Динамика вязкой жидкости

Вя́зкость (*вну́треннее тре́ние*) — свойство жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

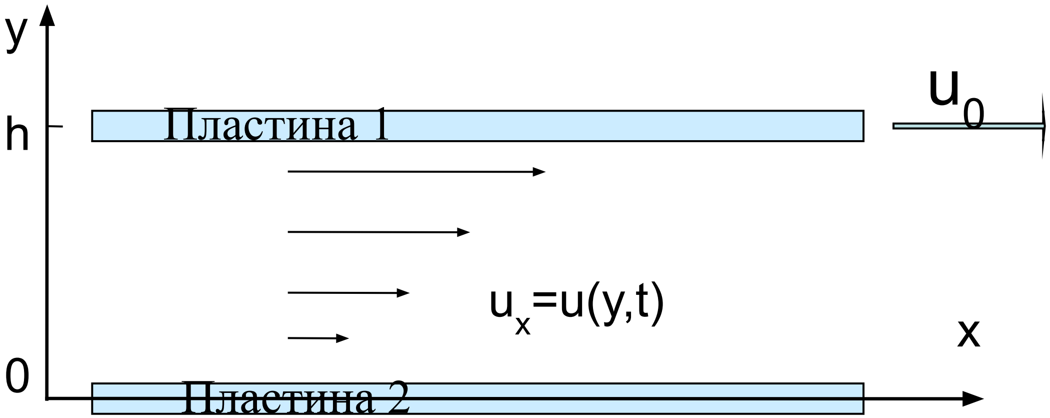
Движение вязкой **несжимаемой ньютоновской жидкости** описывается уравнением Навье-Стокса, в левой части которого стоит полная производная от скорости по времени, в правой сумма напряжений действующих сил (силы тяжести, силы давления, вязких сил)

Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\bar{u}$$

Простейшие примеры течений вязкой жидкости

I. Движение жидкости между плоскостями, одна из которых (пластина 1) движется со скоростью u_0



Течение стационарно, одномерно и зависит **только от y**

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\bar{u}$$

Проекция уравнения Навье -Стокса на ось x

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Проекция уравнения Навье-Стокса на ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно

I. Движение жидкости между двумя плоскостями (продолжение)

Решение: Из (2) $p = const$ $u = ay + b$

Граничные условия:

