

# Математические модели процессов теплообмена. Кандидатский экзамен

Термодинамические процессы

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ В ЗАКРЫТЫХ СИСТЕМАХ

Основными процессами являются:

- изохорный, протекающий при постоянном объеме;
- изобарный, протекающий при постоянном давлении;
- изотермический, происходящий при постоянной температуре;
- адиабатный - процесс, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой;
- политропный, удовлетворяющий уравнению:

$$p v^n = \text{const}$$

# Изохорный процесс

При изохорном процессе выполняется условие  $dv = 0$  или  $v = const$ .

Из уравнения состояния идеального газа следует, что:

$$p/T = R/v = const,$$

т. е. давление газа прямо пропорционально его абсолютной температуре:

$$p_2/p_1 = T_2/T_1 \tag{1}$$

# Изохорный процесс

Работа расширения в этом процессе равна нулю, так как  $dv = 0$ .

Количество теплоты, подведенной рабочему телу в процессе при  $c_v = const$ , определяется из соотношений

$$q = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT = c_v (T_2 - T_1)$$

# Изохорный процесс

Так как  $l = 0$ , то в соответствии с первым законом термодинамики

$$\Delta u = q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta u = c_v (T_2 - T_1)$$

Поскольку внутренняя энергия идеального газа является функцией только его температуры, то формула справедлива для любого термодинамического процесса идеального газа.

# Изохорный процесс

Изменение энтропии в изохорном процессе определяется по формуле:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln (p_2/p_1) = c_v \ln (T_2/T_1),$$

т. е. зависимость энтропии от температуры имеет логарифмический характер

# Изобарный процесс

Из уравнения состояния идеального газа при  $p = \text{const}$  находим:

$$v/T = R/p = \text{const},$$

или:

$$v_2/v_1 = T_2/T_1,$$

т. е. в изобарном процессе объем газа пропорционален его абсолютной температуре (закон Гей-Люссака, 1802 г.).

# Изобарный процесс

Работа процесса:

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p (v_2 - v_1)$$

Так как  $p v_1 = R T_1$ ,  $p v_2 = R T_2$ , то также:

$$l = R (T_2 - T_1)$$

# Изобарный процесс

Количество теплоты, сообщаемое газу при нагревании (или отдаваемое им при охлаждении), находим из уравнения:

$$q = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT = c_p (T_2 - T_1)$$

# Изобарный процесс

Изменение энтропии при  $c_p = const$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln(T_2/T_1),$$

т. е. температурная зависимость энтропии при изобарном процессе тоже имеет логарифмический характер, но поскольку

$c_p > c_v$ , то изобара в  $T, s$ -диаграмме идет более полого, чем изохора.

# Изотермический процесс

При изотермическом процессе температура постоянна, следовательно,

$$pv = RT = \text{const},$$

или:

$$p_2/p_1 = v_1/v_2,$$

т. е. давление и объем обратно пропорциональны друг другу, так что при изотермическом сжатии давление газа возрастает, а при расширении — падает (закон Бойля - Мариотта, 1662 г.).

Графиком изотермического процесса в  $p, v$ -координатах, как показывает данное уравнение, является равнобокая гиперболоа, для которой координатные оси служат асимптотами.

# Изотермический процесс

Работа процесса:

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{v_1}^{v_2} RT dv / v =$$
$$= RT \ln(v_2 / v_1) = RT \ln(p_1 / p_2)$$

# Изотермический процесс

Так как температура не меняется, то внутренняя энергия идеального газа в данном процессе остается постоянной и вся подводимая к газу теплота полностью превращается в работу расширения:

$$q = l.$$

*При изотермическом сжатии от газа отводится теплота в количестве, равном затраченной на сжатие работе.*

# Изотермический процесс

Изменение энтропии в изотермическом процессе выражается формулой:

$$s_2 - s_1 = q/T = R \ln(p_1/p_2) = R \ln(v_2/v_1)$$

# Адиабатный процесс

Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, называется **адиабатным**. Для того чтобы осуществить такой процесс, следует либо теплоизолировать газ, т. е. поместить его в адиабатную оболочку, либо провести процесс настолько быстро, чтобы изменение температуры газа, обусловленное его теплообменом с окружающей средой, было пренебрежимо мало по сравнению с изменением температуры, вызванным расширением или сжатием газа. Как правило, это возможно, т.к. теплообмен происходит значительно медленнее, чем сжатие или расширение газа.

