



Дифференциальное исчисление функций одной переменной



Основные вопросы:

- Понятие **производной**.
Геометрический и физический смысл.
- Понятие **сложной функции**.
Производная **сложной функции**.
- Производные **высших порядков**.
- Исследование функций с помощью производной



Определение.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \neq 0$, называется **производной данной функции и имеет вид:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



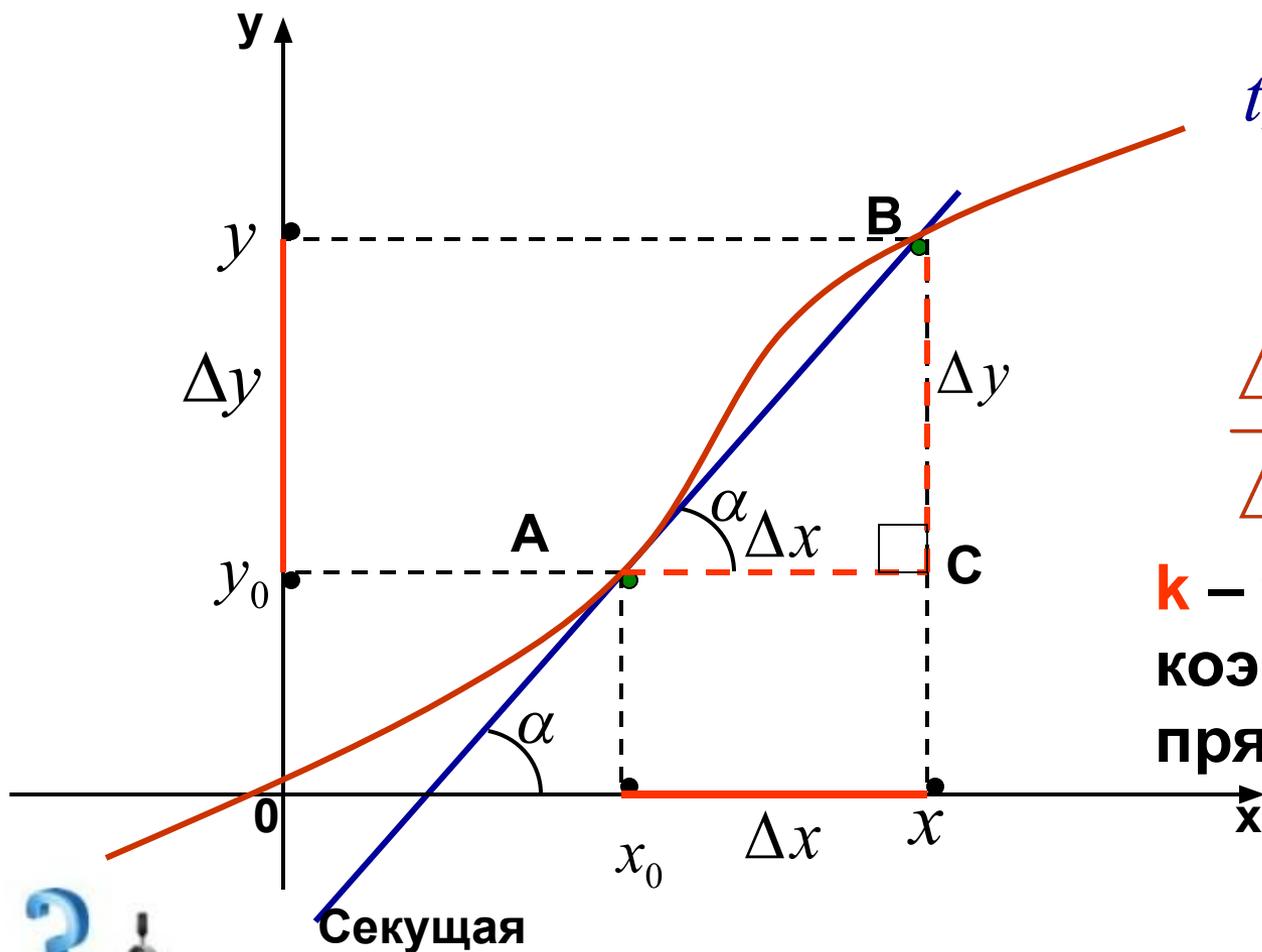
- Операция вычисления производной называется дифференцированием.

- Функция называется дифференцируемой в данной точке, если в этой точке существует её производная.



Геометрический и физический смысл производной.





$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Итак,

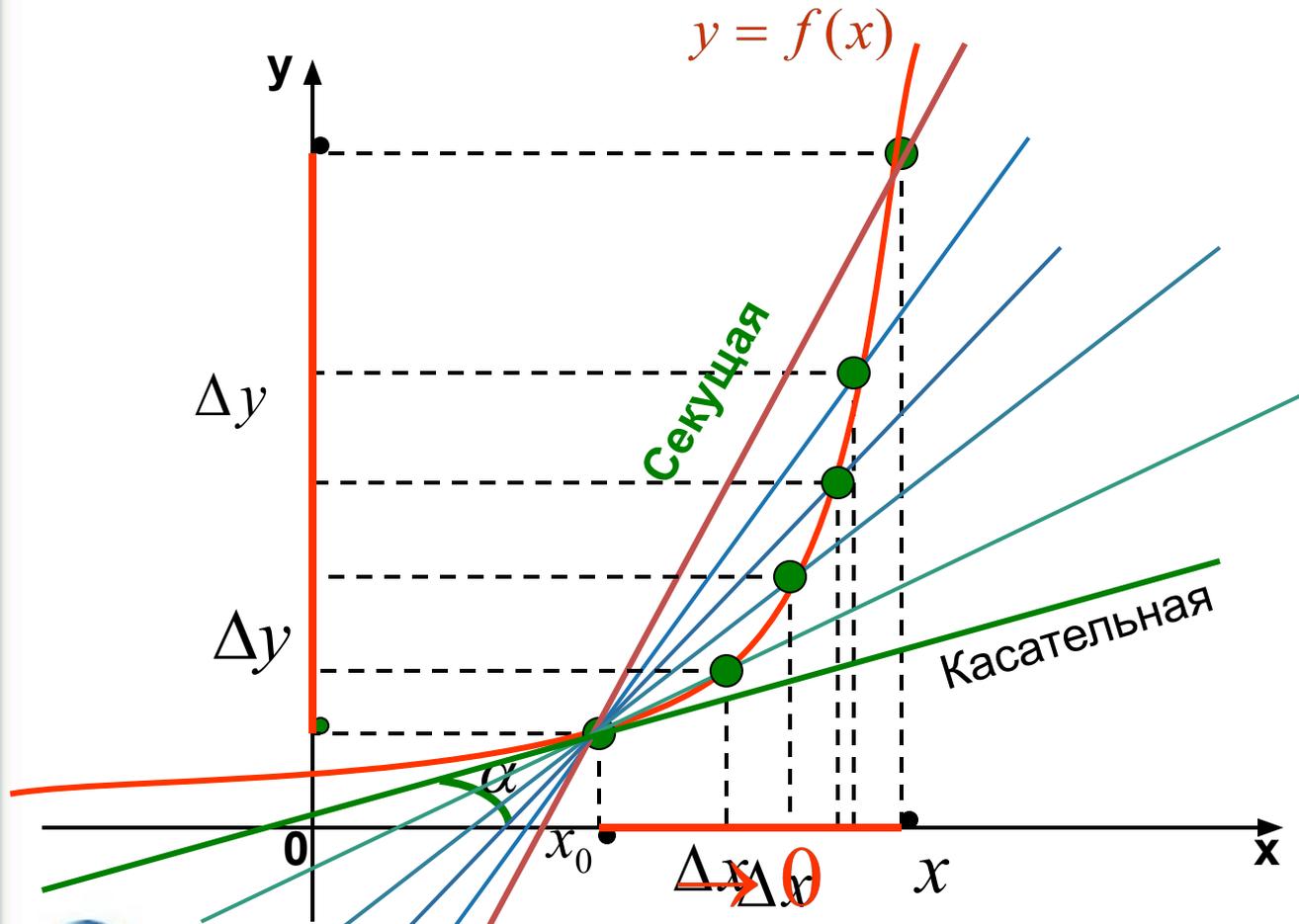
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент
прямой(секущей)

