

### Лекция №4

### *Колебания и волны*

к.ф.-м.н., доцент ШЕН  
Стеблий Максим Евгеньевич

# Гармонические колебания

**Колебания** — это повторяющийся во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

**Гармонические колебания** — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массы  $m$ , подвешенного на пружине. В состоянии равновесия можно записать баланс сил:

$$mg = k\Delta l_0$$

Отклонение шарика от положения равновесия описывается изменением координаты  $x$ . В таком случае результирующая сила:

$$f = mg - k(\Delta l_0 + x) \rightarrow f = -kx$$

Для описания движения маятника запишем второй закон Ньютона:

$$\sum f_i = ma$$
$$-kx = ma$$

Представим ускорение, как вторую производную от координаты по времени и обозначим константы, как  $\omega^2$ :

$$-kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad | :m$$

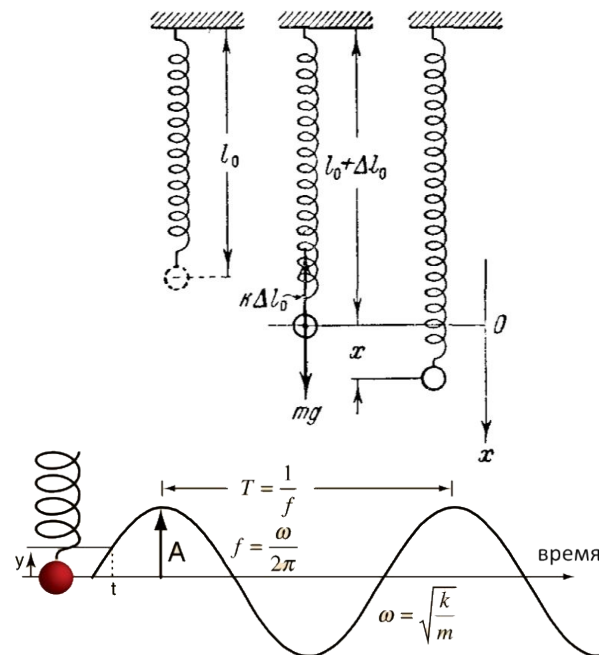
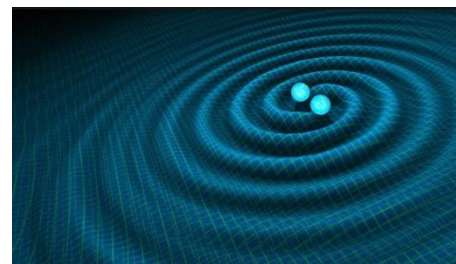
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \left( \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Движение шарика описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Решением такого уравнения может являться уравнение вида:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Смещение шарика происходит по закону синуса (или косинуса), то есть является гармоническим колебанием.



$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

**Отклонение** от положения равновесия.

**Амплитуда** – величина наибольшего отклонения от положения равновесия.

**Фаза** – аргумент колебательного процесса, являющийся функцией времени.

**Начальная фаза** – значение фазы в момент времени  $t=0$

# Гармонические колебания

Так как косинус – периодическая функция, то состояние системы будет повторяться через некоторый промежуток времени, называемый периодом.

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad [\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

**Период (T)** – время одного полного колебания. Величина, описывающая периодический процесс и численно равная времени, за которое система дважды окажется в одном и том же состоянии.

Единица измерения **[с]**.  
Для описания периодических процессов вводится величина обратная периоду – частота.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

**Частота** – физическая величина, характеристика периодического процесса, равна количеству повторений в единицу времени.  
Единица измерения - **[Гц]**.