# Адиабатный процесс

Уравнения первого закона термодинамики для адиабатного процесса принимают вид:

$$dq = c_p dT - v dp = 0;$$

$$dq = c_v dT + p dv = 0.$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{c_p dT}{c_v dT} = -\frac{v dp}{p dv} \Rightarrow k \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p}$$

# Адиабатный процесс

Интегрируя последнее уравнение при условии, что  $k = c_p/c_v = \text{const}$ , находим

$$k \int_{v_1}^{v_2} dv / v = - \int_{p_1}^{p_2} dp / p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \ln(v_2 / v_1) = \ln(p_1 / p_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^k = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

# Адиабатный процесс

Величина  $k = c_p/c_v$  называется показателем адиабаты. Согласно классической кинетической теории теплоемкость газов не зависит от температуры, поэтому можно считать, что величина  $k$  также не зависит от температуры и определяется числом степеней свободы молекулы. Для одноатомного газа  $k = 1,66$ , для двухатомного  $k = 1,4$ , для трех- и многоатомных газов  $k = 1,33$ .

# Адиабатный процесс

Поскольку  $k > 1$ , то в координатах  $p, v$  линия адиабаты идет круче линии изотермы: при адиабатном расширении давление понижается быстрее, чем при изотермическом, так как в процессе расширения уменьшается температура газа.

# Адиабатный процесс

Определив из уравнения состояния отношение объемов или давлений и подставив их в данное уравнение, получим уравнение адиабатного процесса в форме, выражающей зависимость температуры от объема или давления

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} ;$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

# Адиабатный процесс

Работа расширения при адиабатном процессе согласно первому закону термодинамики совершается за счет уменьшения внутренней энергии и может быть вычислена по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} l &= -\Delta u = c_v (T_1 - T_2) = \\ &= \frac{R}{k-1} (T_1 - T_2) = \\ &= \frac{1}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \end{aligned}$$

# Адиабатный процесс

В данном процессе теплообмен газа с окружающей средой исключается, поэтому  $q = 0$ . Выражение  $c = dq/dT$  показывает, что теплоемкость адиабатного процесса равна нулю. Поскольку при адиабатном процессе  $dq = 0$ , энтропия рабочего тела не изменяется ( $ds = 0$  и  $s = const$ ). Следовательно, на  $T,s$ -диаграмме адиабатный процесс изображается вертикалью.

# Политропный процесс

Уравнение первого закона термодинамики:

$$dq = du + pdv \quad (1)$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pv = RT \quad (2)$$

Теплота в каком-либо процессе:  $dq = cdT$

Внутренняя энергия:  $du = c_v dT$

# Полиτροпный процесс

Из (1) и (2):

$$(c - c_v)dT = pdv \quad (3)$$

Продифференцируем уравнение (2):

$$d(pv) = RdT \quad (4)$$

Из уравнения (3) с учетом уравнения (4) получим:

$$(c - c_v) \frac{d(pv)}{R} = pdv \quad (5)$$

# Полиτροпный процесс

С учетом уравнения Майера уравнение (5) примет вид:

$$(c - c_v)d(pv) = (c_p - c_v)pdv$$

$$(c - c_v)pdv + (c - c_v)vdp = (c_p - c_v)pdv$$

Разделим это уравнение на  $pv$ :

$$(c - c_v)\frac{dv}{v} - (c_p - c_v)\frac{dv}{v} = -(c - c_v)\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$(c - c_v - c_p + c_v)\frac{dv}{v} = -(c - c_v)\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$(c - c_p)\frac{dv}{v} = -(c - c_v)\frac{dp}{p}$$

