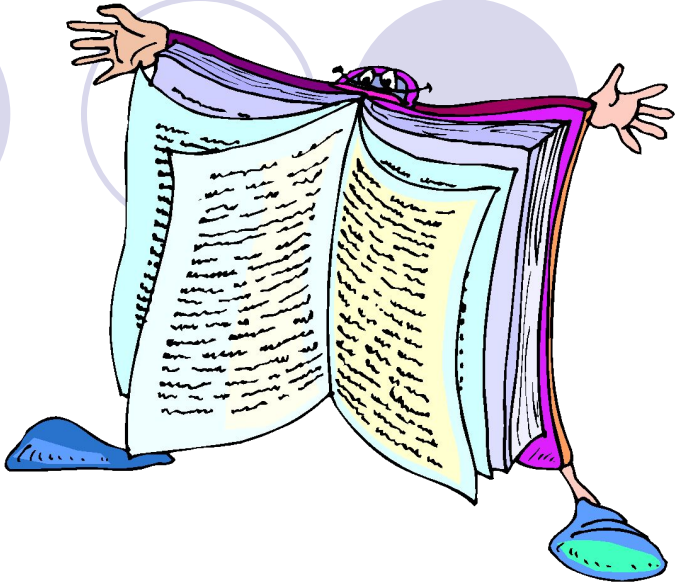
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

"Нам необыкновенно повезло, что мы живём в век, когда ещё можно делать открытия".

американский учёный, физик Р.Фейман

Цели урока:

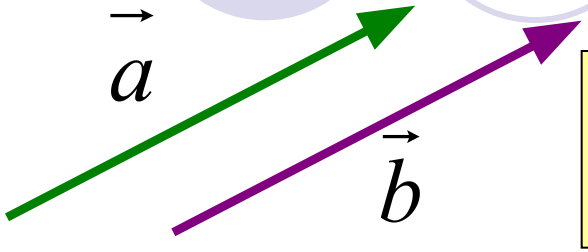


- ***Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.***
- ***Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.***
- ***Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.***

Оцените Ваше настроение

Повторение:

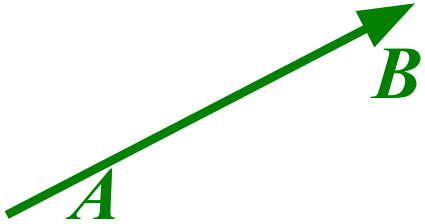
- ***Какие векторы называются равными?***



$$\vec{a} = \vec{b},\ \text{если}\ |\vec{a}| = |\vec{b}|;\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

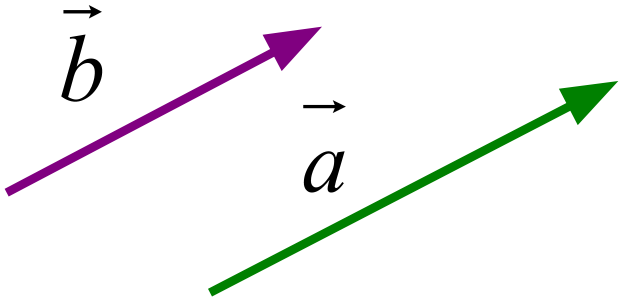
- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- ***Какие векторы называются коллинеарными?***

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \textbf{или} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$



$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \quad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение: *(Векторы в пространстве)*

равные векторы имеют равны

1) Дано: $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$

Найти: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$

$\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

3) Дано: Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$A(1;-3;4)$ $B(5;1;-2)$ $C(2;0;1)$ $D(4;-2;2)$

$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$

$\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

Нет

Угол между векторами.

$\vec{b}$

$\vec{a}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\,\vec{b}}\right) = \alpha$

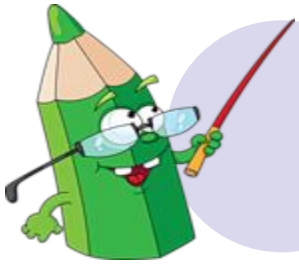
A

α

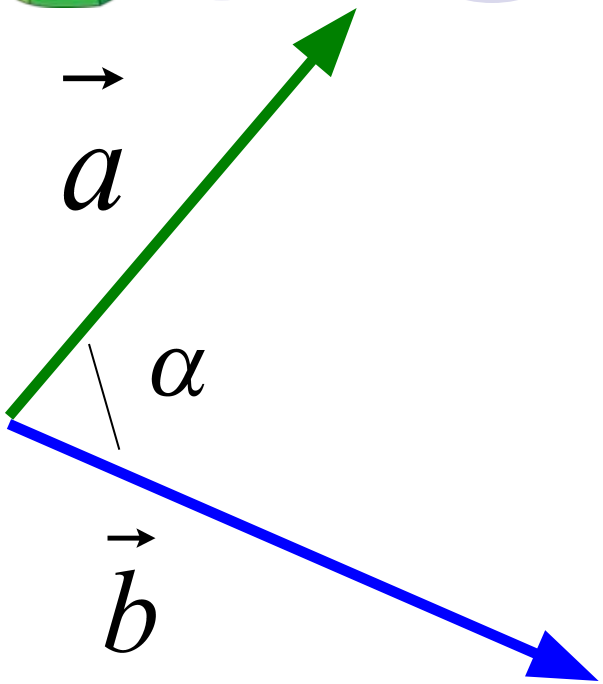
O

B

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$



Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Скалярное произведение векторов – число!

