Взвешенные деревья

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Взвешенные деревья

В компьютере все буквы и другие символы хранятся в виде строк из 1 и 0.

Если данных достаточно много, всегда желательно провести компактификацию.

Проблема: если строки, представляющие разные символы, имеют разную длину, то как узнать, где заканчивается строка одного символа и начинается строка другого.

Определение.

Однозначно декорируемый код для языка как множество, что каждая строка в языке может быть задана однозначно как конкатенация элементов.

В этом случае строки из единиц и нулей, представляющие элементы из *A*, будут кодом.

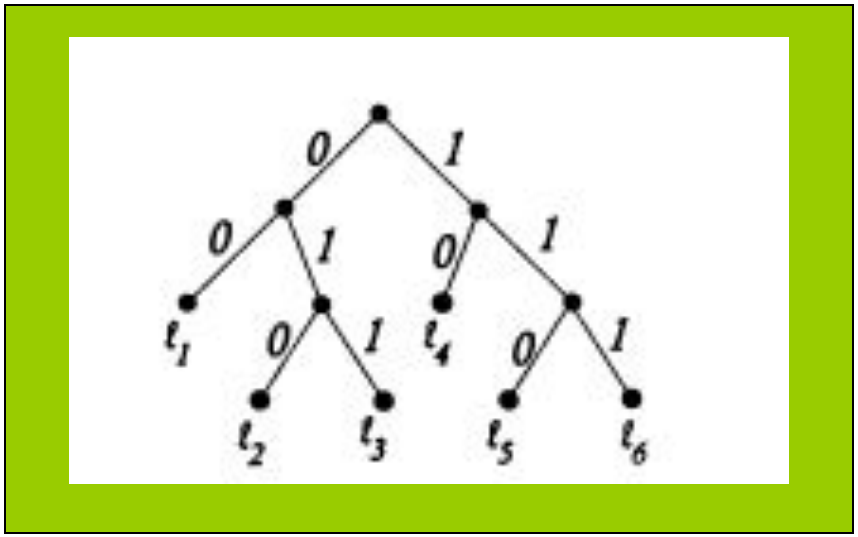
Эти строки образуют однозначно декодируемый код. Разделяя строки на элементы, представляющие *A*, знаем, что представление однозначно. Декодированные слова будут правильные.

Код *C* ***префиксный***, если он обладает свойством, что никакой элемент кода не может быть начальной строкой другого элемента кода.

Конкатена́ция (сцепле́ние) — операция склеивания объектов линейной структуры, обычно строк. Например, конкатенация слов «микро» и «мир» даст слово «микромир».

Пример.

Дерево с листьями



Пути к листам $v1$, $v2$, $v3$, $v4$, $v5$, $v6$ обозначают 00, 010, 011, 10, 110, 111.

Строку, соответствующую данному листу, называют ***путевым кодом.***

Теорема.

В любом бинарном дереве путевые коды для листьев дерева являются префиксным кодом.

Чем меньше вес дерева, тем в большей степени достигнута цель.

Чтобы найти наилучший код для минимизации данных, необходимо найти код с минимальным весом.

Процесс построения такого дерева называется ***алгоритмом Хаффмана***.

Код, приписываемый символам согласно их путевому коду, называется ***кодом Хаффмана***.

Пример.

Имеются буквы и их частоты

символ	частота
A	15
B	25
C	10
D	30
E	15
F	5

Бинарное дерево, что бы наиболее часто используемые элементы были возможно ближе расположены к корню.

Требуется найти такое дерево, что вес дерева

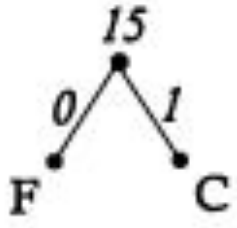
$$w = l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3 + \ldots + l_n f_n = \sum_{i=1}^{n} l_i f_i$$

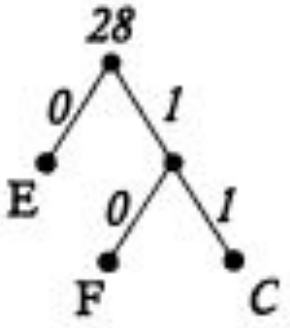
Пример (продолжение).

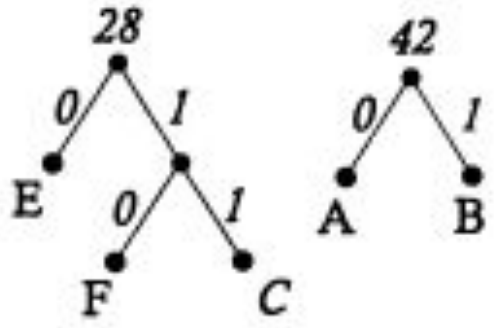
l_i и f_i - уровень и частота заданного элемента.

Упорядочим частоты списке частот (5, 10, 13, 17, 25, 30).

Деревья:







Списки частот: (13, 15, 17, 25, 30)

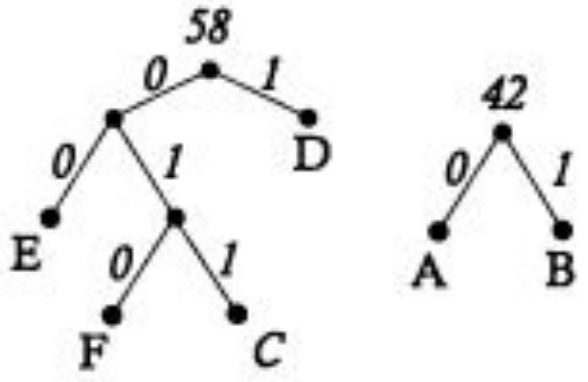
(17, 25, 28, 20)

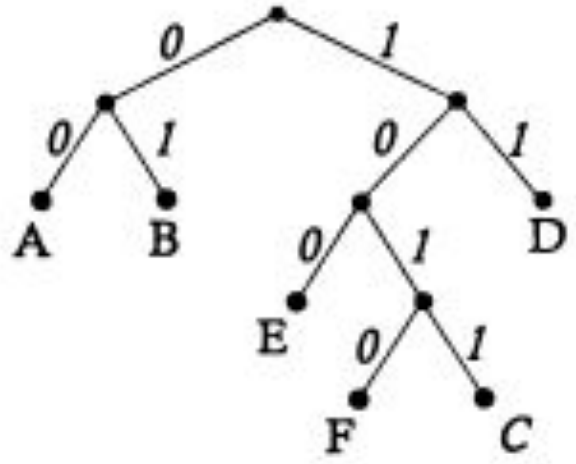
(28, 30, 42)

(42, 58)

Пример (продолжение).

Объединяем два дерева и формируем исходное дерево





Лемма.

Для заданного множества из *n* символов и их частот существует бинарное дерево минимального веса с символами в качестве листьев.

Доказательство:

Существует только четное число бинарных деревьев с *n* листьями. Для каждого

$$w = l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3 + \ldots + l_n f_n = \sum_{i=1}^{n} l_i f_i$$

и выберем дерево, которое обеспечивает наименьшее значение. Ч.т.д.

Лемма.

В дереве с минимальным весом на максимальном уровне листья присутствуют в парах, т.е. всюду, где есть сын, имеется и правый и левый сын и наоборот.

Лемма.

В дереве с минимальным весом два символа с минимальными частотами расположены на максимальном уровне.

Лемма.

Существует дерево с минимальным весом, в котором два символа с наименьшими частотами имеют одного родителя.

Теорема.

Для заданного множества символов с соответствующими частотами дерево Хаффмана является деревом с минимальным весом.

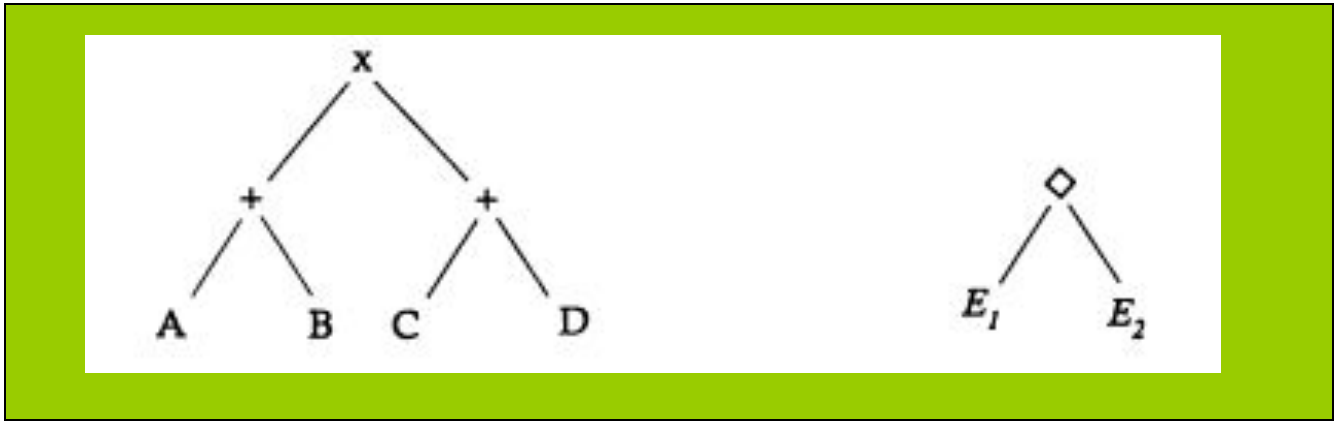
Обход бинарных деревьев.

Рассмотрим способ обхода бинарного дерева

Используем команду ***обработать*** (*n*), где *n* – узел.

Обход дерева в центрированном порядке.

Обращаем процесс, использованный при создании дерева. Если дерево:



- ◇ - бинарная операция над выражениями *E*1 и *E*2, обрабатываем (печатаем) это как $E_1 \diamond E_2$

Получается выражение в ***инфиксной записи***.

