Свойства биномиальных коэффициентов

Цель: познакомиться со свойствами биноминальных коэффициентов;

научить применять формулу бинома Ньютона при возведении в степень двучлена;

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + $$
$$+ C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^n$ -биномиальные коэффициенты

Основные свойства биномиальных коэффициентов:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b +$$
$$+ C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^n$ -биномиальные коэффициенты

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b +$$
$$+ C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^n$ -биномиальные коэффициенты

Бином Ньютона.

Бином (лат. ***bis − два, nomen - имя***) или двучлен — частный случай многочлена (полинома), который состоит из двух слагаемых одночленов (мономов).

Например:

$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3b - 4b^3$

Степени суммы двух чисел:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2 b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3 b + 6\cdot a^2 b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$$

$$(a+b)^5 = 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4 b^1 + 10\cdot a^3 b^2 + 10\cdot a^2 b^3 + 5\cdot a^1 b^4 + 1\cdot b^5$$

Составим таблицу из коэффициентов в записанных суммах

Составленная таблица получила название

Треугольник Паскаля

$n = 0;$	1
$n = 1;$	1 1
$n = 2;$	1 2 1
$n = 3;$	1 3 3 1
$n = 4;$	1 4 6 4 1
$n = 5;$	1 5 10 10 5 1
$n = 6;$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7;$	1 7 21 35 35 21 7 1

5-я строка ($n = 4$) получается так:

$1,\quad 4 = 1 + 3,\quad 6 = 3 + 3,\quad 4 = 3 + 1,\quad 1$

Разложение бинома с помощью треугольника Паскаля.

Пример 1

Коэффициенты 7 строки:
1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1

$$(a+b)^7 = 1\cdot a^7 + 7\cdot a^6\cdot b^1 + 21\cdot a^5\cdot b^2 + 35\cdot a^4\cdot b^3 +$$

$$+35\cdot a^3\cdot b^4 + 21\cdot a^2\cdot b^5 + 7\cdot a^1\cdot b^6 + 1\cdot b^7 =$$

$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Пример 2

Коэффициенты 7 строки:
1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1

$$(1+x)^7 = 1\cdot 1^7 + 7\cdot 1^6\cdot x^1 + 21\cdot 1^5\cdot x^2 + 35\cdot 1^4\cdot x^3 +$$

$$+35\cdot 1^3\cdot x^4 + 21\cdot 1^2\cdot x^5 + 7\cdot 1^1\cdot x^6 + 1\ \cdot x^7 =$$

$$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$$

Пример 3

Коэффициенты 4 строки:
1; 4; 6; 4; 1

$$(2x+3)^4 = 1\cdot(2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot 3^1 + 6\cdot(2x)^2\cdot 3^2 +$$

$$+4\cdot(2x)^1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^4 =$$

$$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

Биномиальные коэффициенты

В основе построения треугольника Паскаля лежит свойство сочетаний

$$C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}.$$

Поэтому коэффициенты разложения степени бинома можно записать с помощью числа сочетаний

Степени суммы двух чисел:

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

Заметим, что

$C_1^0 = 1; \quad C_1^1 = 1$ **и** $a^0 = 1; \quad b^0 = 1,$ *тогда*

$$\boxed{(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1}$$

Аналогично: $C_2^0 = 1; \quad C_2^1 = 2; \quad C_2^2 = 1$

$$\boxed{(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2}$$

$$C_3^0 = 1; \quad C_3^1 = 3; \quad C_3^2 = 3; \quad C_3^3 = 1$$

$$\boxed{(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3}$$ **и т. д.**

Правило Паскаля:

$$C_{m+1}^{n} = C_{m}^{n-1} + C_{m}^{n}$$

Биноминальные коэффициенты:

$$C_{m}^{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_{m}^{0} = C_{m}^{m} = 1; \qquad C_{m}^{1} = C_{m}^{m-1} = m;$$

$$C_{m+1}^{n} = C_{m}^{n-1} + C_{m}^{n}; \qquad C_{m-1}^{n} + C_{m-1}^{n-1} + C_{m}^{n};$$

$$C_{m}^{0} + C_{m}^{1} + \ldots + C_{m}^{m-1} + C_{m}^{m} = 2^{m}$$

Бином Ньютона:

$$(a+b)^m =$$

$$= C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + \ldots + C_m^{m-1} a^1 b^{m-1} + C_m^m a^0 b^m$$

Бином Ньютона – **формула, выражающая целую положительную степень суммы двух слагаемых (двучлена, бинома) через степени этих слагаемых. Частными случаями бинома Ньютона являются формулы квадрата и куба суммы двух слагаемых *a* и *b***

Применение формулы бинома Ньютона

Пример 4

$$(2a-\frac{1}{2})^5=(2a)^5+C_5^1(2a)^4(-\frac{1}{2})+C_5^2(2a)^3(-\frac{1}{2})^2+$$

$$+C_5^3(2a)^2(-\frac{1}{2})^3+C_5^4(2a)^1(-\frac{1}{2})^4+(-\frac{1}{2})^5=$$

$$=32a^5-40a^4+20a^3-5a^2+\frac{5}{8}a-\frac{1}{32}$$

Самостоятельная работа

Задание 1. Найти разложение бинома

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b +$$
$$+C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^n$ -биномиальные коэффициенты

Задание 2.

У многочлена P(x) найдите коэффициент при:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b +$$
$$+C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ -биномиальные коэффициенты

Задание 3.

$4P_3 + 3A_{10}^2 - C_5^2$

Критерии оценки выполнения работы

Оценка	Число заданий, необходимое для получения оценки
«3» (удовлетворительно)	3
«4» (хорошо)	4
«5» (отлично)	5