$$y = kx + b$$



Геометрический смысл отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$

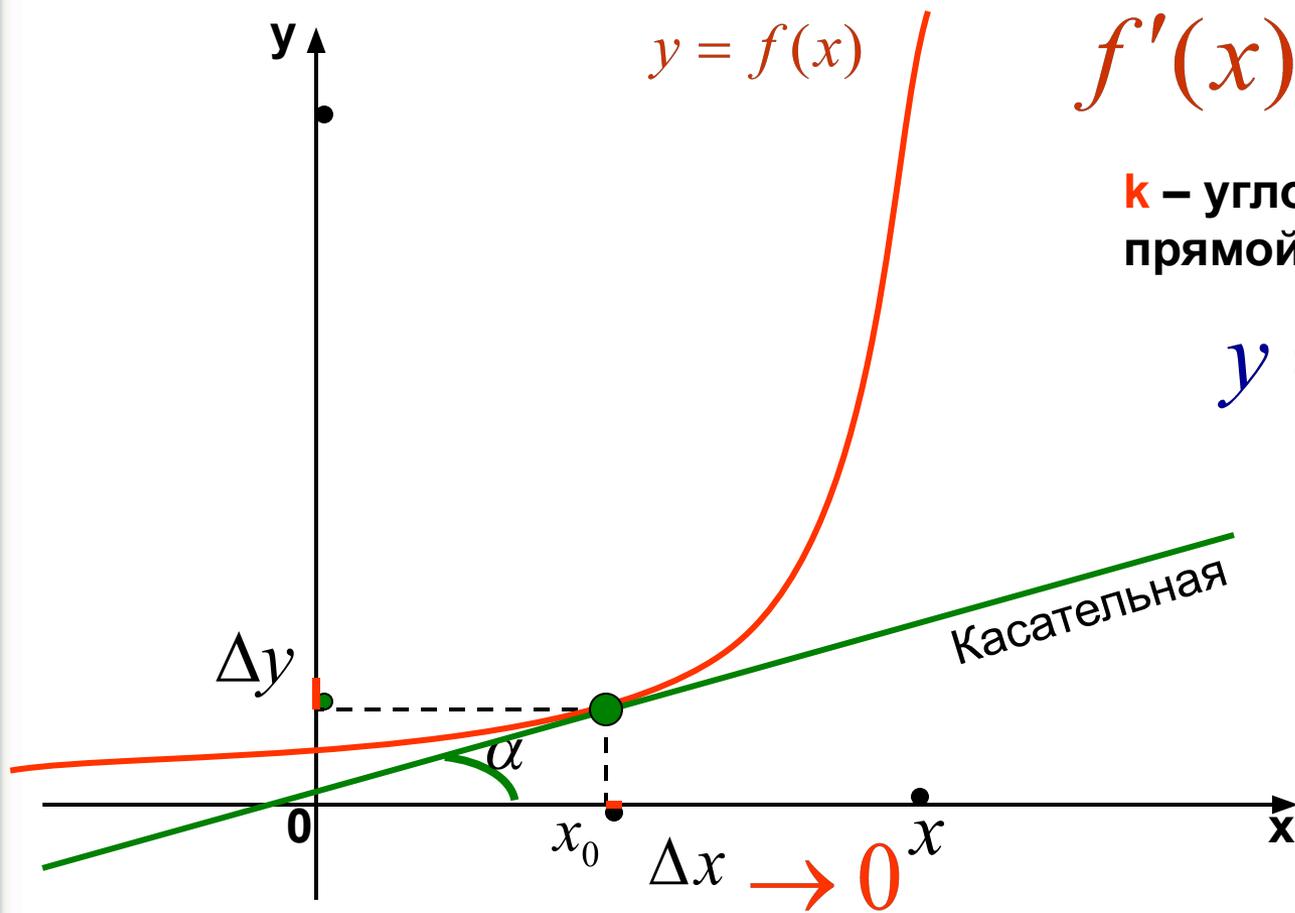


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$y = kx + b$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ угловой коэффициент секущей \rightarrow к угловому коэффициенту касательной.



$$y = f(x)$$

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент
прямой (касательной)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна **угловому коэффициенту касательной**, проведенной к графику функции в этой точке.

Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то скорость ее движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорость** ($v(t) = x'(t)$).
- **Производная от скорости по времени есть ускорение:** $a = v'(t)$.

Ускорение движения есть скорость изменения скорости $v'(t)$, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$



Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$.

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=2$ с.

Решение.

а) $V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$

б) $V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м / с)$



Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки,
движущейся по закону

$$S(t) = t^2 + 2t + 3:$$

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=3$ с.

Решение.

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(м/с)$$

$$a(3) = 2(м/с^2)$$



1. Производная от числа
(константы) равна нулю.

$$(c)' = 0$$

2. Производная переменной
равна единице.

$$(x)' = 1.$$



3. Производная алгебраической суммы (разности) функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$



4. Производная произведения 2-х функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$



5. Производная частного 2-х функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$



6. Постоянный множитель c можно выносить из-под знака производной:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

7. Производная степенной функции равна произведению показателя степени на переменную в степени меньшей на единицу



$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Производная показательной функции

Функция $f(x) = e^x$
дифференцируема в
каждой точке области
определения, и

$$(e^x)' = e^x.$$

Показательная
функция $y = a^x$

дифференцируема в
каждой точке
области

определения, и

$$(a^x)' = a^x \ln a$$



Производные некоторых элементарных функций.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a X)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$$



Производные обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Задание 1.

