовательно,

$$\angle DCE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Способ 3.

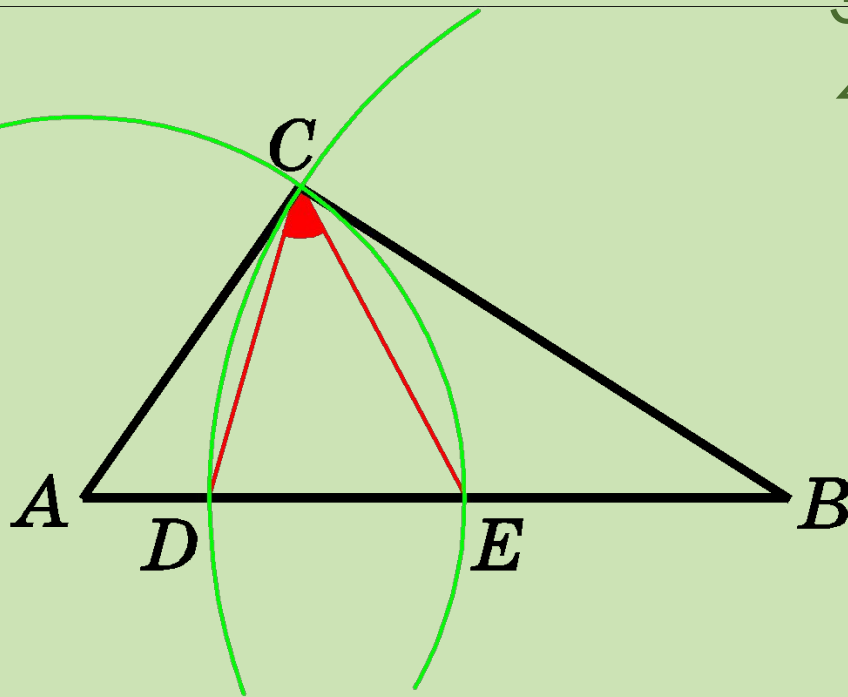
Проводим окружности с центрами в точках A и B . Тогда

$$\angle ECB = \frac{\angle A}{2}, \angle ACD = \frac{\angle B}{2},$$

$$\angle ECB + \angle ACD = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 45^\circ.$$

Значит,

$$\angle DCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

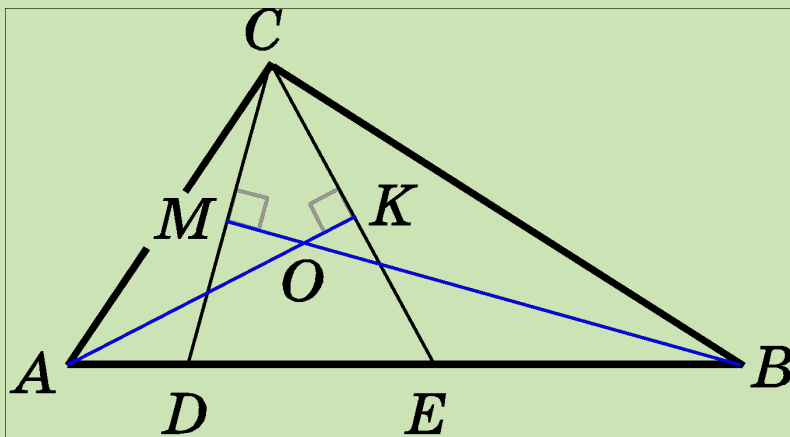


Способ 4.

1. Проведем биссектрисы углов A и B в равнобедренных треугольниках ACE и CBD . AK и BM являются высотами.

$$2. \angle AOB = \angle MOK = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.$$

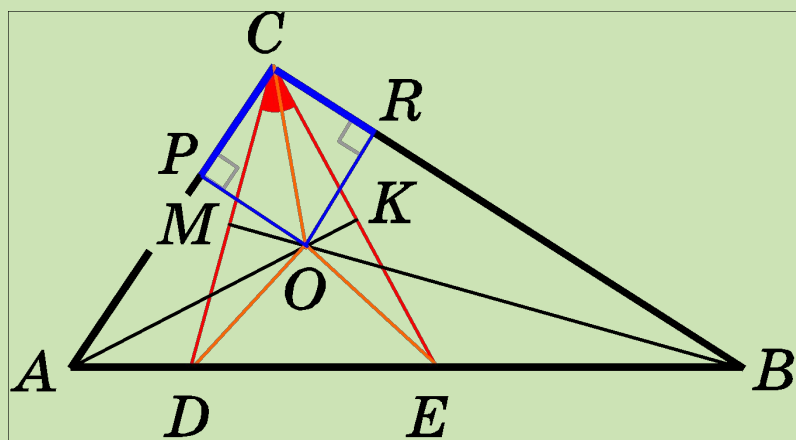
Тогда $\angle DCE = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.