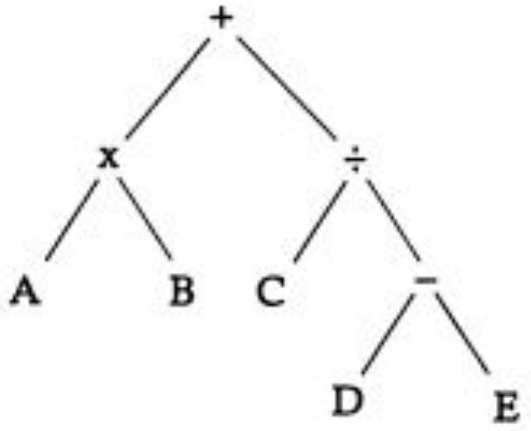
Алгоритм обхода дерева в центрированном порядке (ОПД).

лс (v) – левый сын вершины v .

пс (v) – правый сын вершины v .

Алгоритм обхода дерева в центрированном порядке — ОЦП (*корень*)

(1) Если лс(*корень*) существует, то ОЦП(лс(*корень*)).
(2) Обработать(*корень*).
(3) Если пс(*корень*) существует, то ОЦП(пс(*корень*)).



Остовные деревья

Определение.

Остовное дерево – дерево T, которое является подграфом графа G таким, что каждая вершина в G является вершиной в T. Каждый связный граф имеет остовное дерево.

Два метода построения остовного дерева.

Первый – метод поиска в ширину,

Второй – метод поиска в глубину.

Первый метод: произвольную вершину v_0 графа G выбирают в качестве корня дерева T. Для каждой вершины v, смежной с вершиной v_0, в дерево T добавляется вершина v и ребро $\{v, v_0\}$.

Это вершины уровня 1. Затем берем каждую вершину v_i уровня 1 и для каждой вершины v_j и ребро $\{v_i, v_j\}$.

На втором этапе – это вершины уровня 2.

Процесс продолжается, пока в графе G не останется вершин, которые можно добавить в дерево. $\Rightarrow$ T является деревом.

Если расстояние от v_0 до вершины v графа G равно n, то эта вершина будет добавлена в дерево на уровне n. $\Rightarrow$ T является остовным деревом.

Алгоритм поиска остовного дерева в ширину — ПОДШ(G)

(1) Выбрать произвольный элемент v_0 графа G. Пусть $v_0 \in V^T$ и $L(v_0) = 0$.

(2) Для всех $v \in V - V^T$ таких, что v смежна с v_0, положить $v \in V^T$, $\{v_0, v\} \in E^T$ и $L(v) = 1$.

(3) Пусть $i = 1$.

(4) Выбрать $v_j \in V^T$ такое, что $L(v_j) = i$.

(5) Выбрать $v \in V - V^T$. Если v смежна с v_j, положить $v \in V^T$, $\{v_0, v\} \in E^T$ и $L(v) = i + 1$.

(6) Продолжать шаг 5, пока все элементы множества $V - V^T$ не будут рассмотрены. (Обратите внимание, что $V - V^T$ постоянно меняется.)

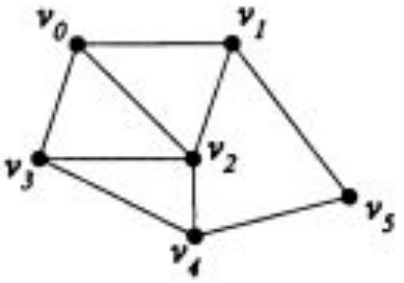
(7) Повторять шаги 4, 5, и 6, пока все v_j такие, что $L(v_j) = i$, не будут выбраны.

(8) Положить $i = i + 1$.

(9) Повторять шаги 4–8 до $V = V^T$.

Пример.

Граф



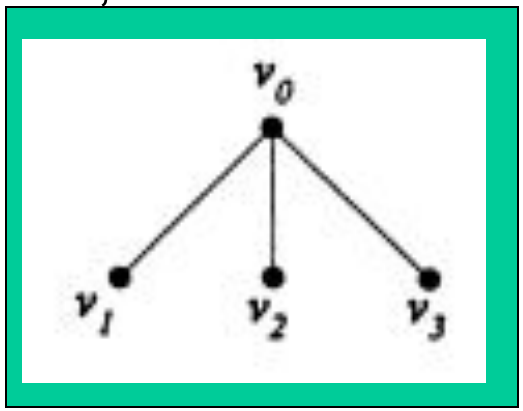
Пусть вершина v_0 выбрана в качестве первой вершины.

Тогда $L(v_0)=0$ и $v_0 \in V^T$. v_1 является смежной вершиной с v_0, положим $v_1 \in V^T$, $\{v_0, v_1\} \in E^T$ и $L(v_1)=1$.

Вершина v_2 смежна с v_0, положим $v_2 \in V^T$, $\{v_0, v_2\} \in E^T$ и $L(v_2)=1$.

Вершина v_3 смежна с v_0, положим $v_3 \in V^T$, $\{v_0, v_3\} \in E^T$ и $L(v_3)=1$.

Получаем дерево



Пример (продолжение).

Рассмотрим вершины v, что $L(v) = 1$.

Начнем с v_1, находим неиспользованные вершины, смежные с v_1.

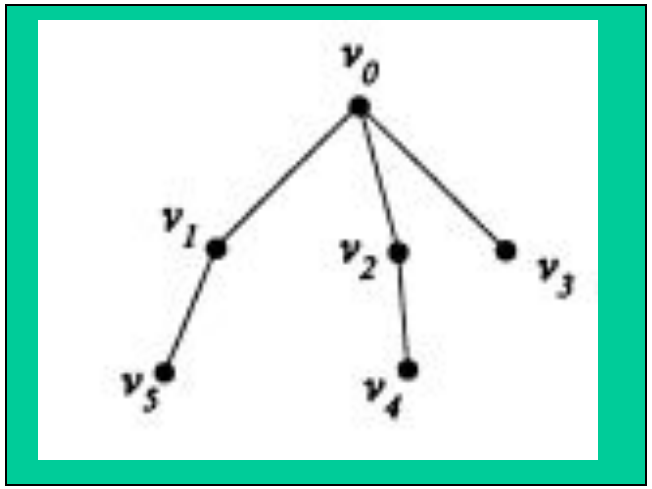
Вершина v_5 смежна с v_1, положим $v_5 \in V^T$, $\{v_1, v_5\} \in E^T$ и $L(v_5) = 2$.

Больше нет неиспользованных и смежных с v_1 вершин, переходим к v_2.

Вершина v_4 смежна с v_2, положим $v_4 \in V^T$, $\{v_2, v_4\} \in E^T$ и $L(v_4) = 2$.

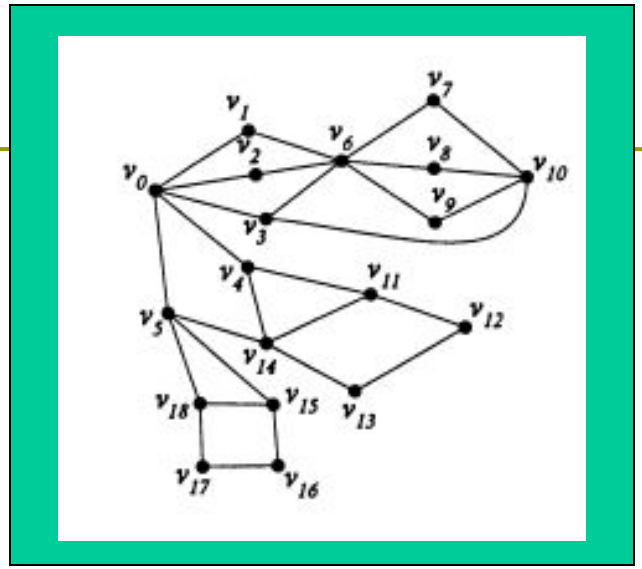
Все вершины использованы, процесс завершен.

Имеем дерево



Пример.

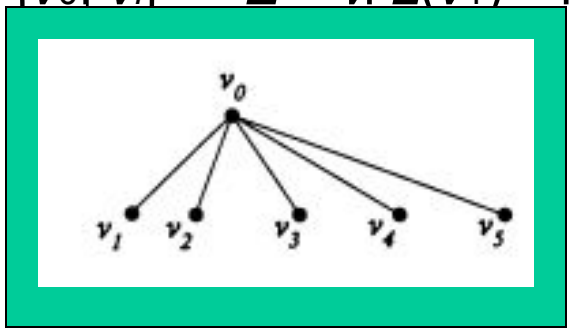
Граф



Выберем вершину v_0 как начальную.

Тогда $L(v_0) = 0$ и $v_0 \in V^T$. v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 являются смежными с v_0, положим $v_i \in V^T$, $\{v_0, v_i\} \in E^T$ и $L(v_1) = 1$, где $1 \le i \le 5$.

Получим дерево



Пример (продолжение).

Начинаем на уровне 1 с вершины v_1.

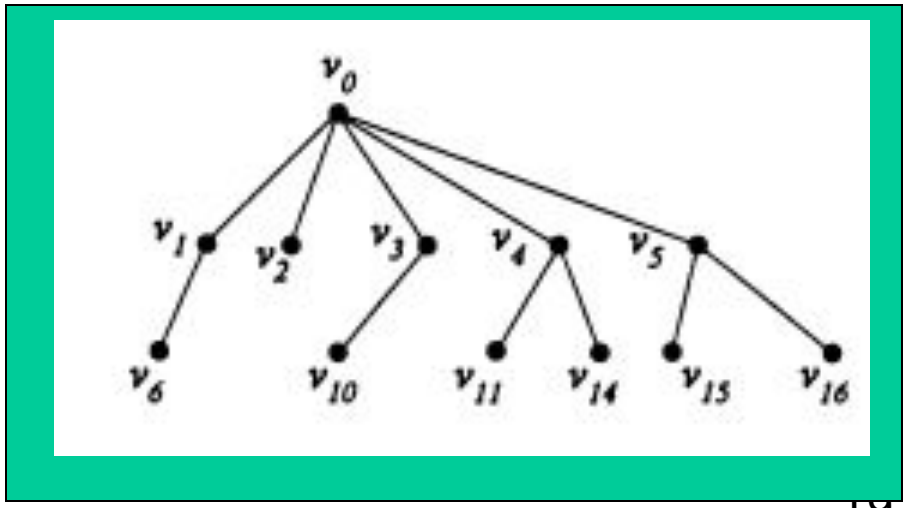
На этом уровне: вершина v_6 смежная с v_0, вершина v_{10} смежная с v_3, т.д.