Найдите производную функции

$$f(x) = \sin x + 3x^2 + 6x + 5$$

Решение:

$$f'(x) = \cos x + 6x + 6$$

Задание 2.

Найдите производную функции

$$f(x) = \sqrt{x} + x^3 - 5x + \sin x$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2 - 5 + \cos x$$



Задание 3.

Найдите производную функции

$$f(x) = \cos x + 8x^2 + 5x + 8$$

Решение:

$$f'(x) = -\sin x + 16x + 5$$

Задание 4.

Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^3 - 5x^2 - \cos x$$

Решение:



$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 12x^2 - 10x + \sin x$$

Задание 5

Найдите производную функции

$$f(x) = \ln x + 5x^2 + 8x + 15$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 10x + 8$$

Задание 6

Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{3}{x^3} - \ln x + 8x^5 + x$$

Решение:



$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} - \frac{1}{x} + 40x^4 + 1$$

Задание 7

Найдите производную функции

$$f(x) = e^x - 3x^4 + 7$$

Решение:

$$f'(x) = e^x - 12x^3$$

Задание 8

Найдите производную функции

$$f(x) = -\frac{2}{x^4} - e^x + \frac{1}{2}x^2$$

Решение:



$$f'(x) = \frac{8}{x^5} - e^x + x$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g(f(x))$.

Примеры:

1) $y = (3x^2 - 2x)^5$. $\begin{cases} y = f^5; \\ f = 3x^2 - 2x. \end{cases}$

2) $y = \sqrt{\sin x}$. $\begin{cases} y = \sqrt{f}; \\ f = \sin x. \end{cases}$

3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. $\begin{cases} y = \cos f; \\ f = 2x - \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x)$$



(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g(f(x))$.

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$



ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

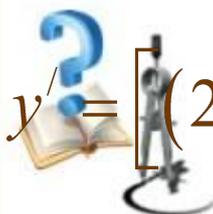
Сложная функция: $y = g(f(x))$.

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x) \quad \left| \begin{array}{l} \text{(производная сложной функции равна} \\ \text{производной основной функции} \\ \text{на производную внутренней функции)} \end{array} \right.$$

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$

Пример: 1) $y = (2x - 1)^4$. $\begin{cases} y = f^4; \\ f = 2x - 1. \end{cases}$


$$y' = \left[(2x - 1)^4 \right]' = 4(2x - 1)^3 \cdot (2x - 1)' = 4(2x - 1)^3 \cdot 2 = 8(2x - 1)^3.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

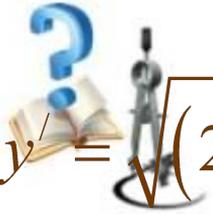
Сложная функция: $y = g(f(x))$.

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x) \quad \left| \begin{array}{l} \text{(производная сложной функции равна} \\ \text{производной основной функции} \\ \text{на производную внутренней функции)} \end{array} \right.$$

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Пример: 1) $y = \sqrt{2x^3 - x}$. $\begin{cases} y = \sqrt{f}; \\ f = 2x^3 - x. \end{cases}$


$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - x}} \cdot (2x^3 - 1)' = \frac{6x^2}{2x\sqrt{2x^2 - 1}} = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g(f(x))$.

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x) \quad \left| \begin{array}{l} \text{(производная сложной функции равна} \\ \text{производной основной функции} \\ \text{на производную внутренней функции)} \end{array} \right.$$

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$

Пример: 1) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. $\begin{cases} y = \sin f; \\ f = 2x - \frac{\pi}{3}. \end{cases}$



$$y' = \sin'\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
 $\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

Таблица производных для сложной функции

$$1. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} u'.$$

$$1a. (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

$$3. (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

$$4. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$6. (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$8. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$10. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

$$1б. (u^{-1})' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

$$2a. (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$3a. (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$5. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$7. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

$$9. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$11. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Производные высших порядков

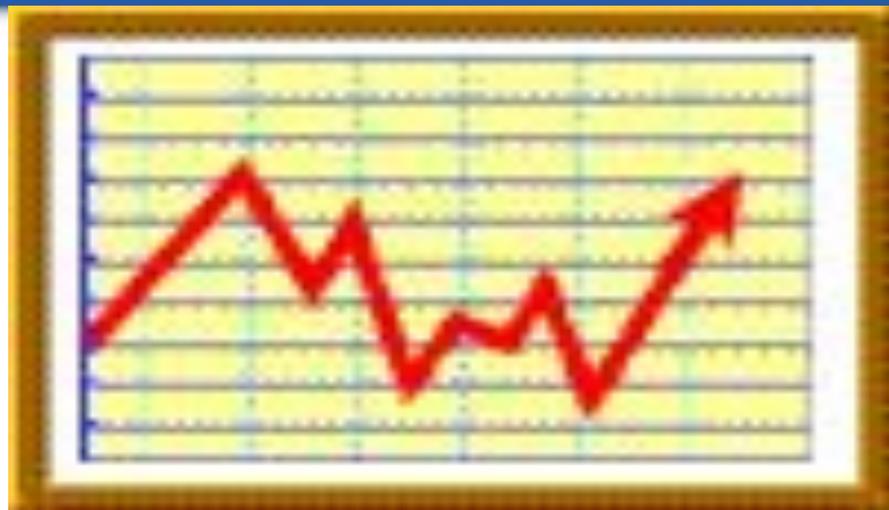
Под **производной высших порядков** понимают дифференцирования функции более одного раза. Если производную $y'(x)$ повторно дифференцировать, то получим производную второго порядка, или **вторую производную функции** $y = f(x)$, и она обозначается