$u=u_0$ при $y=h$ $\Longrightarrow$ $a=u_0/h$

$u=0$ при $y=0$ $\Longrightarrow$ $b=0$

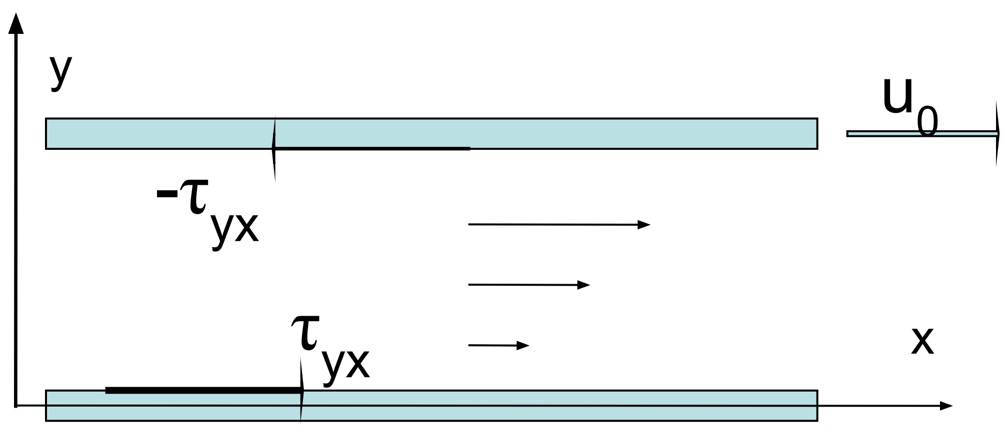
$$u = \frac{y}{h} u_0$$

Распределение скоростей между пластинами линейно

Сила трения, действующая на пластины

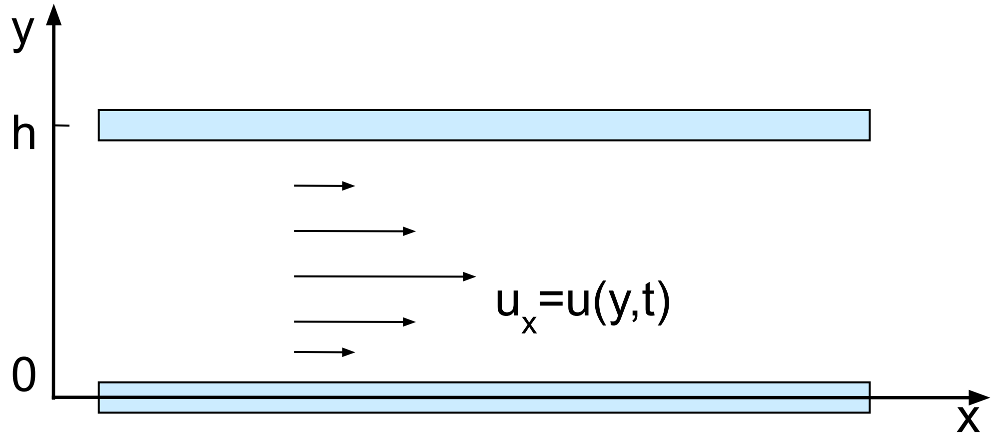
$$\tau_{yx}(y=o) = \bar{j}\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu \frac{u_0}{h}$$

$$\tau_{yx}(y=h) = (-\bar{j})\mu \left.\frac{u_0}{h}\right|_{y=h}$$



Суммарная сила на жидкость =0

II. Движение жидкости между двумя неподвижными плоскостями



Жидкость течет за счет силы - градиента давления dp/dx

Течение стационарно и одномерно, т.е. $u_y=0$ $u_x=u(y,t)$

Уравнение Навье Стокса на ось y : $$\frac{\partial p}{\partial y}=0 \Longrightarrow p=p(x)$$

Уравнение Навье Стокса на ось x : $$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \Longrightarrow$$

Левая часть ур. зависит только от y, а правая – только от x

Это выполняется только если dp/dx= const !

II. Движение жидкости между неподвижными плоскостями (продолжение)

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = const \quad \longrightarrow \quad u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + ay + b$$

Граничные условия:

u_x=0 при y=0, y=h $\longrightarrow$ b=0 $\quad a = -\frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx}$

Решение с учетом гран. условий

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h)$$

Течение имеет параболический профиль

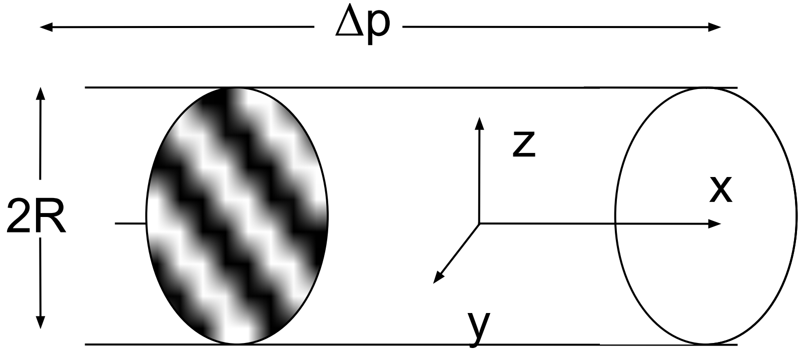
Средняя скорость

$$u_{x\text{сред}} = \frac{1}{h}\int_0^h u_x(y)dy = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

Сила, действующая на плоскость

$$\tau_{yx}(y=o) = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$

III. Течение вязкой жидкости по трубе



Течение направлено и однородно вдоль трубы – оси *x* u зависит лишь от радиуса.

$u_x = u(r)$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}$$

Проекция уравнения Н-С на ось y $\quad \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow$ Р не зависит от y

Проекция уравнения Н-С на ось z $\quad \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \Longrightarrow$ Р не зависит от z

Проекция уравнения Н-С на ось x $\quad \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta_{y,z} u_x \quad \Longrightarrow$ dp/dx=const=-Δp/l

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\mu \cdot l}$$

III а. Течение вязкой жидкости по трубе кругового сечения

В полярных координатах: r, θ, x

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u_x\right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

Решение

$$u_x = -\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2 + a\ln r + b$$

Скорость конечна во всем сечении трубы, поэтому a=0

Гран. Условие при r=R : u_x=0

$$b = \frac{\Delta p}{4\mu l}R^2$$

$$u_x = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)$$

Расход жидкости – масса жидкости, протекающая в единицу времени через сечение трубы