$v_6, v_{10}, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{18} \in V^T$,

$L(v_6) = L(v_{10}) = L(v_{11}) = L(v_{14}) = L(v_{15}) = L(v_{18}) = 2$

$\{v_1, v_6\}, \{v_3, v_{10}\}, \{v_4, v_{11}\}, \{v_4, v_{14}\}, \{v_5, v_{15}\}\ \{v_5, v_{18}\} \in E^T$.

Получим дерево



Пример (продолжение).

Теперь на уровне 2 .

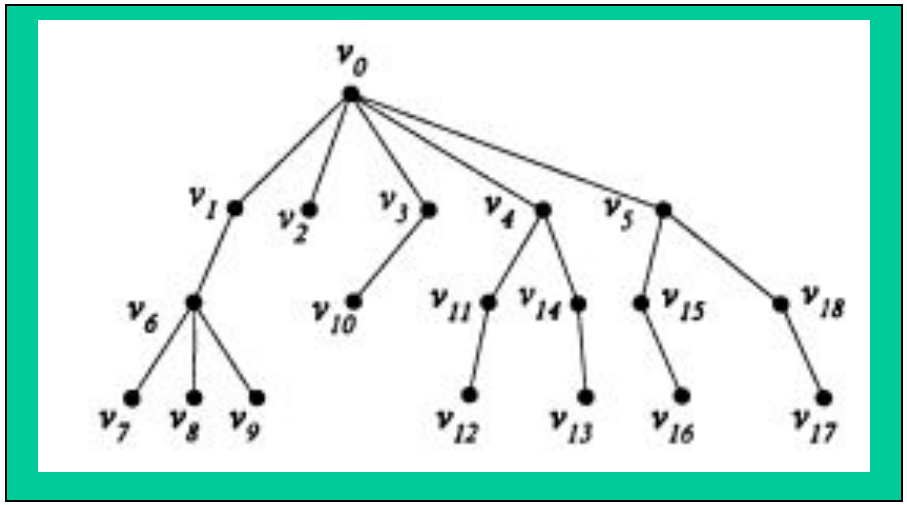
На этом уровне: вершины v_7, v_8, v_9 смежные с v_6, v_{12}, смежная с v_{11}, v_{13}, смежная с v_{14}, v_{16}, смежная с v_{15}, v_{17}, смежная с v_{18}.

$v_7, v_8, v_9, v_{12}, v_{16}, v_{17} \in V^T$,

$L(v_7) = L(v_8) = L(v_9) = L(v_{12}) = L(v_{13}) = L(v_{16}) = L(v_{17}) = 3$

$\{v_6, v_7\}, \{v_6, v_8\}, \{v_6, v_9\}, \{v_{11}, v_{12}\}, \{v_{14}, v_{13}\}, \{v_{16}, v_{13}\}, \{v_{17}, v_{18}\} \in E^T$.

Получим дерево



Обратное дерево.

При поиске в ширину вначале отыскиваются все вершины, смежные с заданной вершиной. Потом осуществляется переход на следующий уровень.

Главная цель при поиске в ширину - построение дерева как можно более длинного пути.

Когда путь заходит в тупик и формирует лист, необходимо возвращаться к родителю листа и пытаться формировать другой путь. Возврат к родителю происходит после попытки построить все возможные пути от сына этого родителя. Т.е. пытаемся достичь самый большой уровень, какой возможен.

Алгоритм начинается у заданной вершины графа, которую считают корнем. Выбирают вершину, смежную с корнем, формируют ребро дерева.

Затем выбирают вершину, смежную с ранее выбранной вершиной и формируют новое ребро. Необходимо помечать использованные вершины.

Обратное дерево.

Если, находясь в вершине *v*, выбираем другую вершину *w* и обнаруживается, что вершина w уже была добавлена в дерево, то ребро {*v*, *w*} между этими вершинами не может быть добавлено в дерево. Такое дерево называют ***обратным ребром***.

Чтобы объявить ребро обратным, необходимо проверить, не является ли вершина *w* родителем вершины *v*, т.к. ребро {*v*, *w*} уже присутствует в дереве.

При выборе *w* следует избегать случая, когда вершина w является родителем *v*. Если {*v*, *w*} - обратное ребро, то остаемся в *v* и выбираем новую смежную вершину, если это возможно.

Любое ребро графа – либо ***ребро дерева***, либо ***обратное ребро***.

В алгоритме множество ребер дерева называют ребра дерева, множество обратных ребер – обратные ребра.
“исп.” – использованные вершины, “нов.” – новые вершины.

Алгоритм поиска остовного дерева в глубину — ПОДГ(G)

(1) Пометить каждую вершину графа G символом n.

(2) Выбрать произвольный элемент v_0 графа G и назвать его корнем дерева.

(3) Заменить метку вершины v_0 с “*нов*” на “*исп*” и положить $v = v_0$

(4) Пока имеются невыбранные вершины, смежные с v, выполнять следующие действия:

а) Выбрать вершину w, смежную с v.

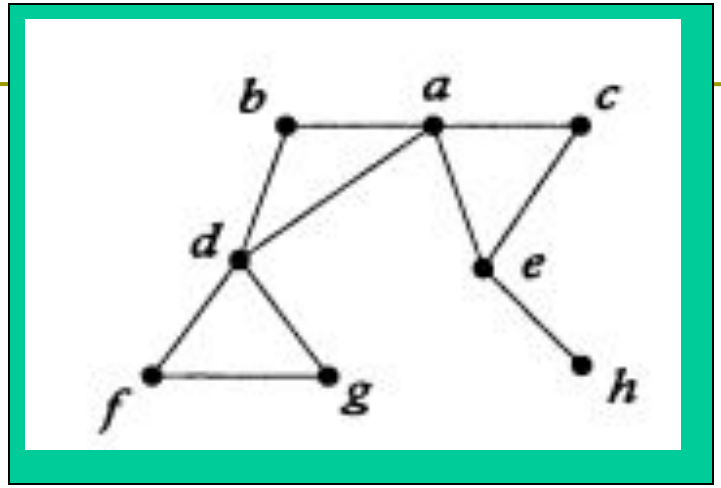
б) Если w имеет метку “*нов*”, добавить (v, w) в РЕБРА ДЕРЕВА, поменять метку w на “*исп*”, положить $w = v$ и повторить шаг 4.

в) Если w имеет метку “*исп*” и не является родителем v, добавить (v, w) в ОБРАТНЫЕ РЕБРА и повторить шаг 4.

(5) Если $v \neq a$, положить $v = (v)$ и повторить шаг 4.

Пример.

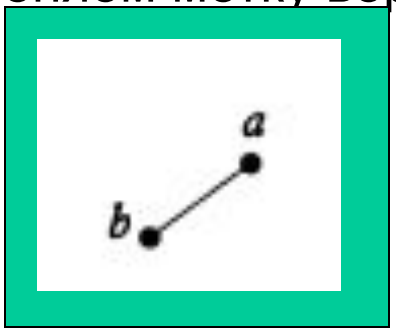
Граф



Произвольно выбирают вершину a в качестве корня.

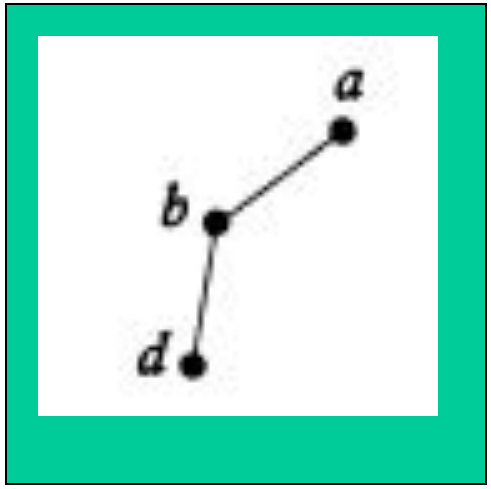
Меняем метку *a* с “нов.” на “исп.”

Вершина *b* смежна с *a* и имеет метку “нов.”, добавляем ребро {*a*, *b*} в ребра дерева и меняем метку вершины *b* на “исп.”



Пример (продолжение).

От вершины *b* переходим к вершине *d*, т.к. она является смежной с *b*. Вершина *d* имеет метку “нов.”, поэтому добавляем ребро {*b*, *d*} в ***ребра дерева*** и меняем метку вершины *d* на “исп.”



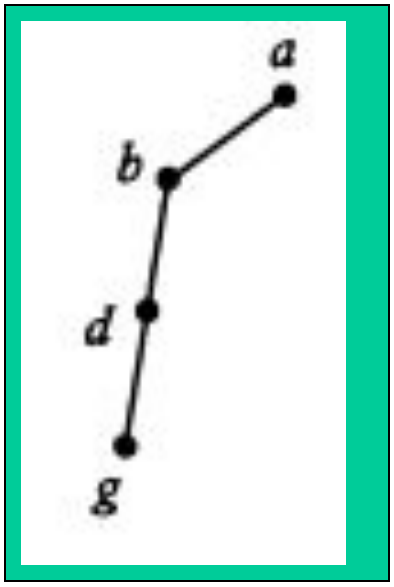
Пример (продолжение).

Выбираем вершину, смежную с вершиной *d*. (*a*, *f* или *g*)

Вершина *d* (поиск в глубину не единственный)

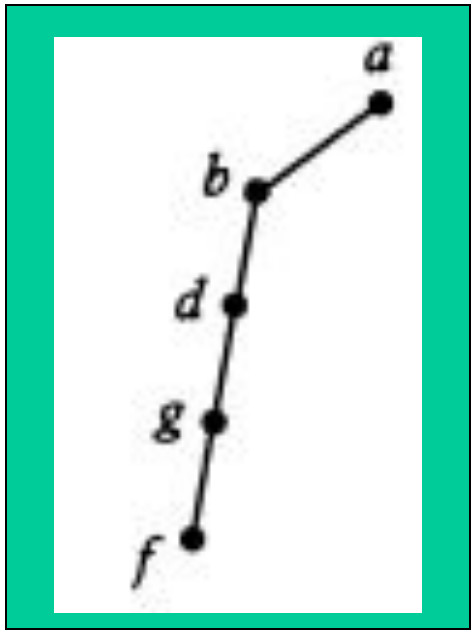
Следующей *g* (имеет метку “нов.”)