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Производная третьего порядка будет иметь вид

$$y''' = (y'')' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

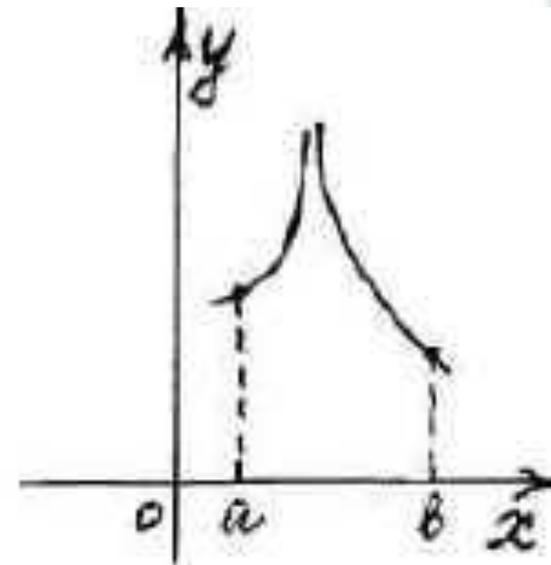
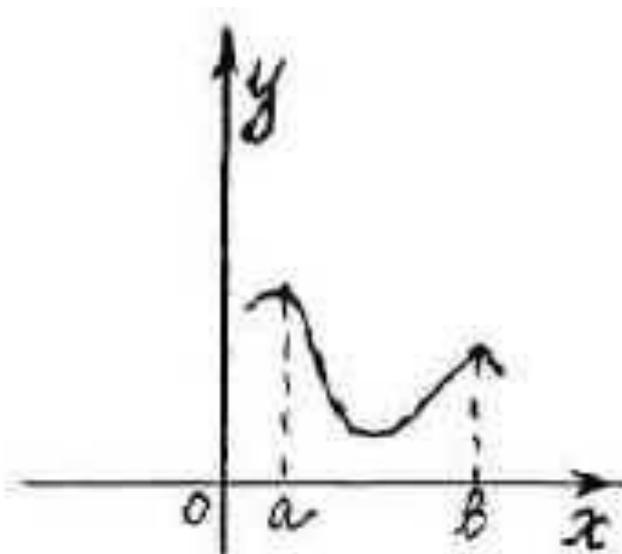
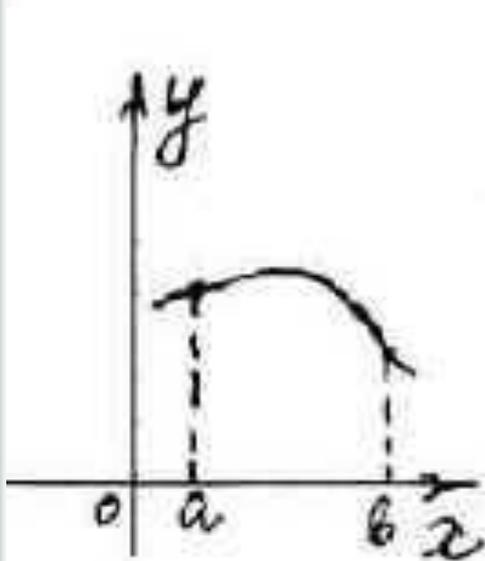




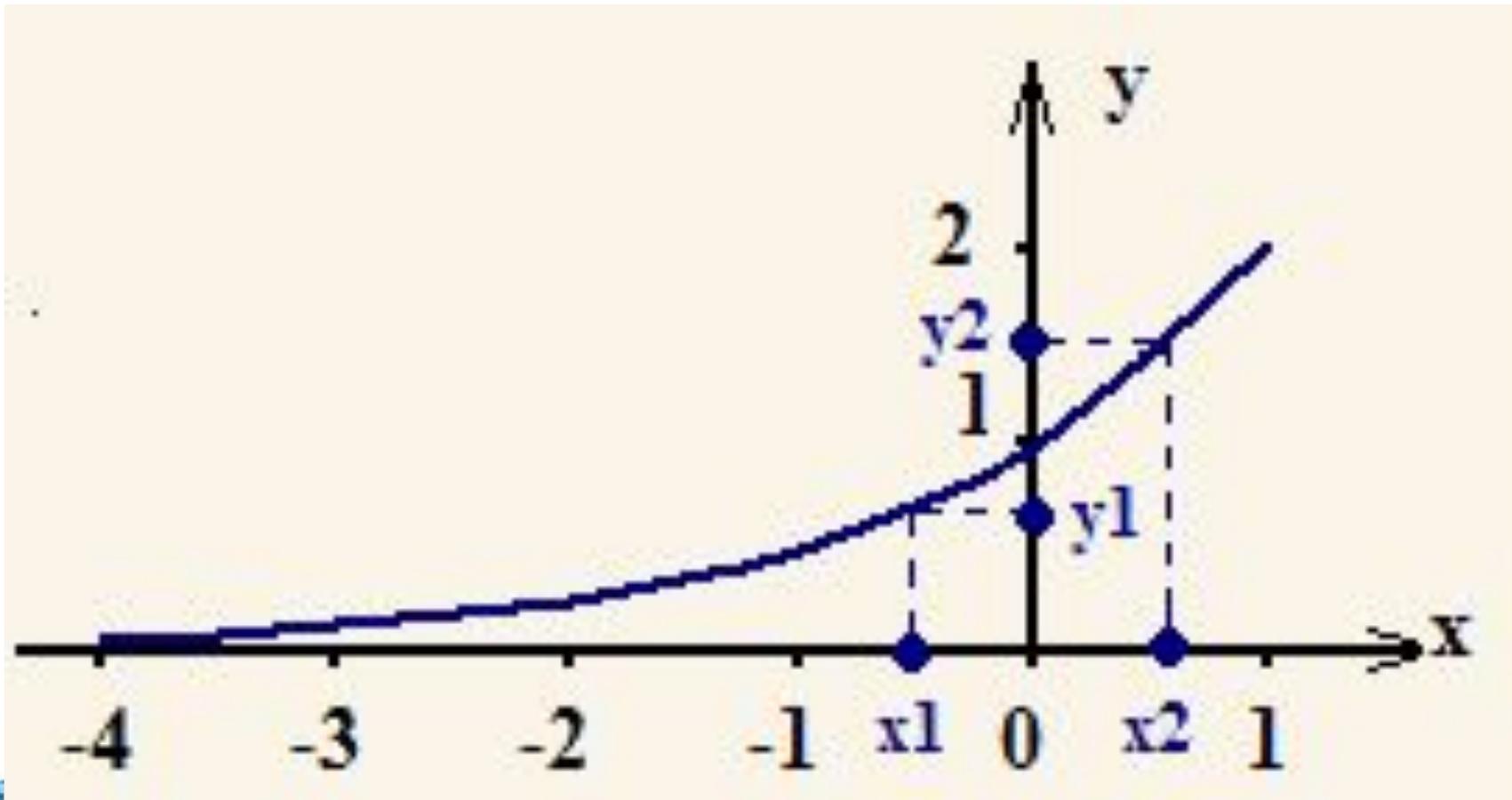
Применение производной к исследованию функции



Одна из основных задач исследования функции- это нахождение промежутков ее возрастания и убывания.