Используя определение периода можно определить ранее введенную величину  $\omega$ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \omega_0 = 2\pi\nu$$

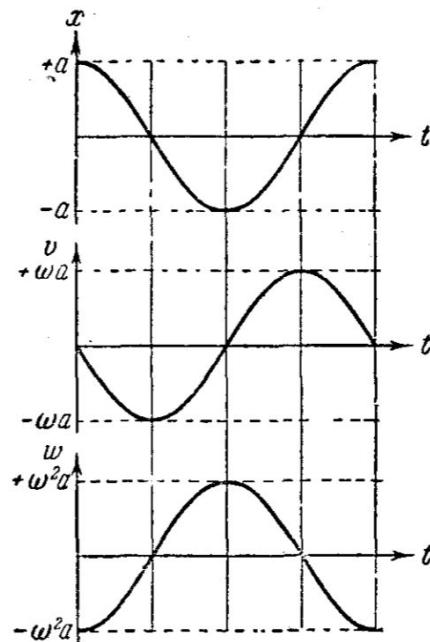
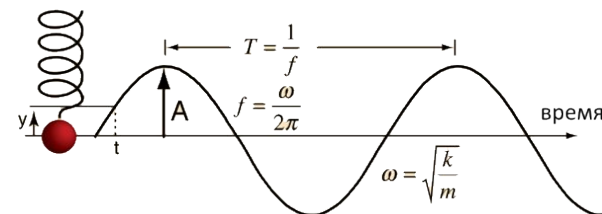
**Циклическая частота** – число колебаний за  $2\pi$  секунд. При равномерном вращательном движении совпадает с угловой скоростью. Единица измерения - **[Гц]**.

Продифференцировав по времени уравнение описывающее смещение, получим выражение для скорости:

Продифференцировав по времени уравнение описывающее скорость, получим выражение для ускорения:

Скорость опережает смещение на  $\pi/2$ .

Ускорение и смещение находятся в противофазе -  $\pi$ .



$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$$

**Математический маятник** — осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения.

Отклонение от положения равновесия характеризуется углом  $\phi$ , образованным нитью с вертикалью. При отклонении от положения равновесия возникает вращательный момент  $M$ , равный:

$$M = -mgl \sin \phi$$

Момент силы  $M$  направлен так, чтобы вернуть систему в состояние равновесия. В данном случае на маятник действует **квазиупругая сила**. С силой упругости общее только то, что стремятся вернуть систему в состояние равновесия.

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения с учетом того, что угловое ускорение  $\beta$  можно представить, как вторую производную по времени от угла поворота:

$$M = \beta I \rightarrow M = \ddot{\phi} I = \ddot{\phi} m l^2$$

$$m l^2 \ddot{\phi} = -mgl \sin \phi \rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0$$

Рассматривая колебания с малым углом отклонения, можно упростить уравнение:

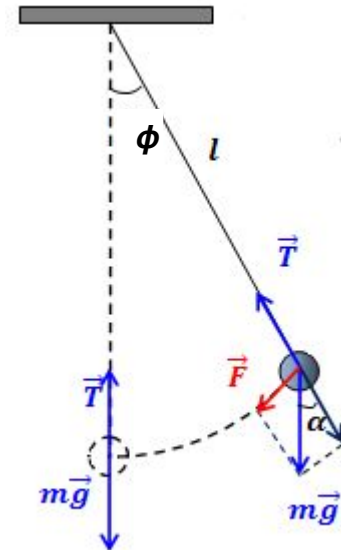
$$\sin \phi \approx \phi \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad - \text{собственная частота.}$$

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$$

Движение маятника описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Решением такого уравнения может являться уравнение вида:

$$\phi = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Отклонения маятника происходят по закону синуса (или косинуса), то есть является гармоническим колебанием.



Определи период колебаний математического маятника:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{1}{T}$$

$$2\pi\nu = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Период определяется только длиной маятника и не зависит ни от массы ни от величины отклонения (в пределах малых углов).

# Физический маятник

**Физический маятник** — осциллятор, представляющий собой твёрдое тело, совершающее колебания в поле каких-либо сил относительно точки, не являющейся центром масс этого тела.

В отличие от случая математического маятника, массу такого тела нельзя считать

Рассматривая твёрдое тело вводится понятие центра инерции (центр масс). Для определения его положения необходимо разбить тело на элементарные объёмы с массой  $m_i$  и радиус-вектором  $r_i$ .

**Центром инерции** называется точка, определяемая следующим образом

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_N r_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{m}$$

**Центр инерции** твёрдого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил. В однородном поле вращательный момент сил скомпенсирован относительно центра инерции.