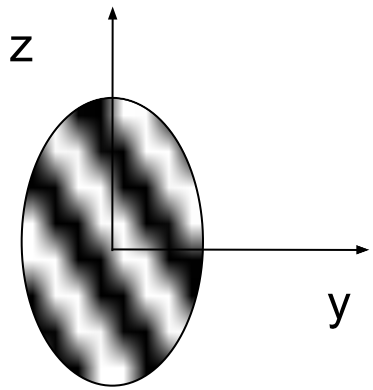
$$Q = \int_0^R 2\pi r u(r)dr = \frac{\pi\Delta p}{8\mu l}R^4$$

Формула Пуазейля

III б. Течение вязкой жидкости по трубе эллиптического сечения

Труба эллиптического сечения

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$



$$\frac{dp}{dx}=\mu\Delta_{y,z}u_x=\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

Общее решение

$$u_x=Ay^2+Bz^2+C$$

Решение должно удовлетворять гран. условию: u=0 на эллипсе, т.е. $\longrightarrow$

$$u_x=Ay^2+Bz^2+C=0$$

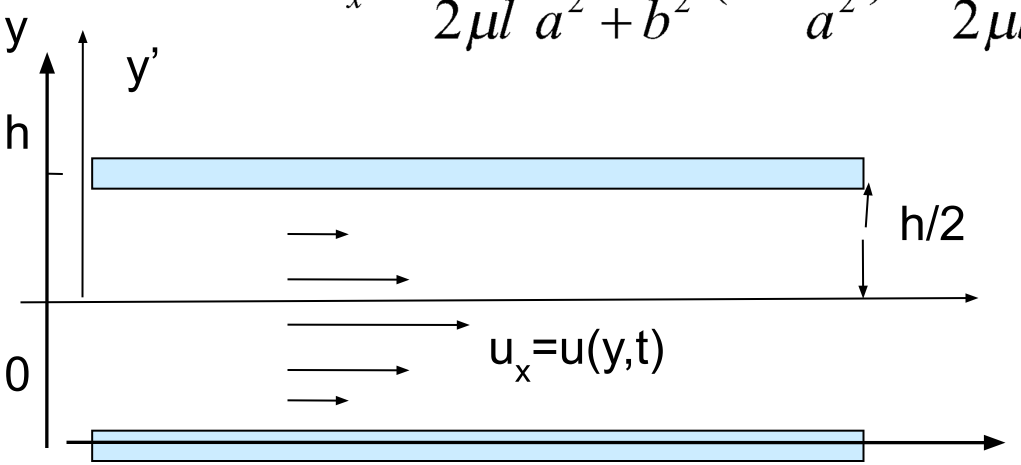
$$u_x=\frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$$

При b или a $\longrightarrow\infty$ переходим к случаю 2-х параллельных плоскостей

$$u_x=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2-r^2\right)$$

<u>Предельный переход от трубы эллиптического сечения к параллельным плоскостям (b>>a)</u>

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}(1-\frac{y^2}{a^2}) \approx \frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2b^2}{b^2}(1-\frac{y^2}{a^2}) = \frac{\Delta p}{2\mu l}a^2(1-\frac{y^2}{a^2})$$



Было решение для двух плоскостей

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h)$$

$$y' = y - h/2 \longrightarrow u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}\frac{h^2}{4}[1-\frac{y'^2}{(h/2)^2}]$$

Уравнение Навье –Стокса с потенциальными силами

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\bar{u}$$

$$\bar{F} = \nabla U$$

$$(\bar{u}\nabla)\bar{u} = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - [\bar{u}\cdot rot\bar{u}]$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = [\bar{u}\cdot rot\bar{u}] + \nu\Delta\bar{u}$$

Стационарное течение жидкости

Умножаем скалярно на элемент линии тока, dr // u

$$\nabla\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = [\bar{u}\cdot rot\bar{u}] + \nu\Delta\bar{u}$$

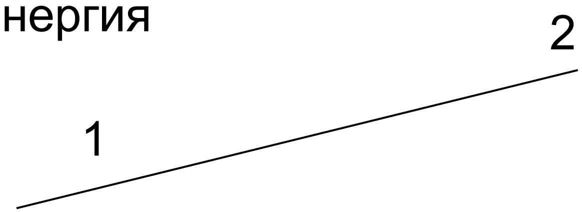
$$d\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = d\bar{r}\cdot\nu\Delta\bar{u}$$

$$d\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$

Работа сил вязкости

Удельная механическая
энергия единицы массы

Т.о. изменение механической энергии жидкости вдоль линий тока равно работе вязких сил dA – диссипируемая энергия



$$dA_\nu = -d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$

Для идеальной жидкости (вязкость равна нулю, т. е. нет внутреннего трения), изменение механической энергии вдоль линии тока равно нулю.