Возрастание функции



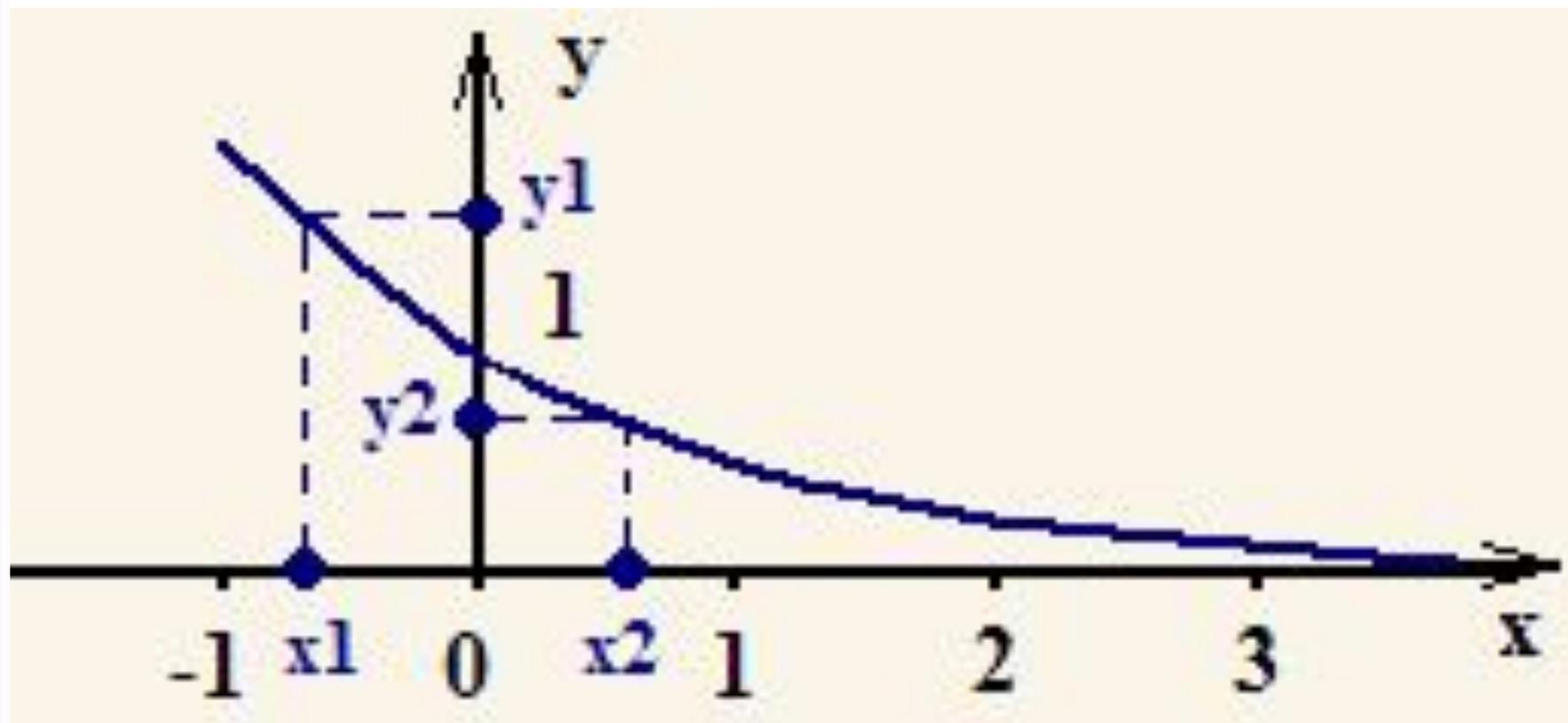
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1:

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке D , если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство **$f(x_1) < f(x_2)$** .

Другими словами, функция называется **возрастающей** в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из данного интервала, **большему** соответствует **большее** значение функции.



Убывание функции



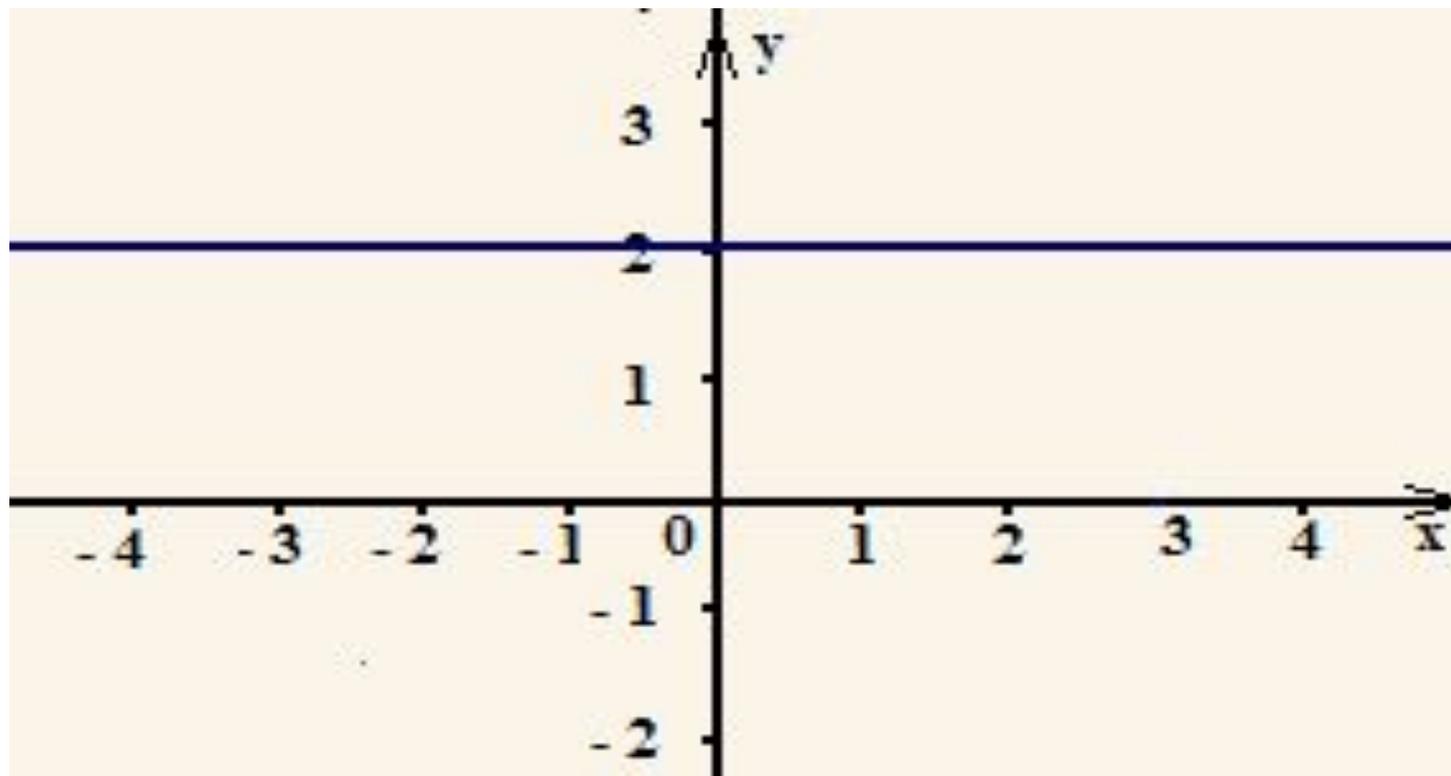
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2:

Функция $f(x)$ называется **убывающей** на промежутке D , если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство **$f(x_1) > f(x_2)$** .