Добавляем ребро {*d*, *g*} в ***ребра дерева*** и меняем метку вершины g на “ исп.”



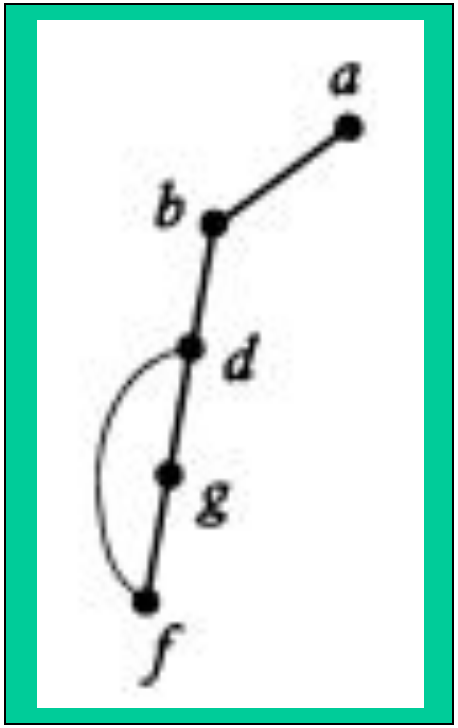
Пример (продолжение).

Из вершины *g* выбираем вершину *f*, т.к. она является смежной с *g*. Вершина *f* имеет метку “нов.”, поэтому добавляем ребро {*g*, *f*} в ***ребра дерева*** и меняем метку вершины *f* на “исп.”



Пример (продолжение).

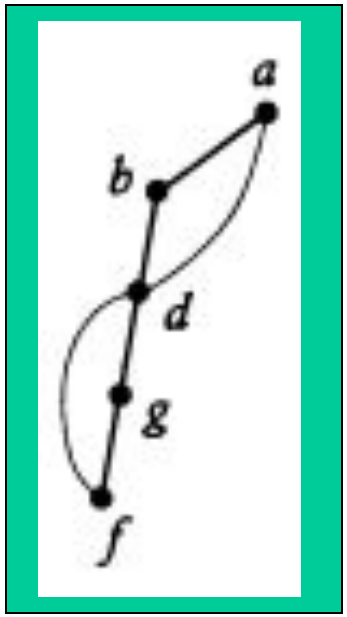
Из вершины *f* выбираем вершину *d*, т.к. она является смежной с *f*. Однако вершина *d уже* имеет метку “исп.”, поэтому добавляем ребро {*d*, *f*} в ***обратные ребра*** дерева



Пример (продолжение).

Больше нет ребер для проверки смежности с вершиной *f*, кроме родителя, возвращаемся к вершине *g*.

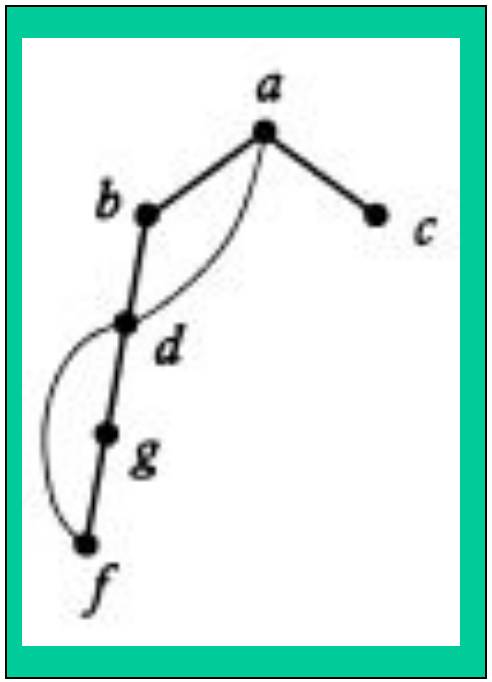
Иных ребер для проверки на смежность с вершиной *g* тоже нет, потому возвращаемся к вершине *d*. Единственной вершиной для проверки является вершина *a*, но а уже имеет метку “исп.”, поэтому ребро {*d*, *f*} добавляем в ***обратные ребра*** и возвращаемся в вершину *b*

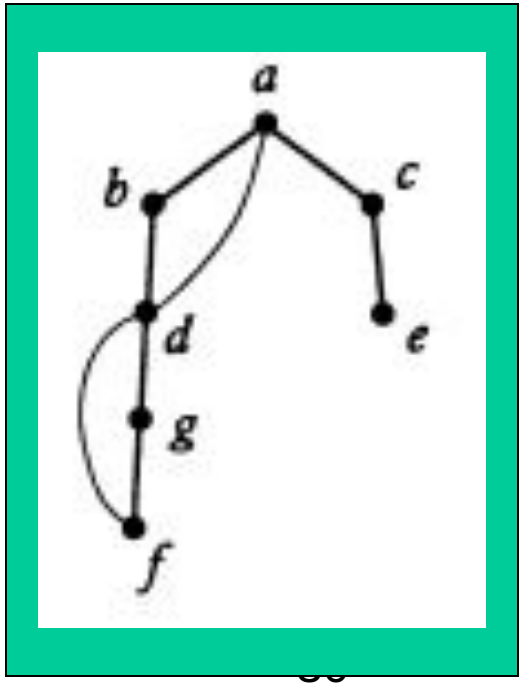


Пример (продолжение).

Ребер для проверки на смежность с вершиной *b* больше нет, возвращаемся к вершине *a*. Выбираем *c* или *e*.

Предположим, выбираем c (имеет метку “нов.”). Добавляем ребро {*a*,*c*} в ***ребра дерева*** и меняем метку вершины *c* на “исп.”

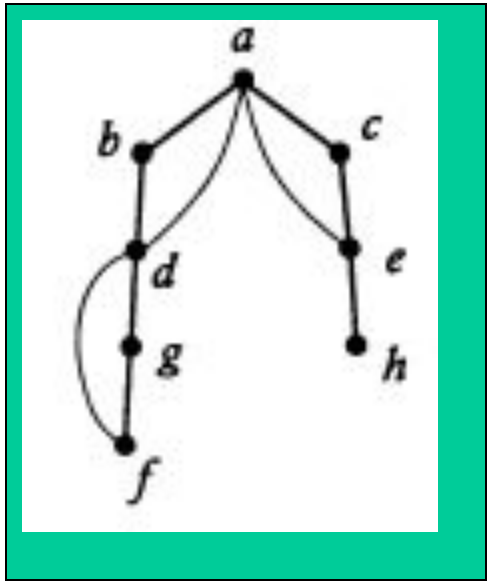




Пример (продолжение).

Вершина *h* смежна с вершиной *e* .

Добавляем ребро {*e*, *h*} в ***ребра дерева*** и меняем метку *e* на “исп.”



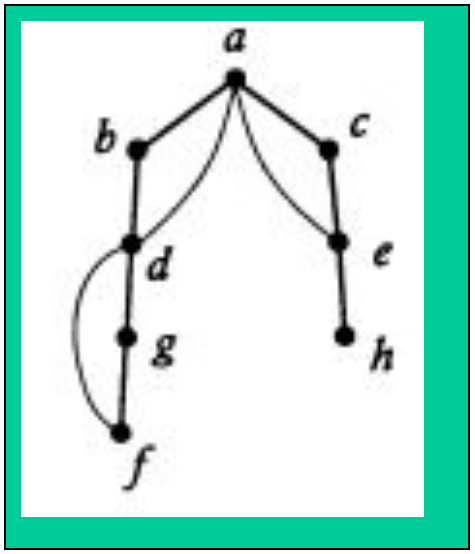
Пример (продолжение).

Больше нет вершин для поверки из вершины *h*, возвращаемся в вершину *e*.

Больше нет вершин для проверки из вершины *e*, возвращаемся в вершину *c*.

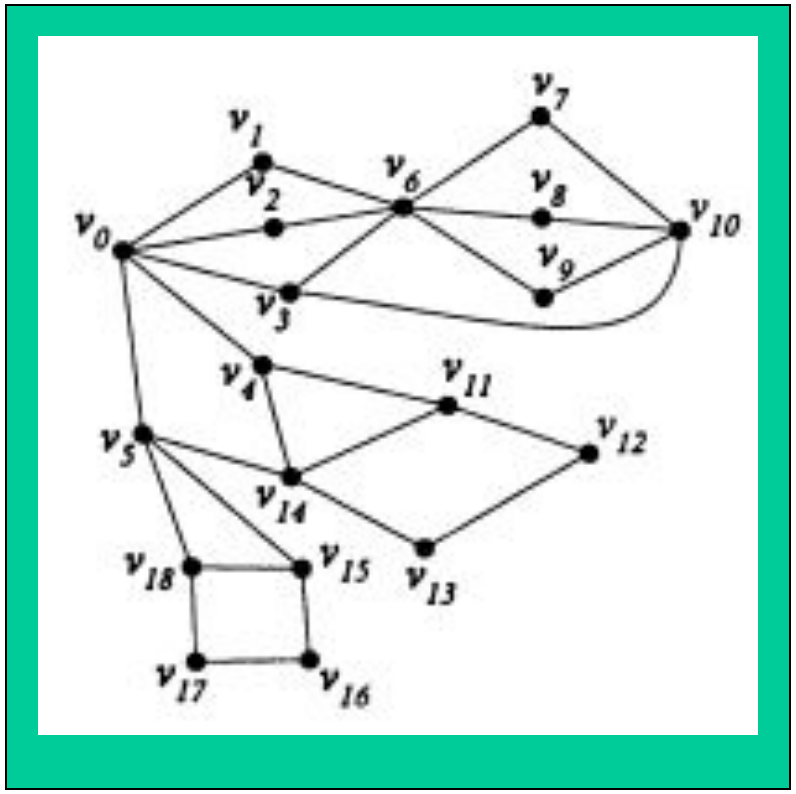
Больше нет вершин для проверки из вершины *c*, возвращаемся в вершину *a*.