При отклонении от положения равновесия на математический маятник будет действовать момент сил:

$$M = -mgl \sin \varphi$$

где  $l$  — расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника.

$$M = \beta I \rightarrow M = \beta I$$

$$I \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0$$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

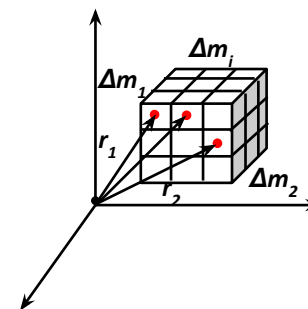
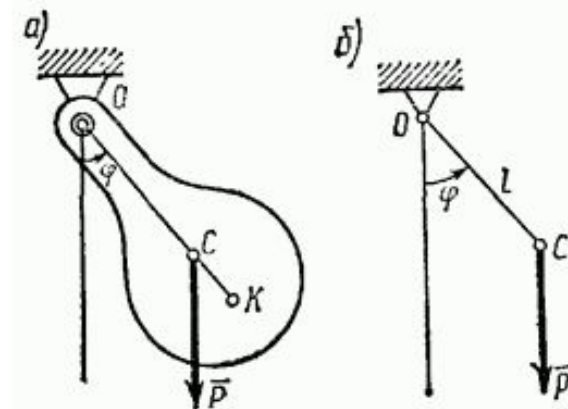
$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Из полученных уравнений следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника и момента инерции относительно оси вращения.

Оценим период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

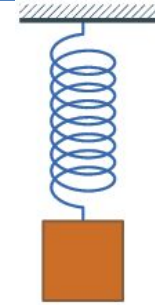


Из полученного результата следует, что данный физический маятник имеет период колебаний такой же, как и математический маятник с длиной:

$$l_{прив} = \frac{I}{ml}$$

Эта величина называется **приведенной длиной**. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качения физического маятника.

# Затухающие колебания



Гармонические колебания описывались действием только квазиупругих сил. Если в системе присутствуют диссипативные силы, то колебания со временем будут затухать.

Рассмотрим свободные (нет внешнего периодического воздействия) затухающие колебания. Пусть силы сопротивления зависят от скорости движения осциллятора (например силы сопротивления воздуха):

где  $r$  – коэффициент сопротивления. Тогда второй закон Ньютона запишем в виде:

$$ma = \sum f_i \rightarrow m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad \left( 2\beta = \frac{r}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right) \quad \text{Переобозначим константы.}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

От случая гармонического осциллятора решение будет отличаться переменной, зависящей от времени, амплитудой:

$$x = a(t) \cos(\omega t + \alpha)$$

Для нахождения значений функции  $a(t)$  и значения частоты  $\omega$  подставим это решение в исходное уравнение.

$$\ddot{x} = \ddot{a}(t) \cos(\omega t + \alpha) - a\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{x} = \ddot{a}(t) \cos(\omega t + \alpha) - 2a\omega \sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Проведем простые преобразования:

$$\ddot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2a\omega \sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + 2\beta\dot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2\beta a\omega \sin(\omega t + \alpha) + \omega_0^2 a \cos(\omega t + \alpha) = 0$$

$$(\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + \omega_0^2 a - a\omega^2) \cos(\omega t + \alpha) - (2a\omega + 2\beta a\omega) \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

$$(\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + a(\omega_0^2 - \omega^2)) \cos(\omega t + \alpha) - 2\omega(a + \beta a) \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

Такое уравнение равно 0 при любых значениях  $t$ , только при условии:

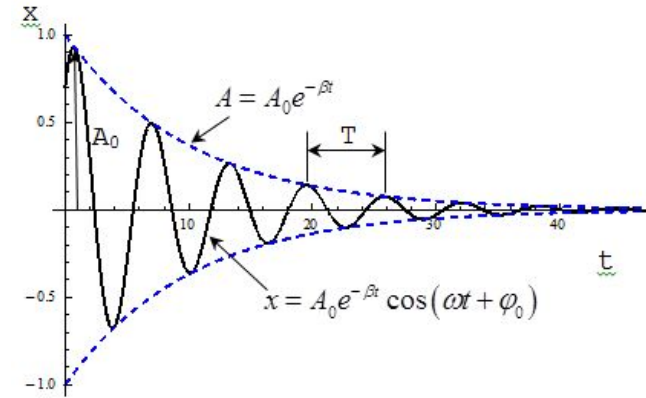
$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + a(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

$$\ddot{a} + \beta a = 0$$

Из второго уравнения найдем зависимость амплитуды от времени:

$$\frac{da}{dt} = -\beta a \rightarrow \frac{da}{a} = -\beta dt \rightarrow \ln a = -\beta t + C$$

$$a = e^{-\beta t} e^C \rightarrow \text{при } t = 0: a_0 = e^C \rightarrow a = a_0 e^{-\beta t}$$



Подставим это значение в первое условие и найдем значение частоты колебаний:

$$\ddot{a} = -\beta a; \quad \ddot{a} = \beta^2 a$$

$$\beta^2 a - 2\beta^2 a + a(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

$$-\beta^2 + \omega_0^2 - \omega^2 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos[(\omega_0^2 - \beta^2)t + \alpha]$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

# Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – колебания, которые возникают в системе под действием внешней периодической силы.

$$f = F_0 \cos \omega t$$

Рассмотрим систему в которой так же присутствует квазиупругая и диссипативная сила. Тогда второе уравнение Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}; \quad \beta = \frac{r}{2m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Колебания описываются неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение такого уравнения может быть найдено, как сумма решений однородного и частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного было найдено ранее:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

Частное решение неоднородного может быть найдено в виде:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

Решением этой системы уравнений является функция:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

Рассмотрим амплитуду вынужденных колебаний:

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Найдем максимальное значение амплитуды – резонансное:

$$\frac{d}{dt} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = 0$$

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2 \omega = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\max: \omega = 0 \quad \min: \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

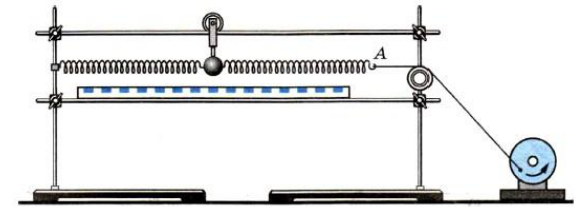
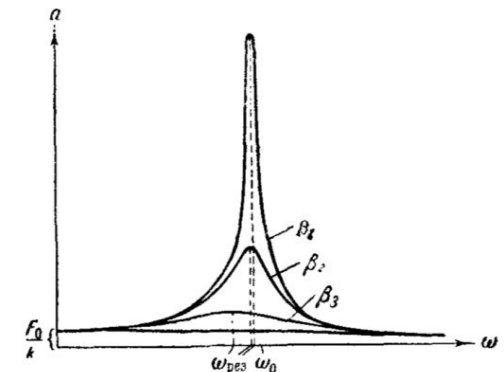
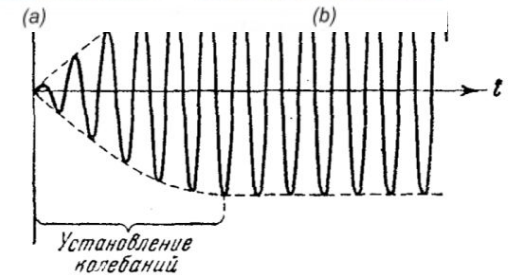
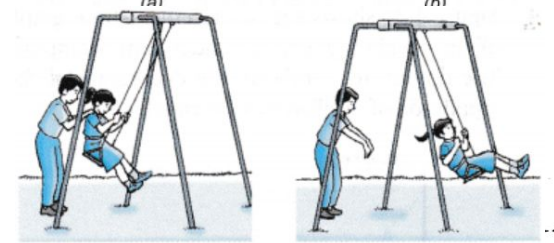


Рис. 3.12



фыва

$$\varphi = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

$$M = mgl$$



$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{1}{T}$$

$$2\pi\nu = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$