Другими словами, функция называется **убывающей** в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из данного интервала, **большему соответствует меньшее значение функции.**



Определение постоянной функции



Функция, не возрастающая и не убывающая на всей области определения называется **постоянной**.



Промежутки монотонности

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется монотонной на этом промежутке.

Промежутки возрастания и убывания называются промежутками монотонности функции.



ТЕОРЕМА 1.(необходимые условия возрастания и убывания функции).

Если дифференцируемая функция

$$y = f(x), \quad x \in (a, b)$$

• **возрастает** на интервале (a, b) , то $f'(x) \geq 0$ для любого $x_0 \in (a, b)$;

• **убывает** на интервале (a, b) , то $f'(x) \leq 0$ для любого $x_0 \in (a, b)$.



ТЕОРЕМА 2.(достаточный признак возрастания и убывания функций).

- Если $f'(x) > 0$, в каждой точке интервала (a, b) , то функция **возрастает** на этом интервале.
- Если $f'(x) < 0$, в каждой точке интервала (a, b) , то функция **убывает** на этом интервале.



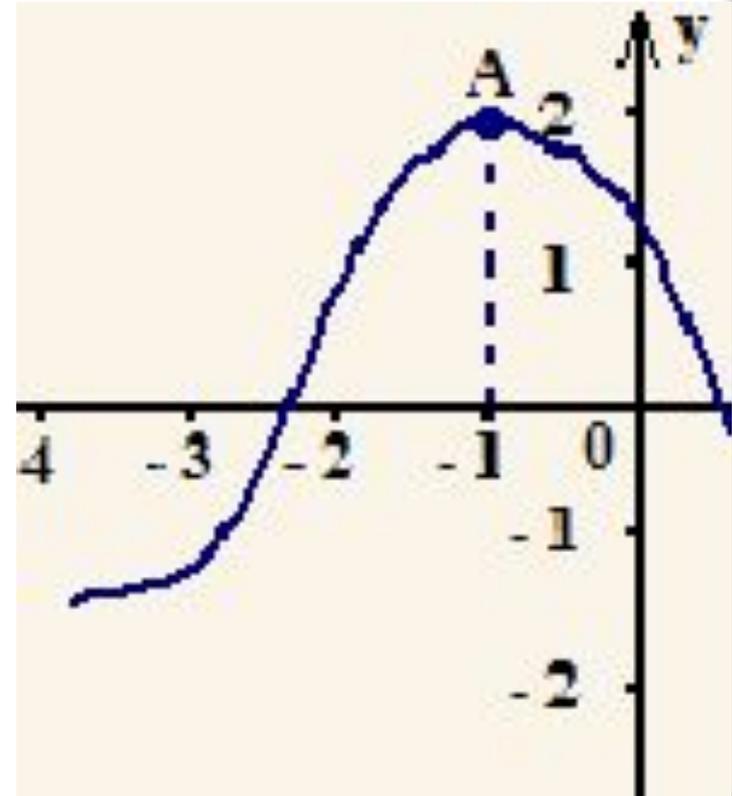
Точки области
определения функции, в
которых производная
функции равна нулю или
не существует,
называются

КРИТИЧЕСКИМИ
ТОЧКАМИ.



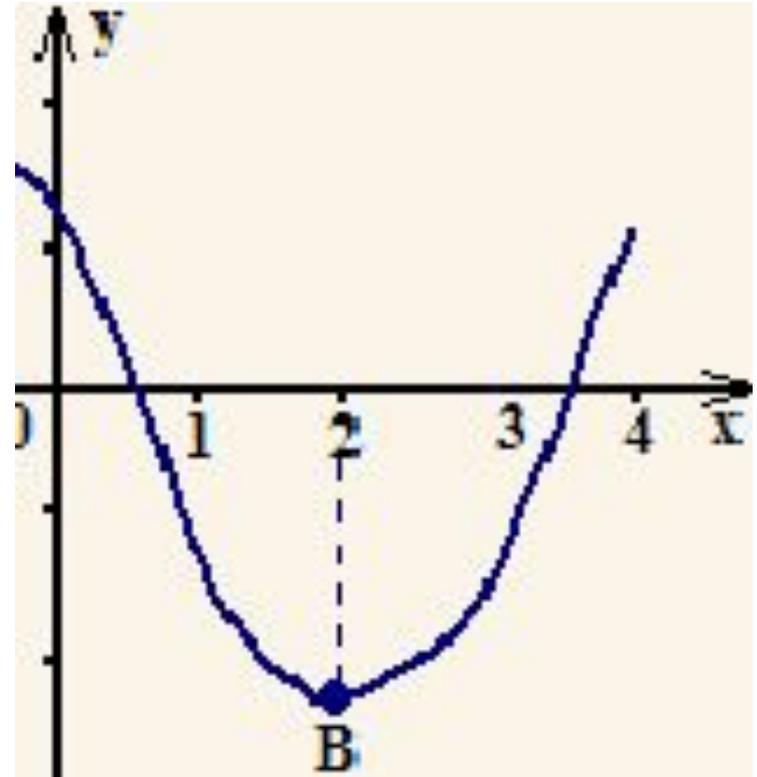
Точка максимума

- Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$.



Точка минимума

- Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.



Точки максимума и минимума функции $f(x)$ называются **точками экстремума** этой функции, а значения функции в точках максимума и минимума называются **максимумами и минимумами функции** или **экстремумами функции**.