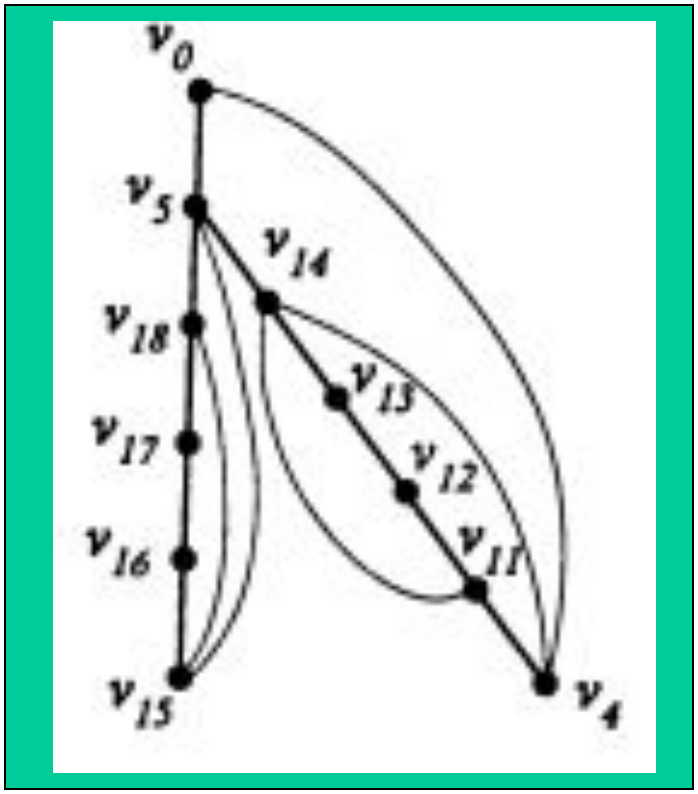
Других вершин для проверки из вершины *a* тоже нет. Процесс завершен.



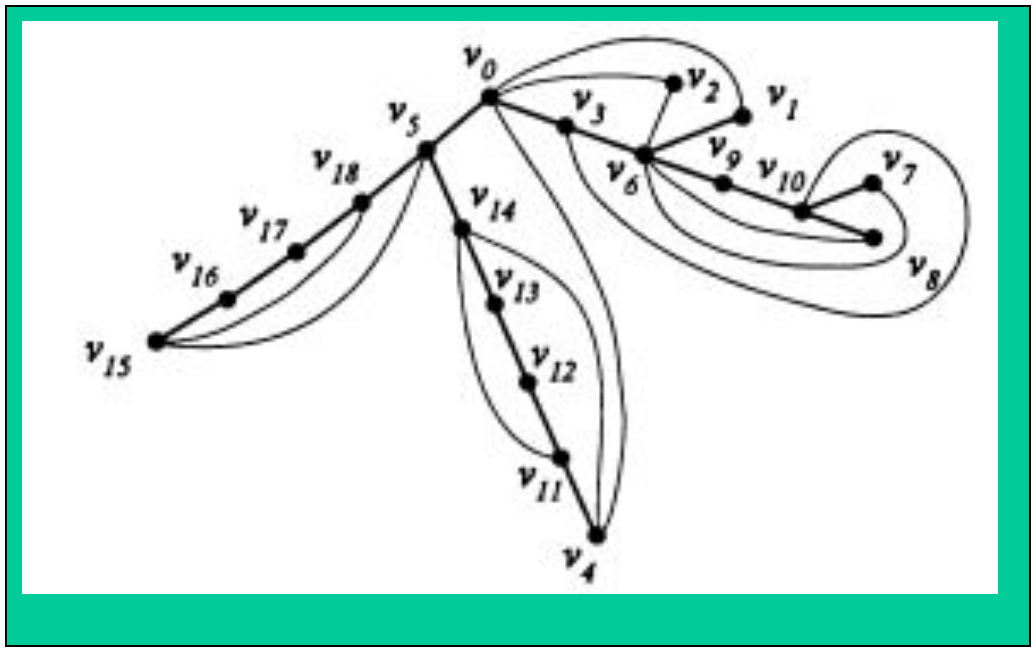
Пример.

Найти остовное дерево





Пример (продолжение).



Определение.

Лес остовных деревьев называется ***остовным лесом***.

Для построения остовного дерева следует выбрать вершину для корня первого дерева и построить остовное дерево.

Теорема (для построения остовного дерева в глубину).

Если T – глубинное остовное дерево графа $G(V, E)$ и $\{a, b\}$ – ребро графа $G(V, E)$, то либо a является потомком b, либо b является потомком a.

Доказательство:

Если $\{a, b\}$ – ребро дерева T, то вывод очевиден.

Если не так, то одна из вершин (a) должна быть помещена в дерево первой. Но вершина b не была помещена в дерево на шаге 4 алгоритма ПОДГ, то поиск продолжается из вершины a до тех пор, пока не будет найдена вершина b.

Поэтому вершина b является потомком a. Ч.т.д.

Теорема.

Пусть T – глубинное остовное дерево графа $G(V, E)$.

Вершина $a \in V$ является точкой сочленения графа $G(V, E)$ тогда и только тогда, когда вершина a (1) либо является корнем дерева T и имеет более одного сына, либо (2) вершина a не является корнем дерева T, и существует такой сын c, что между c, или одним из его потомков, и собственным предком вершины a не существует обратного ребра.

***OP* –** обратное ребро
***ЗС* –** значение счета (с является *n*-ой вершиной)

Алгоритм поиска точек сочленения — ПТС(v)

(1) Пометить v символом "*исп*".

(2) Присвоить i значение $i + 1$.

(3) Положить $OP(v) = ЗС(v) = i$.

(4) Пока имеется невыбранная вершина, смежная с v, выполнять следующее:

(а) Выбрать вершину w, которая является смежной с v.

(б) Если w имеет метку "*нов*", то:

(i) добавить (v, w) в РЕБРА ДЕРЕВА;

(ii) положить $v = \text{parent}(w)$;

(iii) вызвать ПТС(w);

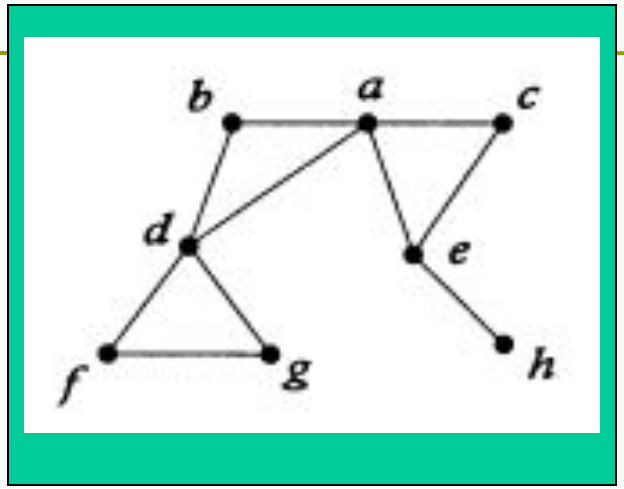
(iv) если $OP(w) \geq ЗС(v)$, то v — точка сочленения. Ребра, ниже v, которые охватывают компоненту, удаляются;

(v) положить $OP(v) = \min(OP(v), OP(w))$.

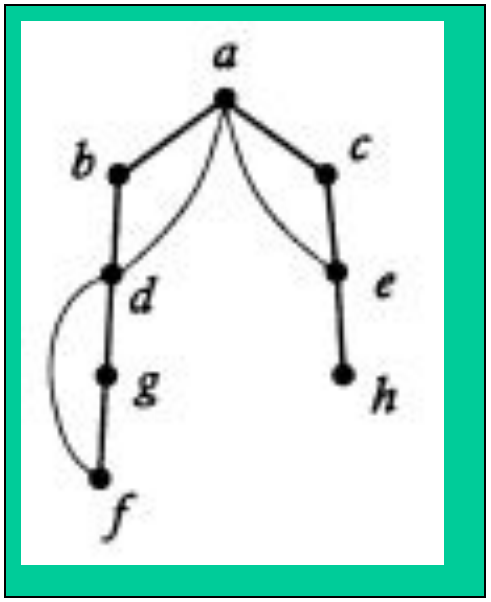
(г) Если w имеет метку "*исп*" и w не является $\text{parent}(w)$, то $OP(v) = \min(OP(v), ЗС(w))$.

Пример.

Граф



дерево



Теорема (Формула Кэли для дерева).

Число остовных деревьев для n размеченных вершин равно n^{n-2}

Алгоритм преобразования остовного дерева в последовательность.

Алгоритм перевода дерева в последовательность — ДвП(T) для $n \geq 3$

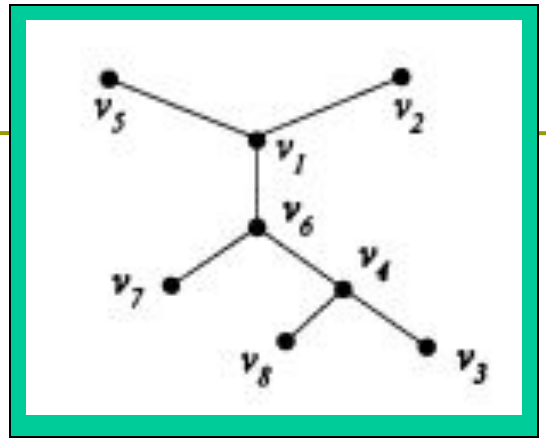
(1) Для выбора a_1 взять лист v_j с наименьшим значением j. Всегда существует единственное k такое, что $\{v_j, v_k\}$ является ребром дерева. Удалить это ребро и положить $a_1 = k$.

