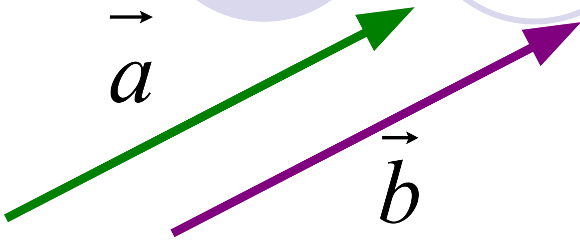
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

Цели урока:

- ***Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.***
- ***Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.***
- ***Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.***

Повторение:

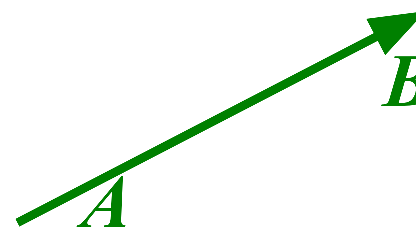
- ***Какие векторы называются равными?***



$$\vec a = \vec b,\ \text{если}\ \ |\vec a| = |\vec b|;\ \vec a \uparrow\uparrow \vec b$$

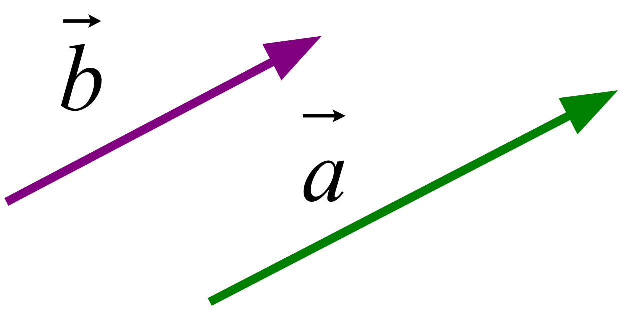
- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- ***Какие векторы называются коллинеарными?***

$\vec a \uparrow\uparrow \vec b$ **или** $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$



$$\vec a = \lambda \cdot \vec b \quad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение: *(Векторы в пространстве)*

1) Дано: $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$ $\sqrt{30}$

Найти: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

2) Дано: $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ ***и*** $\overrightarrow{CD}$ ***?***

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$

$\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

3) Дано: Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ ***и*** $\overrightarrow{CD}$ ***?***

$A(1;-3;4)$ $B(5;1;-2)$ $C(2;0;1)$ $D(4;-2;2)$

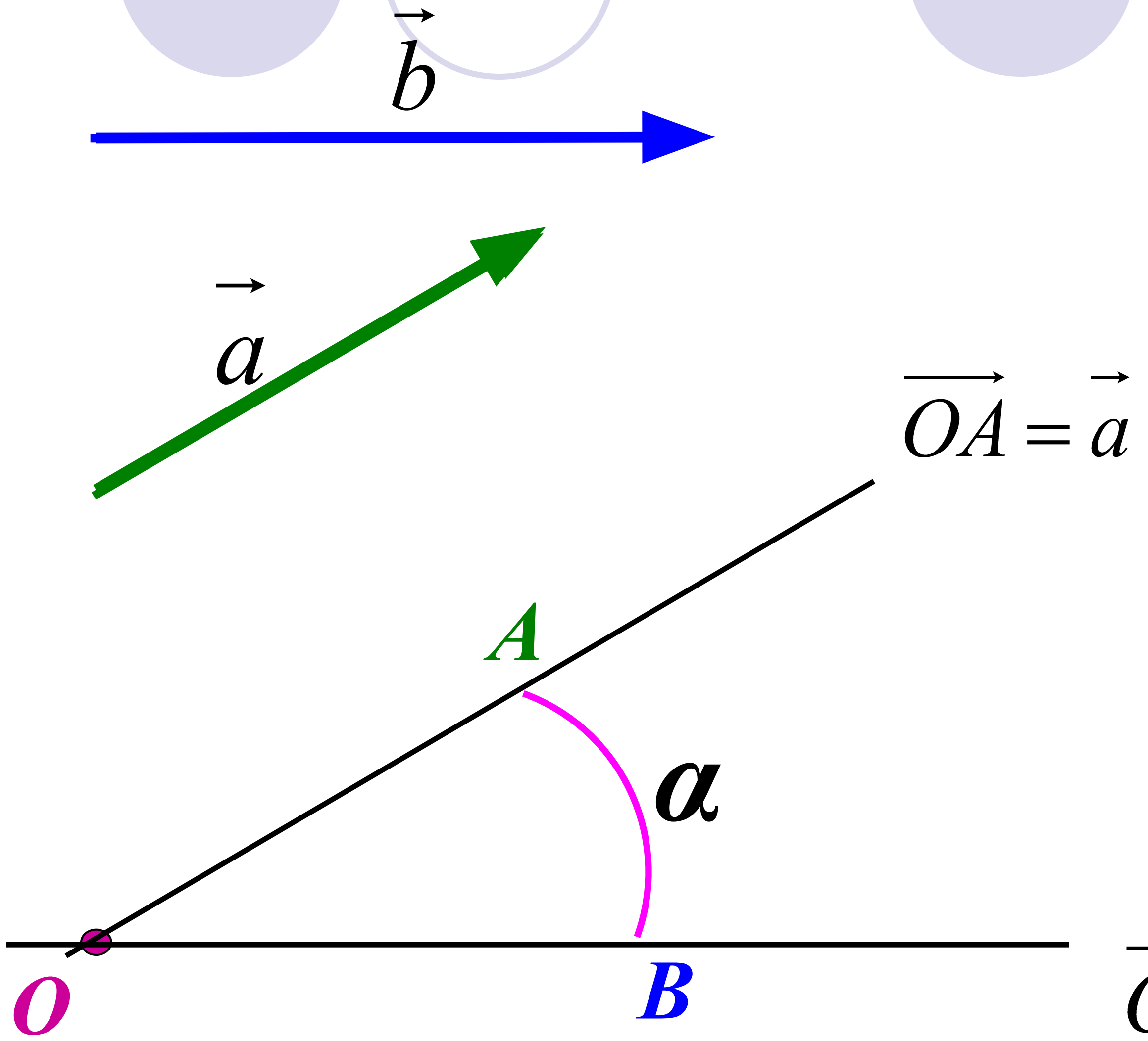
$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$