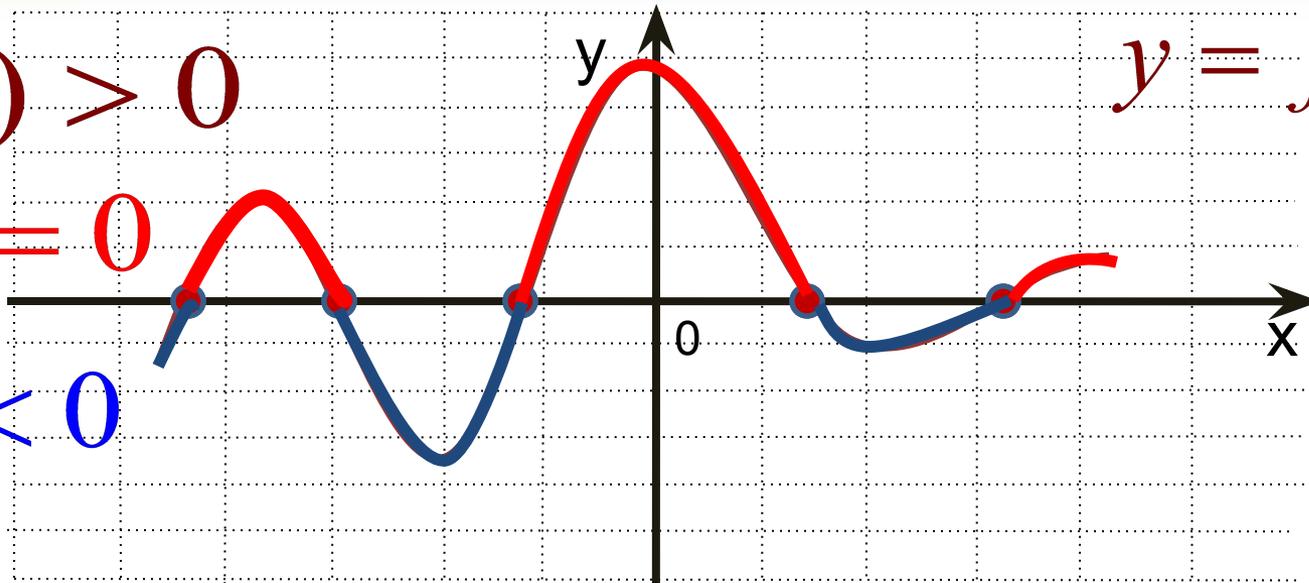


$$f'(x) > 0$$

$$y = f'(x)$$

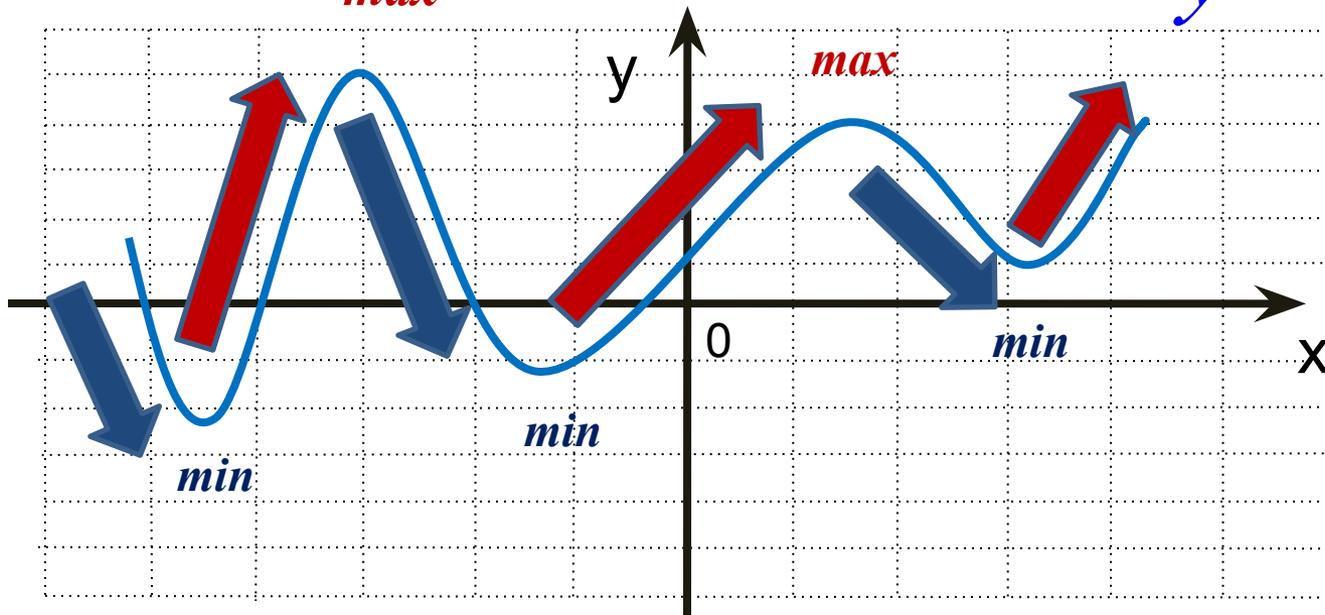
$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) < 0$$



max

$$y = f(x)$$



**Экстремум функции,
если он существует,
может быть только в
критических точках.**

**Однако не во всякой
критической точке
функция имеет
экстремум**



ТЕОРЕМА 3.(необходимое условие экстремума).

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то либо $f'(a) = 0$, либо $f'(a)$ не существует



ТЕОРЕМА 4. (достаточное условие существования экстремума).

- Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 **меняет знак с «+» на «-»**, то x_0 является **точкой максимума**;
- Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 **меняет знак с «-» на «+»**, то x_0 является **точкой минимума**;
- Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 **не изменяет знак**, то в точке x_0 функция $f(x)$ **не имеет экстремума**.



□ Правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум.

- 1). Найти область определения функции: $D(f)$.
- 2). Найти $f'(x)$.
- 3). Найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)=0$
- 4). Найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)$ не существует.



□ Правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум.

- 5). Отметить на координатной прямой все **критические точки и область определения функции $y=f(x)$** ; получают промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y=f(x)$ **сохраняет постоянный знак**.
- 6). Определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п.5



□ Правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум.

- 7). Сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек:
- если знак производной меняется с «+» на «-», то при данном значении аргумента функция имеет максимум.
- если с «-» на «+», то минимум.
- Если смены знака в окрестности критической точки нет, то экстремума в этой точке нет.
- 8). Вычислить экстремальное значение функции.



ПРИМЕР. ИССЛЕДОВАТЬ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЮ

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

1. Функция определена при всех $x : D(y) : \mathbb{R}$

2. $y' = 6x^2 - 30x + 36$

3. $y' = 0, \quad 6x^2 - 30x + 36 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$

4. y' существует при всех x .

+ - +

5. x

2 3

6. $y' = 6(x - 2) \cdot (x - 3)$. Знаки производной отмечены на координатной прямой.

7.

x	$(-\infty; 2)$	2	(2; 3)	3	(3; $+\infty$)
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		29		28	
		max		min	

□

Исследование функции с помощью второй производной

Теорема . Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0) > 0$



Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второй производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.