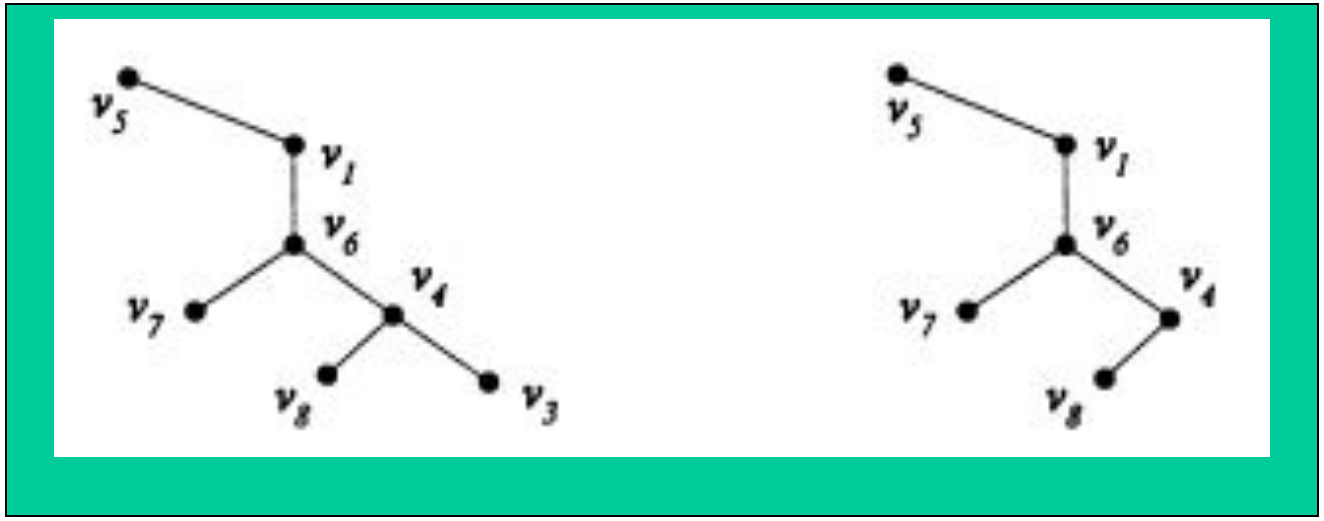
(2) Если выбрано a_{i-1}, то для выбора a_i из оставшегося дерева взять лист v_j с наименьшим значением j. Всегда существует единственное k такое, что $\{v_j, v_k\}$ является ребром дерева. Удалить это ребро и положить $a_i = k$.

(3) Продолжать, пока не будет выбрано a_{n-2}.

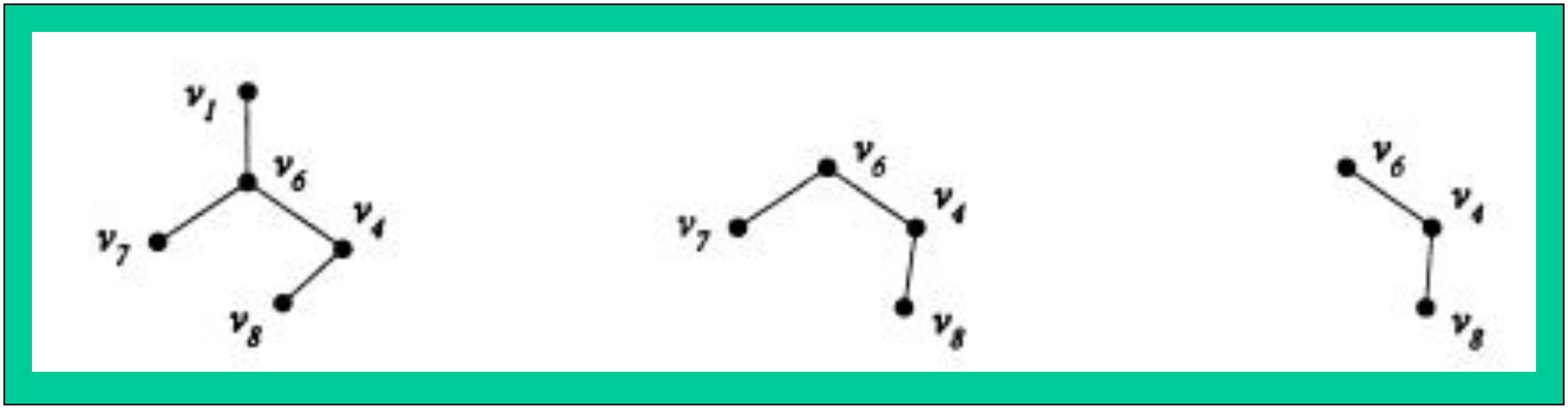
Пример.

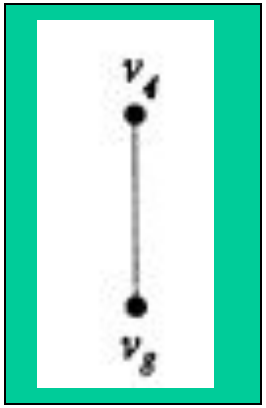
T - дерево





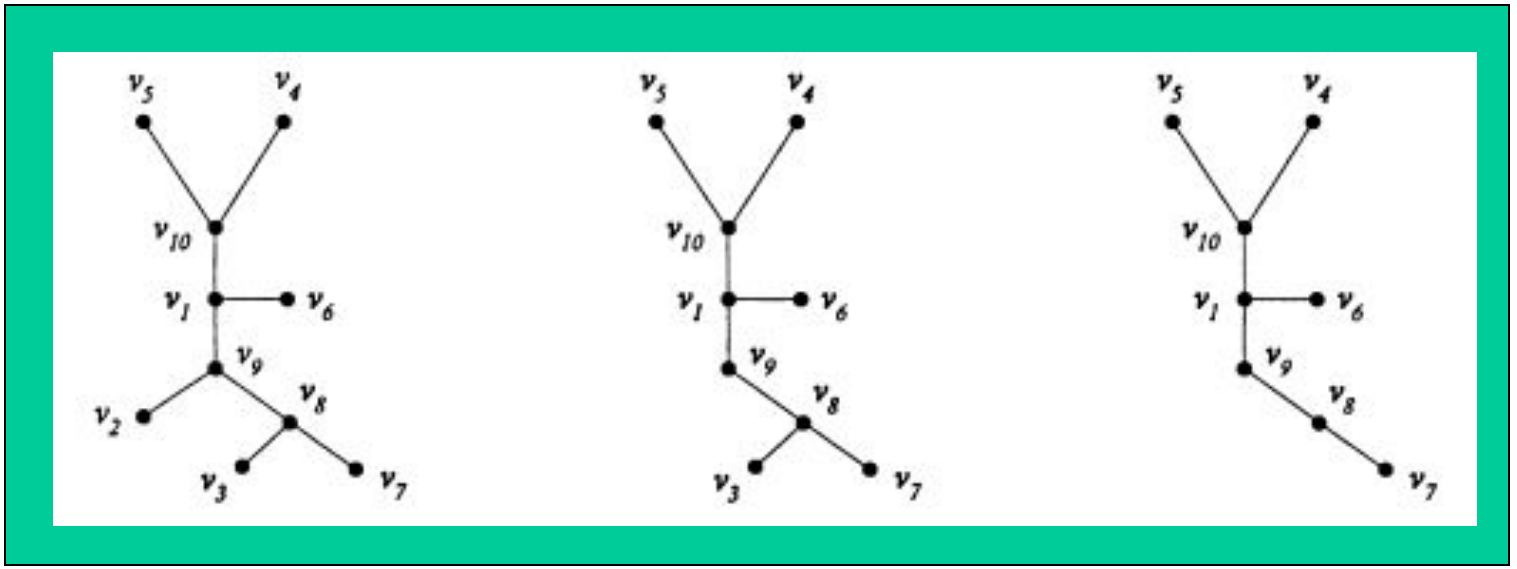
Пример (продолжение).





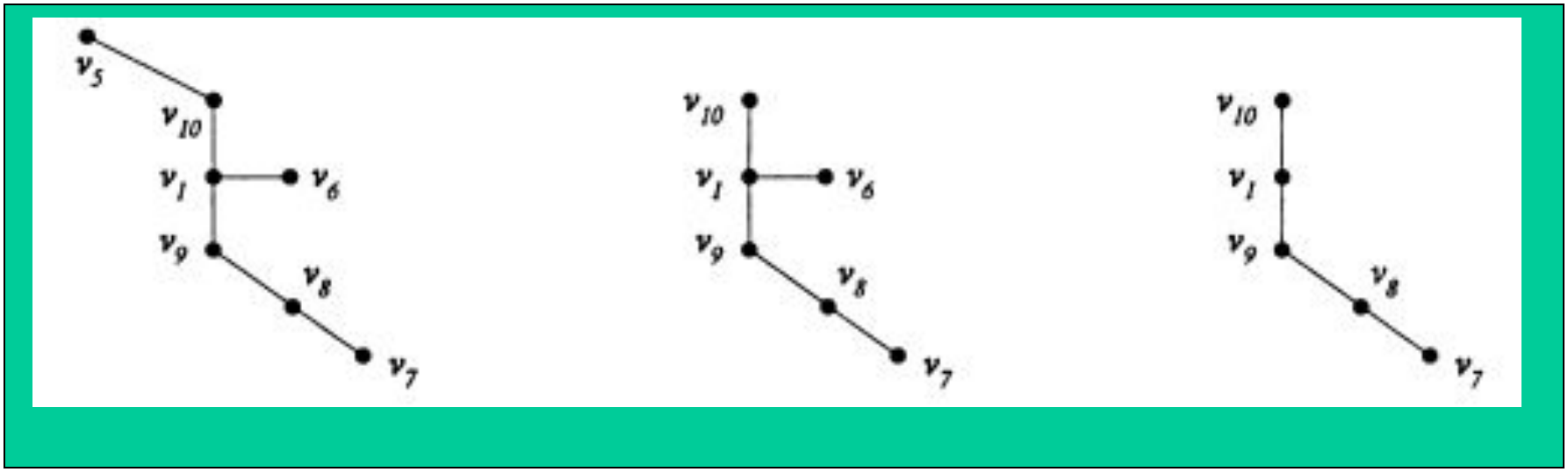
Пример (!).

Дерево T. v_2 – лист с наименьшим индексом. Удаляем ребро $\{v_2, v_9\}$ и полагаем $a_1 = 9$. В оставшимся дереве v_3 – лист с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_3, v_8\}$ и полагаем $a_2 = 8$.



Пример (продолжение).