$\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

Нет

равные векторы имеют равны

Угол между векторами.



$$\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right) = \alpha$$

Примеры:

1. $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\alpha = 60^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot cos\left(60^0\right) = 3$

2. $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, $\alpha = 30^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot cos\left(30^0\right) = \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$

3. $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\alpha = 45^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot cos\left(45^0\right) = 14 \cdot \sqrt{2}$

4. $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, $\alpha = 120^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot cos\left(120^0\right) = \dfrac{-1}{2}$

5. $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\alpha = 90^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot cos\left(90^0\right) = 0$

Свойства скалярного произведения

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

1. Если $\vec{a}\perp\vec{b}$ ***, то*** $\cos 90^0=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2. Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$***, то*** $\cos 180^0=-1 \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

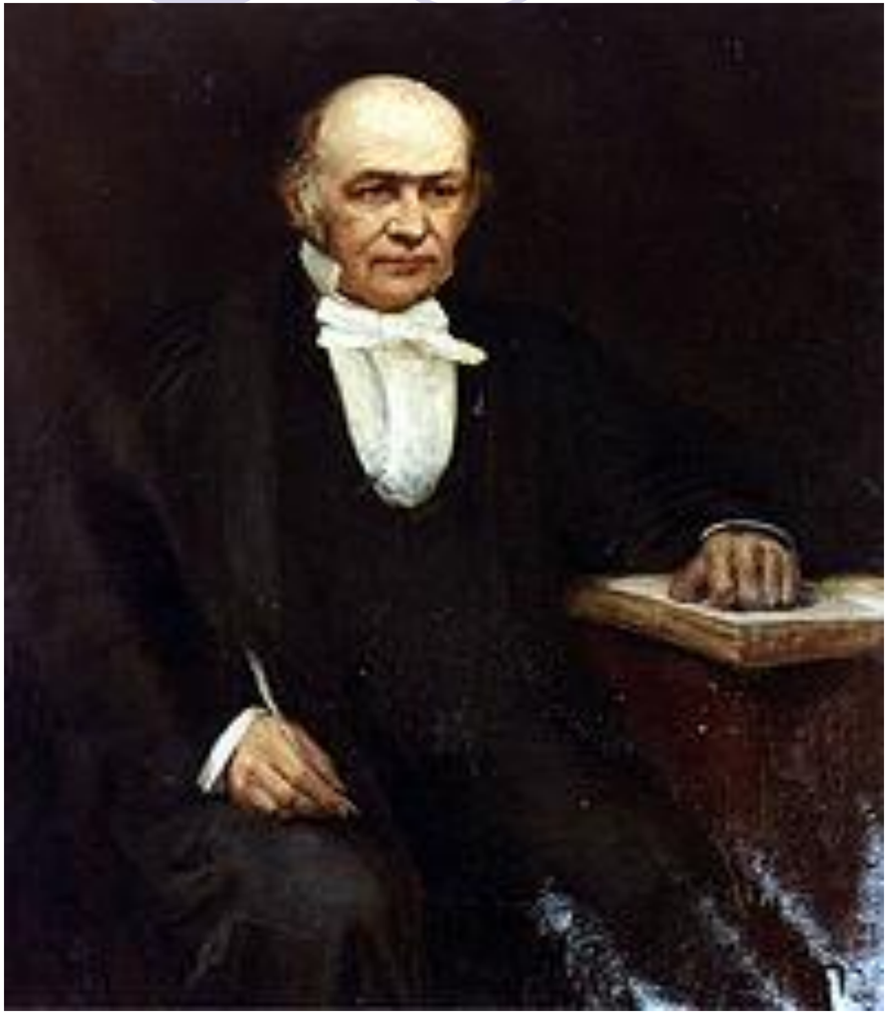
3. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$***, то*** $\cos 0^0=1 \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