Способ V

1. Проведем медианы AK и BM в равнобедренных треугольниках AEC и BDC .
2. Точка O — центр описанной окружности около треугольника DCE и центр вписанной в треугольник ACB окружности.
3. Проведем радиусы OP и OR . Четырехугольник $OPCR$ — квадрат со стороной r , тогда

$$OC = OD = OE = \sqrt{2}r.$$

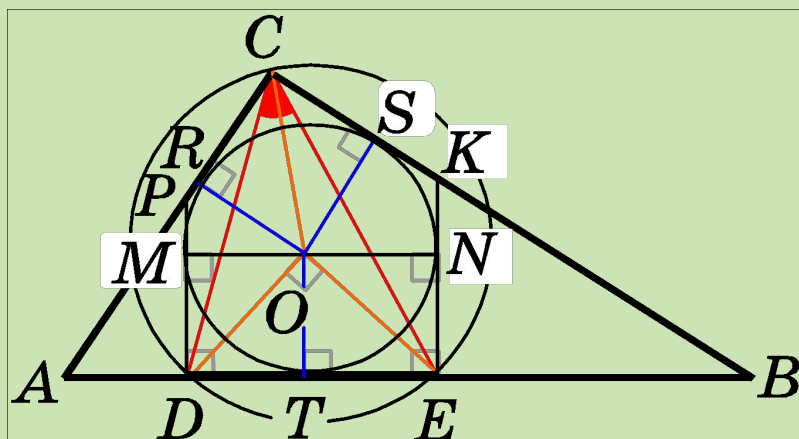


4. В треугольнике DOE
 $DE = 2r$, $DO^2 + OE^2 = DE^2$,
след., треугольник DOE —
прямоугольный
и $\angle DOE = 90^\circ$, значит,
 $\angle DCE = 45^\circ$.

Способ 6

1. Впишем окружность в треугольник ACB .
2. PM и KN — касательные к окружности, причем $PM \perp AB$ и $KN \perp AB$, $PM \cap AB = D$ и $KN \cap AB = E$.
3. Проведем радиусы $OT + OR = OS = r$, тогда

$$OC = OD = OE = \sqrt{2}r.$$



4. Опишем окружность около треугольника DCE с центром O и радиусом OC .

5. Тогда

$$\angle DOE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$$= \angle DE,$$

$$\angle DCE = \frac{\angle DE}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

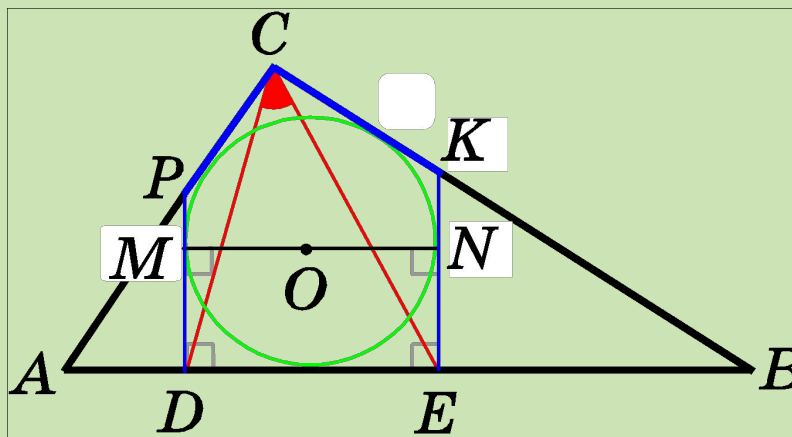
Способ 7.

1. Треугольники CKE и CPD — равнобедренные, $CK = KE$ и $DP = PC$.

$$2. \angle ECK = \frac{180^\circ - \angle CKE}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ + \angle B)}{2} = 45^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Аналогично, $\angle DCP = 45^\circ - \frac{\angle A}{2}$, тогда

$$\angle DCE = 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) - \left(45^\circ - \frac{\angle A}{2}\right) = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2} = 45^\circ.$$



ЗАДАЧА 6.

В прямоугольный треугольник вписана окружность, перпендикулярно гипотенузе проведены касательные, пересекающие гипотенузу в точках D и E . Под каким углом отрезок DE виден из вершины прямого угла?