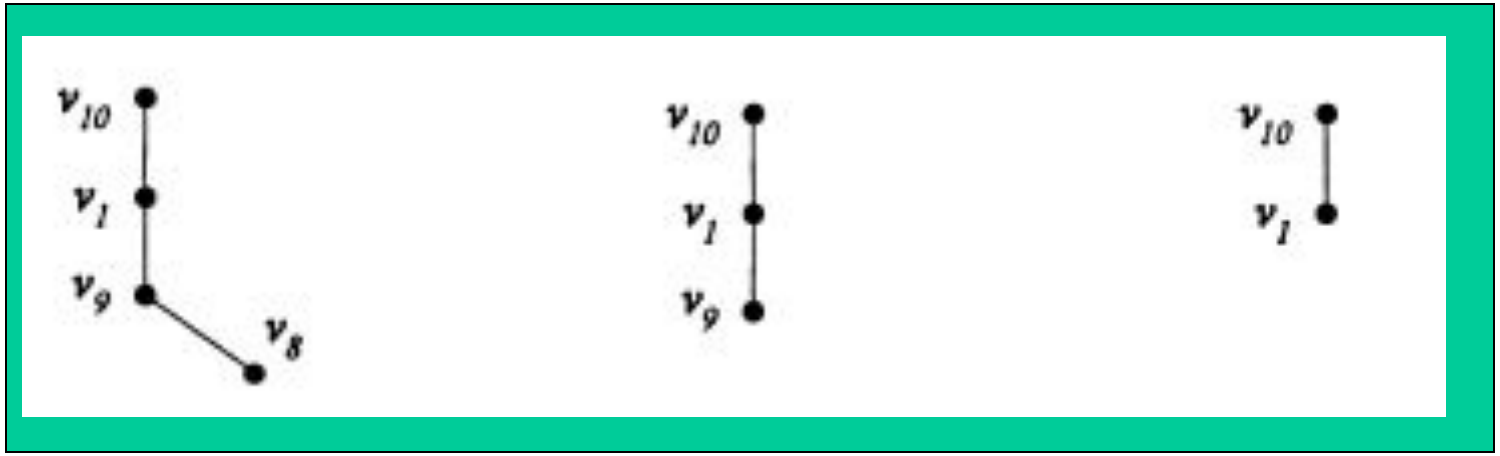
Вершина v_4 стала листом с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_4, v_{10}\}$ и полагаем $a_3 = 10$. Вершина v_5 стала листом с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_5, v_{10}\}$ и полагаем $a_4 = 10$. Вершина v_6 стала листом с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_6, v_1\}$ и полагаем $a_5 = 1$.



Пример (продолжение).

В оставшемся дереве вершина v_7 стала листом с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_7, v_8\}$ и полагаем $a_6 = 8$. Вершина v_8 стала листом с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_8, v_9\}$ и полагаем $a_7 = 9$.

Оставшаяся вершина v_9 стала листом с наименьшим индексом, удаляем ребро $\{v_9, v_1\}$ и полагаем $a_8 = 1$. Осталось ребро (справа)



Последовательность имеет вид

9, 8, 10, 10, 1, 8, 9, 1

Алгоритм перевода последовательности в дерево.

Алгоритм перевода последовательности в дерево — ПвД($a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$) для $n \geq 3$

(1) Для каждого v_i, если i появляется в последовательности n_i раз, положить $\deg(v_i) = n_i + 1$.

(2) Прочитать a_1 и сформировать ребро $\{v_{a_1}, v_j\}$, где j — наименьшая метка, такая что $\deg(v_j = 1)$.

(3) Уменьшить $\deg(v_{a_1})$ и $\deg(v_j)$ на 1.

(4) Предположим, что a_{i-1} прочитано, читать a_i и формировать ребро $\{v_{a_i}, v_j\}$, где j — наименьшая такая метка, что $\deg(v_j) = 1$.

(5) Уменьшить $\deg(v_{a_i})$ и $\deg(v_j)$ на 1.

(6) После того, как a_{n-2} прочитано, создать ребро между двумя оставшимися вершинами степени 1.

Пример.

Задана последовательность

1, 4, 1, 6, 6, 4

Восстановить дерево.

1, 4, 6 появляются в последовательности дважды,

$$\deg(v_1) = \deg(v_4) = \deg(v_6) = 3.$$

2, 3, 5 не встречаются вообще,

$$\deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_5) = \deg(v_7) = \deg(v_8) = 1.$$

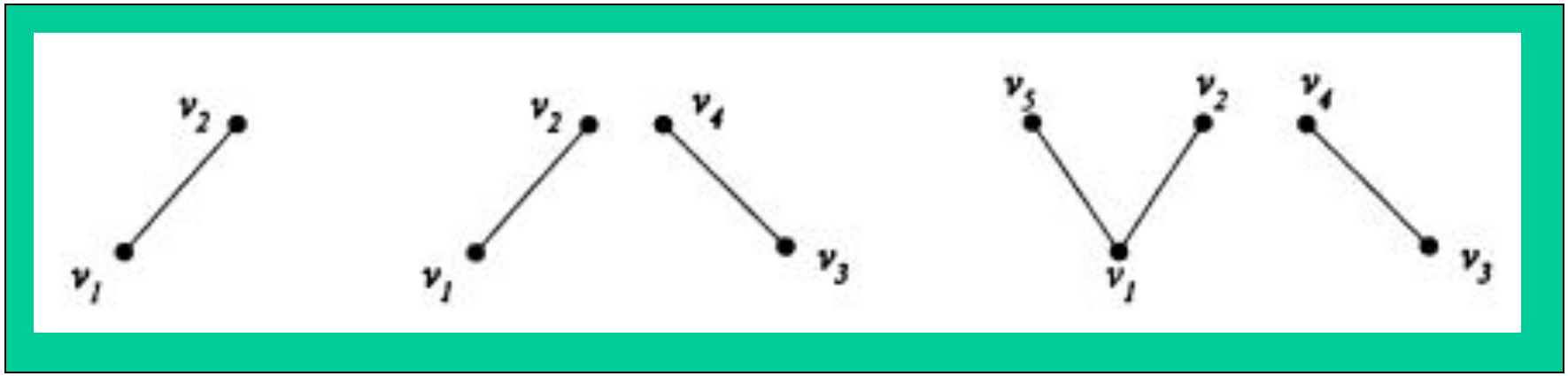
Запишем с их помощью восьмерки из чисел (3, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 1), которую называют восьмеркой степеней.

Считаем $a_1 = 1$, v_2 среди всех восьми вершин степени 1 имеет наименьший индекс, создаем ребро $\{v_1, v_2\}$ (рис. слева).

Положим $\deg(v_1) = 2$ и $\deg(v_2) = 0$, поэтому восьмерка степеней имеет вид (2, 0, 1, 3, 1, 3, 1, 1).

Пример (продолжение).

Далее считаем $a_2 = 4$, т.к. v_3 среди всех вершин степени 1 имеет наименьший индекс, создаем ребро $\{v_3, v_4\}$. Получаем граф (посередине)

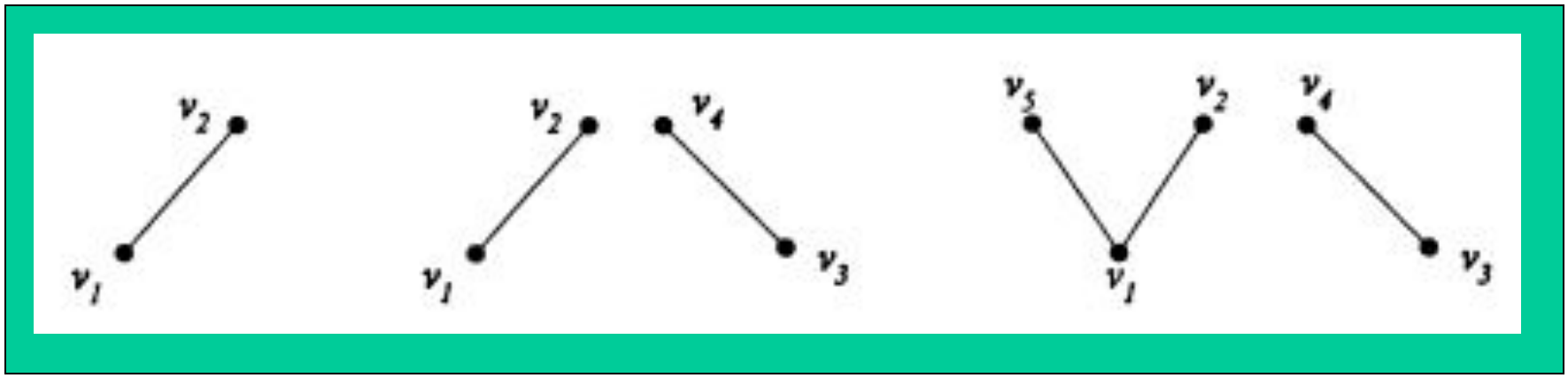


Пример (продолжение).

Полагаем $\deg(v_4) = 2$ и $\deg(v_3) = 0$, восьмерка степени имеет вид

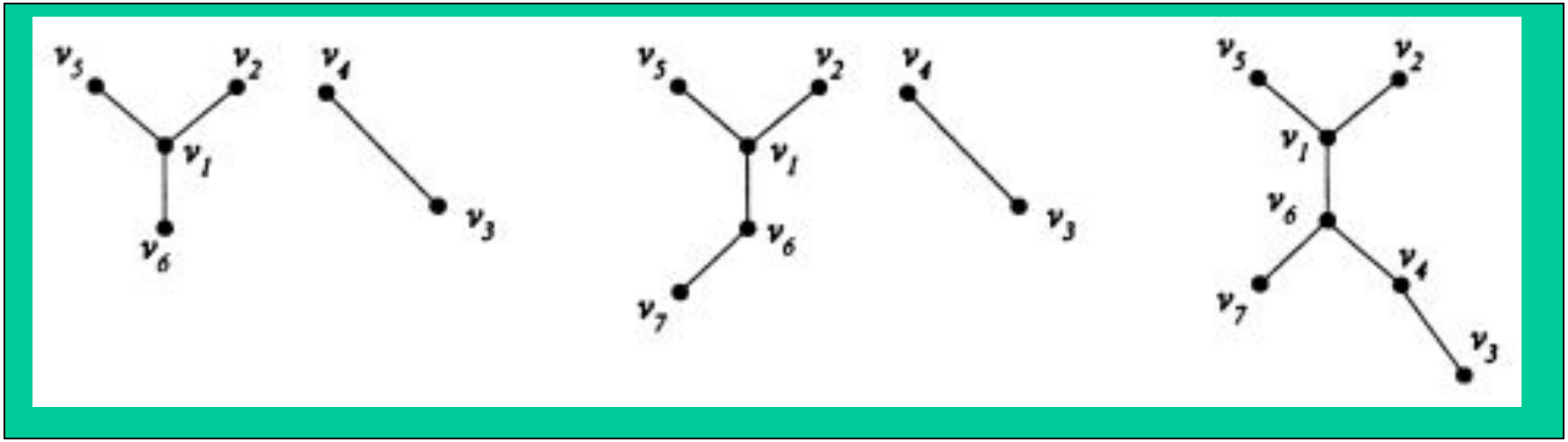
(2, 0, 0, 2 1, 3, 1, 1)

