Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Упражнение

Соедините левую и правую части формул так, чтобы получились верные формулы преобразования тригонометрических функций.

$$\sin(s+t) + \sin(s-t) = 2\sin s \cdot \cos t$$

$$\sin(s+t) = \boldsymbol{\sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t}$$

$$\sin(s-t) = \boldsymbol{\sin s \cdot \cos t - \cos s \cdot \sin t}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad = 2\sin s \cdot \cos t$$

$$x = s + t \qquad y = s - t$$

$$x + y = s + t + s - t = 2s \Rightarrow s = \frac{x+y}{2} \qquad x - y = s + t - (s - t) = 2t \Rightarrow t = \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin 4x + \sin 2x = 2\sin\frac{4x+2x}{2}\cdot\cos\frac{4x-2x}{2} = 2\sin 3x\cdot\cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin x - \sin y = \sin x + (-\sin y)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x+(-y)}{2}\cdot\cos\frac{x-(-y)}{2} = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\sin 3x - \sin 5x = 2\sin\frac{3x-5x}{2}\cdot\cos\frac{3x+5x}{2} = -2\sin x\cdot\cos 4x$$

$$cos(s+t)+cos(s-t)=2\cos s\cdot\cos t$$

$$cos(s+t)=\cos s\cdot\cos t-\sin s\cdot\sin t$$

$$cos(s-t)=\cos s\cdot\cos t+\sin s\cdot\sin t$$

$$+ \qquad\qquad\qquad =2\cos s\cdot\cos t$$

$$x=s+t \qquad y=s-t$$

$$x+y=s+t+s-t=2s\Rightarrow s=\frac{x+y}{2} \qquad x-y=s+t-(s-t)=2t\Rightarrow t=\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos 20° + \cos 40° = 2\cos\frac{20° + 40°}{2} \cdot \cos\frac{20° - 40°}{2} = 2\cos 30° \cdot \cos(-10°)$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 20° + \cos 40° = \sqrt{3}\cos 10°$$

$$\cos(s+t) - \cos(s-t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t - (\cos s \cdot \cos t + \sin s \cdot \sin t) =$$

$$= \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t - \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t = -2\sin s \cdot \sin t$$

$$x = s + t \qquad y = s - t$$

$$x + y = s + t + s - t = 2s \Rightarrow s = \frac{x+y}{2} \qquad x - y = s + t - (s - t) = 2t \Rightarrow t = \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

- $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{20} = -2\sin\frac{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{20}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{20}}{2} = 2\sin\frac{3\pi}{40} \cdot \sin\frac{\pi}{40}$

$$\left.\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}\right\}$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Пример:

- Решить уравнение $\boldsymbol{sin\,17x = sin\,7x}$.

Решение:

$-\qquad = 0$

$sin\,x - sin\,y = 2\,sin\frac{x-y}{2}\cdot cos\frac{x+y}{2}$

$2\,sin\frac{17x-7x}{2}\cdot cos\frac{17x+7x}{2} = 0$

$2\,sin\,5x\cdot \boldsymbol{cos\,12x} = 0$

$= 0$ или $= 0$

$5x = \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi k}{5}, k \in Z$

$12x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{12}, k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{12}, k \in Z$.

Пример:

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

- Решить уравнение $\boldsymbol{\cos 3x = \sin x}$.

Решение:

$$\cos 3x - \qquad = 0$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$- \qquad = 0$$

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$= 0$$

ил
и

$$= 0$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in Z \qquad 2x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \qquad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Пример:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

- Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

Решение:

$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0$

$\boldsymbol{\sin 2x\,(2\cos x + 1)} = 0$

$= 0$ или $= 0$

$2x = \pi k, k \in Z$ $\quad\quad$ $\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ $\quad\quad$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi k}{2}, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$$

$$a > 0, b > 0$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$x^2 + y^2 = 1; \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right)$ – лежит на числовой окружности

$$\frac{a}{c} = \cos t\,; \ \frac{b}{c} = \sin t$$

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \cdot \cos t \cdot \sin x + c \cdot \sin t \cdot \cos x =$$

$$= c \cdot \sin(x + t)$$

$$a \cdot \sin x - b \cdot \cos x$$

$$a > 0, b > 0$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$x^2 + y^2 = 1; \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right)$ – лежит на числовой окружности

$$\frac{a}{c} = \cos t\,; \ \frac{b}{c} = \sin t$$

$$a \cdot \sin x - b \cdot \cos x = c \cdot \cos t \cdot \sin x - c \cdot \sin t \cdot \cos x =$$

$$= c \cdot \sin(x - t)$$

Пример:

- Преобразовать в произведение выражение $5\,sin\,x - 12\,cos\,x$.

Решение:

$a = 5, b = 12, c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

$$5\,sin\,x - 12\,cos\,x = 13\left(\frac{5}{13}sin\,x - \frac{12}{13}cos\,x\right)$$

$$cos\,t = \frac{5}{13}; sin\,t = \frac{12}{13} \Rightarrow t = arcsin\frac{12}{13}$$

$$5\,sin\,x - 12\,cos\,x = 13\,sin(x - t) = 13\,sin\left(x - arcsin\frac{12}{13}\right)$$

Пример:

- Решить уравнение $5\,sin\,x - 12\,cos\,x = \mathbf{13}$.

Решение:

$5\,sin\,x - 12\,cos\,x = \boldsymbol{13\,sin(x - t)}$

$$sin(x - t) = 1$$

$x - t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x = t + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$t = arcsin\frac{12}{13} \Rightarrow x = arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.