III. Найти вторую производную $f''(x)$.

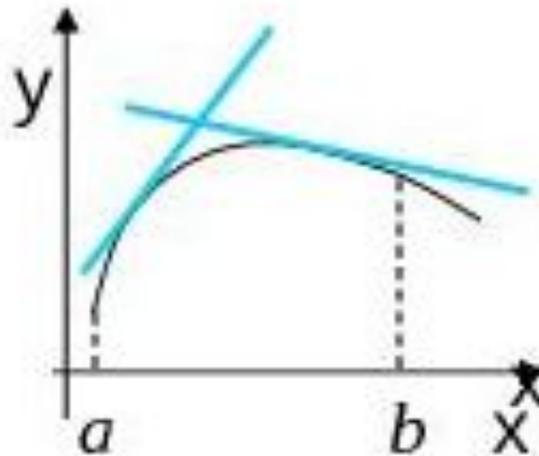
IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то исследование функции нужно произвести с помощью первой производной.

V. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.



ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

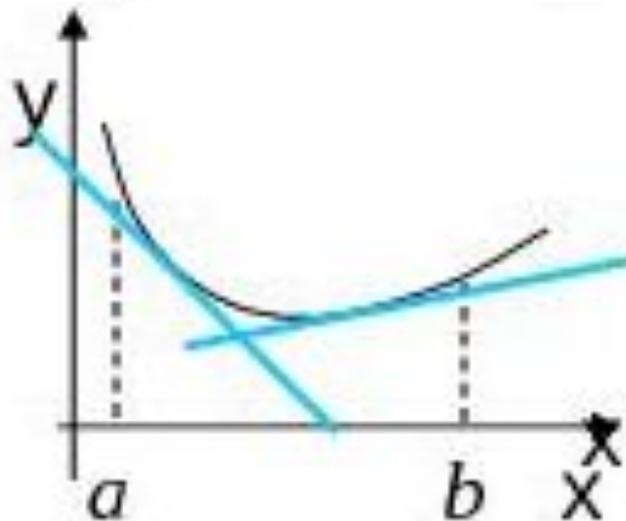
Опр . Кривая обращена выпуклостью вверх на (a,b) , если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на (a,b) . Кривая называется *выпуклой*.



ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

Опр . Кривая обращена выпуклостью вниз на (a,b) , если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется *вогнутой*.



ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

Теорема (Достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и имеет в (a, b) производную до второго порядка включительно, тогда

- а) если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна $f''(x) < 0$, то кривая на (a, b) выпукла;
- б) если во всех точках интервала вторая производная положительна $f''(x) > 0$, то кривая на (a, b) вогнута.



Пример

◆ ПРИМЕР 1

Исследовать на выпуклость кривую $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Находим первую и вторую производные $f(x)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Подставляя значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$, получим $f''(-2) = 2 \cdot \frac{1}{(-2)^3}$, $f''(-2) < 0$; $f''(1) = \frac{2}{1}$, $f''(1) > 0$. Следовательно, в точке $x = -2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x = 1$ — выпукла вниз.



Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема : (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

- I. Найти вторую производную $f''(x)$.
- II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
- III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка $x = x_0$ разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то $x = x_0$ является абсциссой точки перегиба функции.
- IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

◆ ПРИМЕР 1

Найти точку перегиба кривой: 1) $f(x) = 6x^2 - x^3$; 2) $\varphi(x) = x + \sqrt[3]{x^5} - 2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$. Полагая $f''(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. Так как в промежутке $-\infty < x < 2$ имеем $f''(x) > 0$, а в промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $f''(x) < 0$, то при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба. Находим ординату этой точки: $f'(2) = 16$. Итак, точка перегиба имеет координаты $(2; 16)$;

2) находим $\varphi'(x) = \left(x + \frac{5}{x^3} - 2\right)' = 1 + \frac{5}{3}x^{2/3}$; $\varphi''(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Здесь критической является точка $x = 0$, в которой вторая производная терпит разрыв.



Домашнее задание:

Упражнения

Найти производную функции (46—47).

46. 1) x^6 ; 2) x^{12} ; 3) $3x^4 + 2x^{13}$;

4) $7x^3 - 3x^7$; 5) $\frac{3}{x^4}$; 6) $x^3 + \frac{1}{x^2}$.

47. 1) $\sqrt[3]{x}$; 2) $\sqrt[5]{x}$; 3) $2\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$;

5) $\frac{2}{5\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; 7) $\frac{x^3+1}{x}$; 8) $\frac{x^4 - \sqrt{x}}{x}$.

48. Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$;

2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;



Домашнее задание:

Упражнения

Найти производную функции (63—75).

63. 1) $\ln x + \sin x$; 2) $e^x - \sin x$; 3) $\sqrt{x} - \cos x$;
4) $\frac{1}{x^2} + e^x$; 5) $\operatorname{tg} x + \ln x$; 6) $e^x - \operatorname{ctg} x$.

64. 1) $2 \cos 3x$; 2) $-5e^{2x}$; 3) $-4 \ln 2x$;
4) $-3 \sin 2x$; 5) $\frac{3}{10} e^{-2x}$; 6) $2e^x - 4e^{-2x}$.

65. 1) $6x^4 - 9e^{3x}$; 2) $\frac{1}{4} x^8 + 3 \sin 3x$; 3) $3\sqrt[3]{x} - 4 \cos 4x$;
4) $\frac{5}{x^2} + 4e^{\frac{x}{4}}$; 5) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2} \ln 4x$; 6) $3 \operatorname{tg} 2x - 2\sqrt[3]{x}$.



Домашнее задание:

66. 1) $8\sqrt[4]{x} + 16e^{\frac{x}{2}}$;

2) $\frac{9}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{4} \sin 4x$;

3) $3x\sqrt[3]{x} - 3 \ln \frac{1}{x}$;

4) $\frac{1}{x\sqrt{x}} + 5 \cos \frac{x}{5}$.

67. 1) $3x^2 - 4\sqrt[3]{x} + 2e^{\frac{x}{3}}$;

2) $2x^3 + 3\sqrt{x} - \cos 2x$;

3) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \ln x^3$;

4) $2x^8 - 3 \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{3} \sin 3x$;

5) $8x^{\frac{3}{4}} + 7x^{\frac{1}{7}} - \cos 4x$;

6) $\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x - 5x^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{4} e^{2x}$.

68. 1) $(x+3)^8$;

2) $(x-4)^7$;

3) $\sqrt[3]{x-2}$;

4) $\sqrt{x+5}$;

5) $\frac{1}{(x+1)^2}$;

6) $\frac{1}{(x-1)^3}$;

7) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$;

8) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$.