4. Если $\vec{a}=\vec{b}$***, то*** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^{\,2}$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

Скаляр – лат. scale – шкала.



Ввёл в 1845 г.

У. ГАМИЛЬТОН, английский математик.

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Вычислить скалярное произведение векторов

$\vec{a} = (4; –6; 3)$, $\vec{b} = (–5; 2; –5)$, $\vec{c} = (0; –3; –4)$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$\vec{a} \cdot \vec{c} =$

$\vec{b} \cdot \vec{c} =$

Формула для вычисления угла между векторами, заданными своими координатами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Формула для вычисления угла между векторами, заданными своими координатами

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Решение задач

1. В треугольнике АВС найти величину угла В, если А (0; 5; 0), В (4; 3; -8), С (-1; -3; -6).

2. Определить угол между векторами АВ и CD, если А (1; -3; -4), В (-1; 0; 2), С (2; -4; -6), D (1; 1; 1).

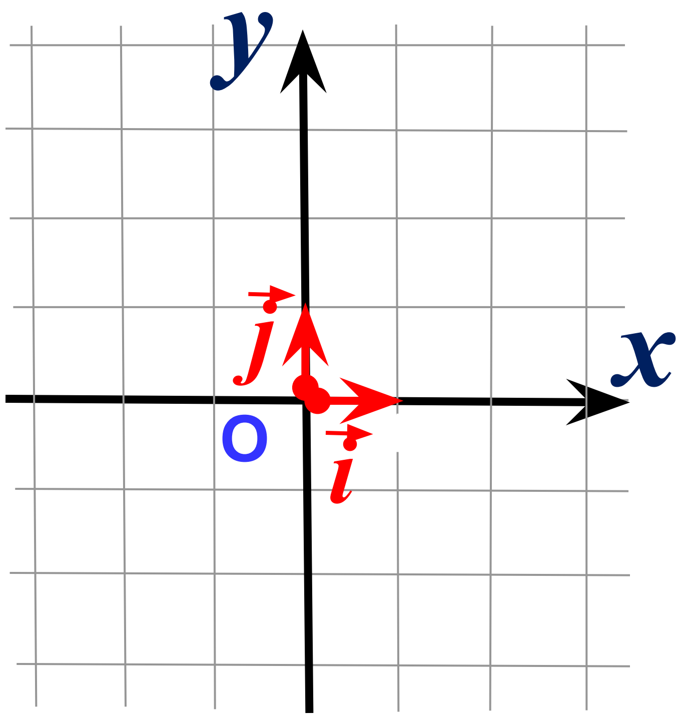
1 Скалярное произведение координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$

равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1 — 1 — ПОДУМАЙ!

2 — – 1 — ПОДУМАЙ!

3 — 0 — ВЕРНО!



Проверка

2 Скалярный квадрат вектора $\vec{i}$ равен:

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}\,|^2 = 1^2 = 1$$

ВЕРНО!

1 1

2 – 1 ПОДУМАЙ!

3 0 ПОДУМАЙ!

Проверка

3 Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$,

то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$

$$12 = 3 \cdot 4 \cos \widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$$

$$\cos \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 1$$

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 0^0$$

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

ВЕРНО!

1 сонаправлены;

2 перпендикулярны; ПОДУМАЙ!

3 противоположно направлены. ПОДУМАЙ!

Проверка

4 Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20,\quad |\vec{x}| = 4,\quad |\vec{y}| = 5,$

то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \widehat{\vec{x}\,\vec{y}}$$

$$-20 = 4 \cdot 5 \cos \widehat{\vec{x}\,\vec{y}}$$

$$\cos \widehat{\vec{x}\,\vec{y}} = -1$$

$$\widehat{\vec{x}\,\vec{y}} = 180^0$$

$$\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$$

ПОДУМАЙ!

1 сонаправлены;

ПОДУМАЙ!

2 перпендикулярны;

ВЕРНО!

3 противоположно направлены.

Проверка

5 Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ!

1 50^0

ПОДУМАЙ!

2 60

ВЕРНО!

3 120^0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами тупой

Проверка