Примеры:

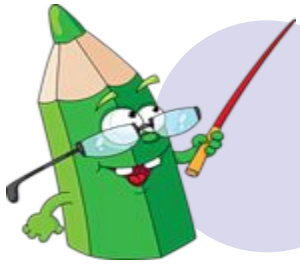
1. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\alpha = 60^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^0) = 3$

2. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$, $\alpha = 30^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot \cos(30^0) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$

3. $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$, $\alpha = 45^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(45^0) = 14 \cdot \sqrt{2}$

4. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $\alpha = 120^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120^0) = \frac{-1}{2}$

5. $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 5$, $\alpha = 90^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot \cos(90^0) = 0$



Свойства скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

1. ***Если*** $\vec{a} \perp \vec{b}$, ***то*** $\cos 90^0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2. ***Если*** $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, ***то*** $\cos 180^0 = -1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

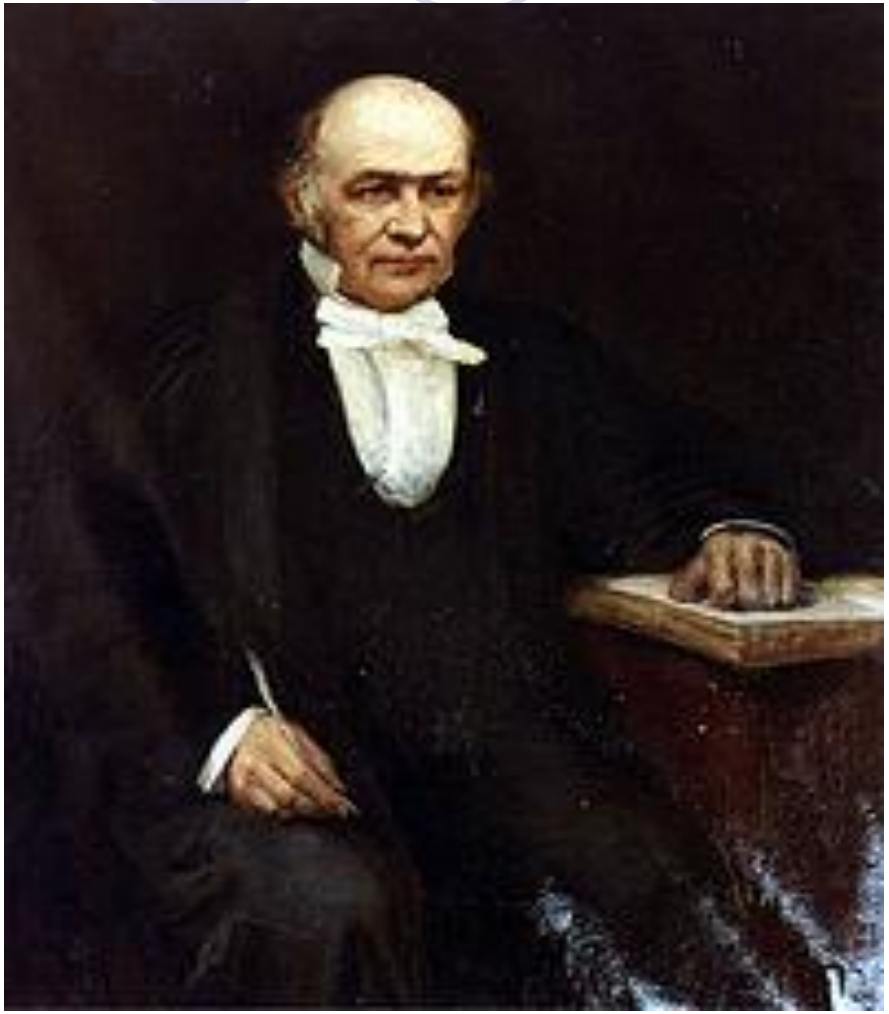
3. ***Если*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ***то*** $\cos 0^0 = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

4. ***Если*** $\vec{a} = \vec{b}$, ***то*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

Скаляр – лат. scale – шкала.



Ввёл в 1845 г.

У. ГАМИЛЬТОН,

английский математик.

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Вычислить скалярное произведение векторов

$\vec{a} = (4; -6; 3)$, $\vec{b} = (-5; 2; -5)$, $\vec{c} = (0; -3; -4)$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$\vec{a} \cdot \vec{c} =$

$\vec{b} \cdot \vec{c} =$

Формула для вычисления угла между векторами, заданными своими координатами

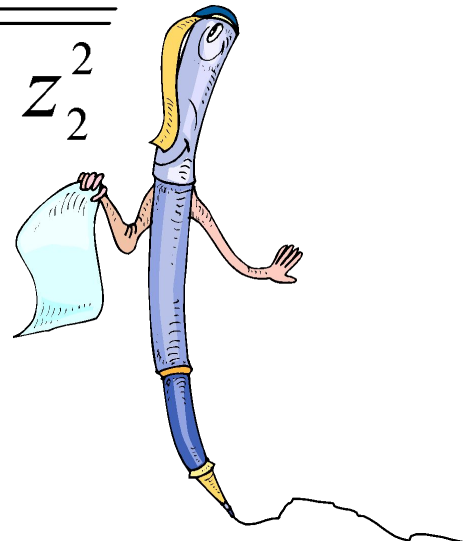
$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Формула для вычисления угла между векторами, заданными своими координатами

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Решение задач

1.Найти угол между векторами $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$.

2. В треугольнике АВС найти величину угла В, если А (0; 5; 0), В (4; 3; -8), С (-1; -3; -6).

3. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если А (1; 6), В (1; 0), С (-2; 3).

4. Определить угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если А (1; -3; -4), В (-1; 0; 2), С (2; -4; -6), D (1; 1; 1).