Теперь считаем $a_3 = 1$, т.к. v_5 среди всех вершин степени 1 имеет наименьший индекс, создаем ребро $\{v_1, v_5\}$. Получаем граф (слева)



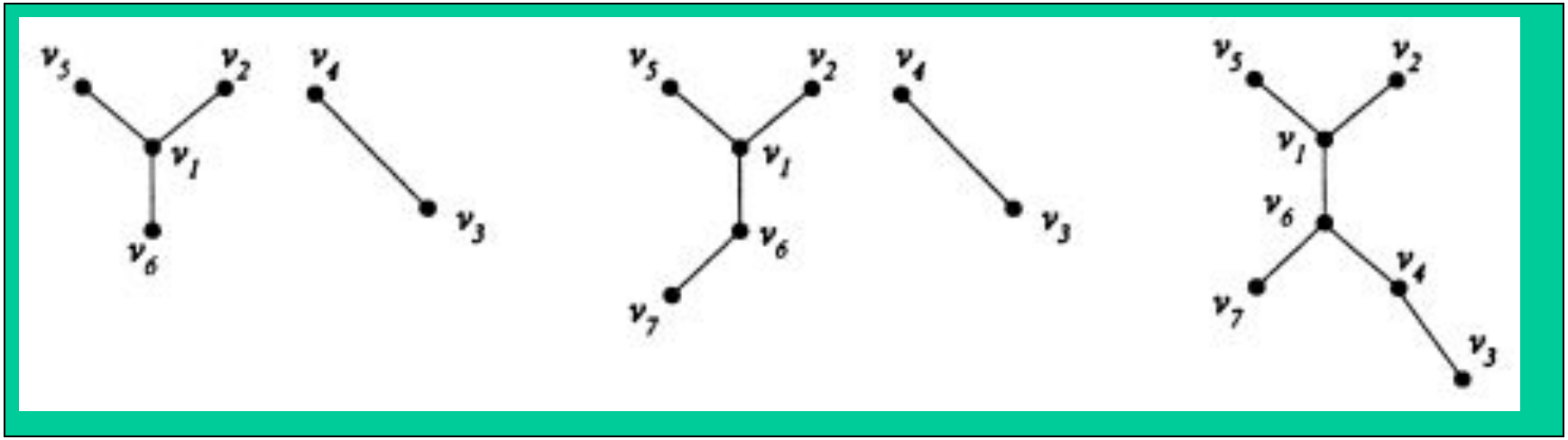
Пример (продолжение).

Полагаем $\deg(v_1) = 1$ и $\deg(v_5) = 0$, поэтому восьмерка степеней имеет вид (1, 0, 0, 2, 0, 3, 1, 1). Считаем $a_4 = 6$, т.к. v_1 среди всех вершин степени 1 имеет наименьший индекс, создаем ребро $\{v_1, v_6\}$. Получаем граф (слева)



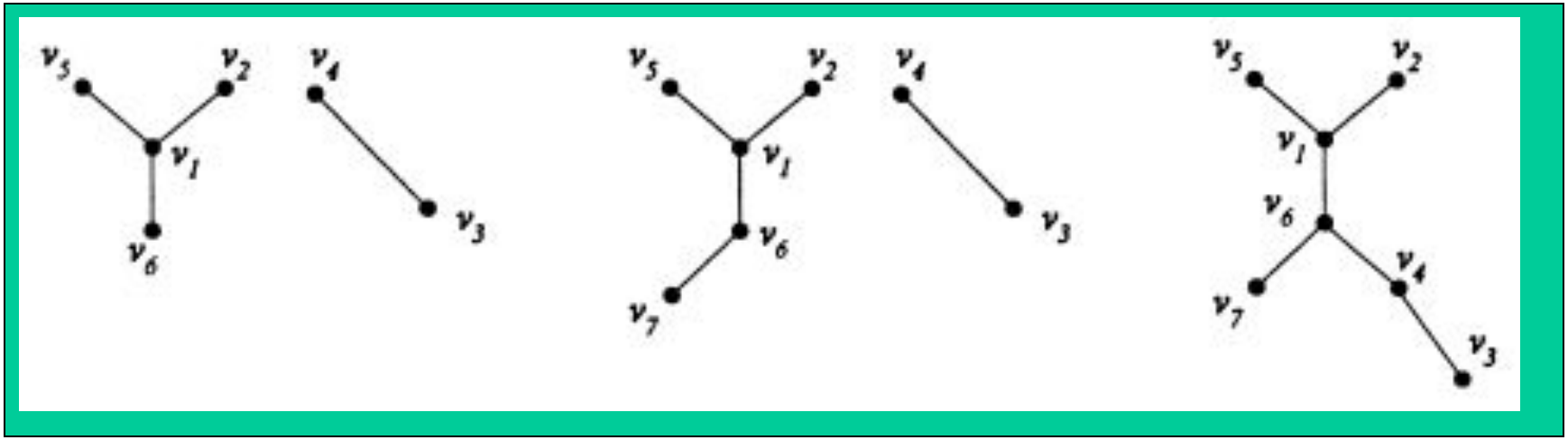
Пример (продолжение).

Полагаем deg(v_1) = 1 и deg(v_6) = 2, поэтому восьмерка степеней имеет вид (0, 0, 0, 2, 0, 2, 1, 1). Считаем $a_5 = 6$, т.к. v_7 среди всех вершин степени 1 имеет наименьший индекс, создаем ребро $\{v_7, v_6\}$. Получаем граф (посередине)



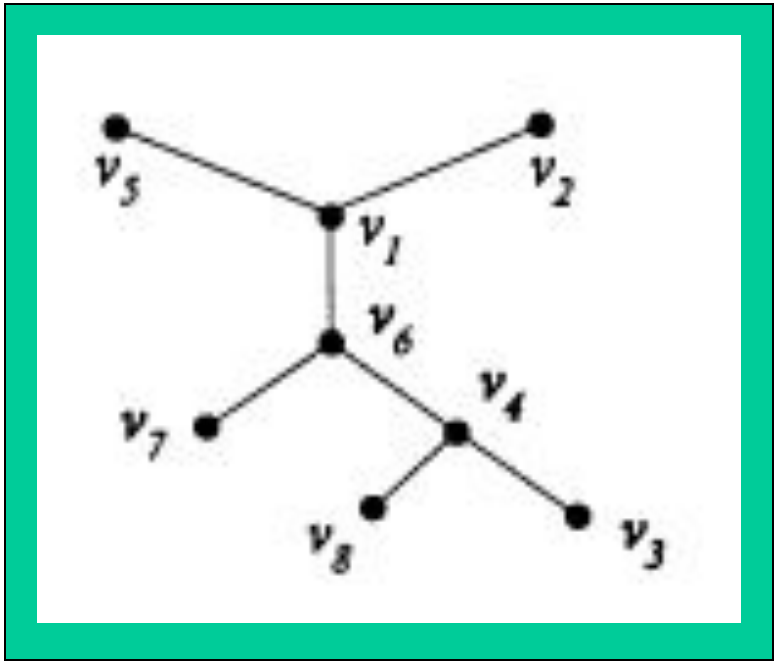
Пример (продолжение).

Полагаем deg(v_7) = 1 и deg(v_6) = 1, поэтому восьмерка степеней имеет вид (0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 1). Считаем $a_6 = 4$, т.к. v_6 среди всех вершин степени 1 имеет наименьший индекс, создаем ребро $\{v_4, v_6\}$. Получаем граф (справа)



Пример (продолжение).

Полагаем $\deg(v_4) = 1$ и $\deg(v_6) = 0$, поэтому восьмерка степеней имеет вид (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1). Все последовательности прочитаны и $\deg(v_4) = \deg(v_8) = 1$, формируем ребро $\{v_4, v_8\}$. Получаем искомое дерево



Определение.

Пусть G – граф с n размеченными вершинами $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Матрицей степеней графа G называется $n \times n$ матрица D, определенная следующим образом:

$D_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и D_{ii} равно степени вершины v_i .

Теорема (матричная формула Кирхгофа).

Пусть G – граф с помеченными вершинами. Пусть $K = D – A$,

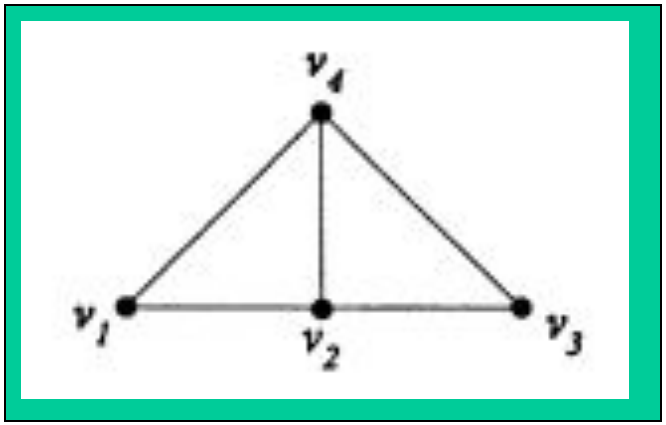
где A – матрица смежности графа G,

а D – матрица степеней графа G.

Число остовных деревьев графа G равна любому из алгебраических дополнений матрицы K.

Пример.

Найти количество остовных деревьев графа



Поскольку $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 2$ и $\deg(v_2) = \deg(v_4) = 3$,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Пример (продолжение).

Матрица *A* имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и

$$K = C - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Пример (продолжение).

Алгебраическое дополнение K_{11}

$$\det\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 3(5) - 4 - 3 = 8.$$

Следовательно, существует восемь остовных деревьев

Последний слайд лекции

!!