# Полиτροпный процесс

Пусть:  $c_p = const, c_v = const, c = const$

Тогда:

$$(c - c_p) \int \frac{dv}{v} = -(c - c_v) \int \frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{(c - c_p)}{(c - c_v)} \ln v + \ln p = const$$

Обозначим:

$$n = \frac{(c - c_p)}{(c - c_v)}$$

# Политропный процесс

$$n \ln v + \ln p = \text{const} \Rightarrow$$

$$\ln v^n + \ln p = \text{const} \Rightarrow$$

$$\ln(pv^n) = \text{const} \Rightarrow$$

$$pv^n = \text{const}$$

$$pv^n = \text{const}$$

(6)

Процесс, подчиняющийся данному уравнению называется политропным. **Политропный процесс** – это такой процесс, который протекает при постоянной теплоемкости.

# Политропный процесс

Частные случаи политропного процесса:

Адиабатный процесс ( $c=0$ )

$$n = \frac{c_p}{c_v} = k$$

где  $k$  – показатель адиабаты.

Тогда уравнение (6) приобретает вид:

$$p v^k = \text{const}$$

# Полиτροпный процесс

Изотермический процесс

$(c = \pm\infty)$

$$n = \frac{1 - \frac{c_p}{c}}{1 - \frac{c_v}{c}} = 1$$

Тогда уравнение (6) имеет вид:

$$pv = \text{const}$$

# Полиτροпный процесс

Изобарный процесс :  $c = c_p$

$$n=0$$

Тогда уравнение (6) принимает вид:

$$p = \text{const}$$

# Полиτροпный процесс

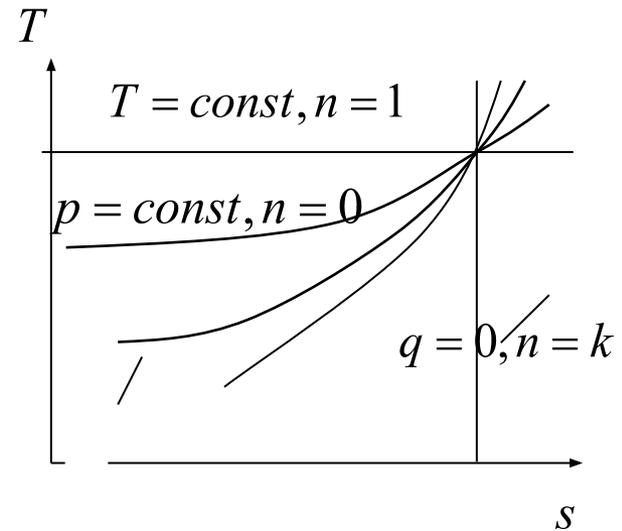
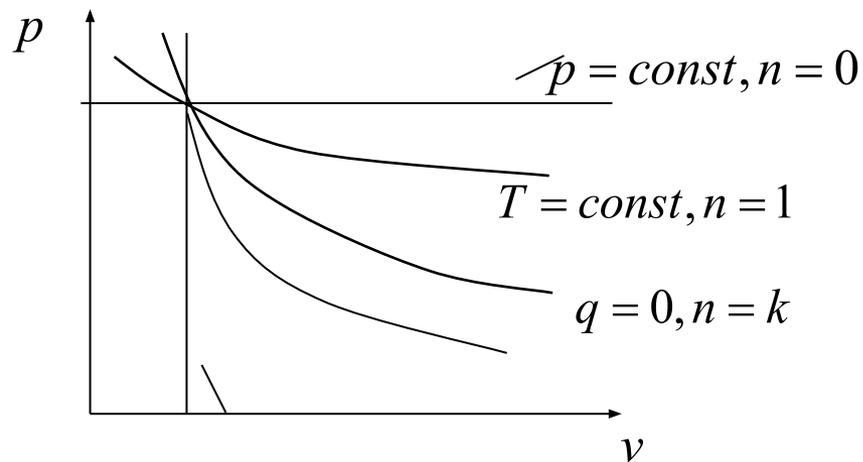
Изохорный процесс:  $n = \pm\infty$

Тогда уравнение (6) будет иметь вид:

$$v = \text{const}$$

# Полиτροпный процесс

Графики:



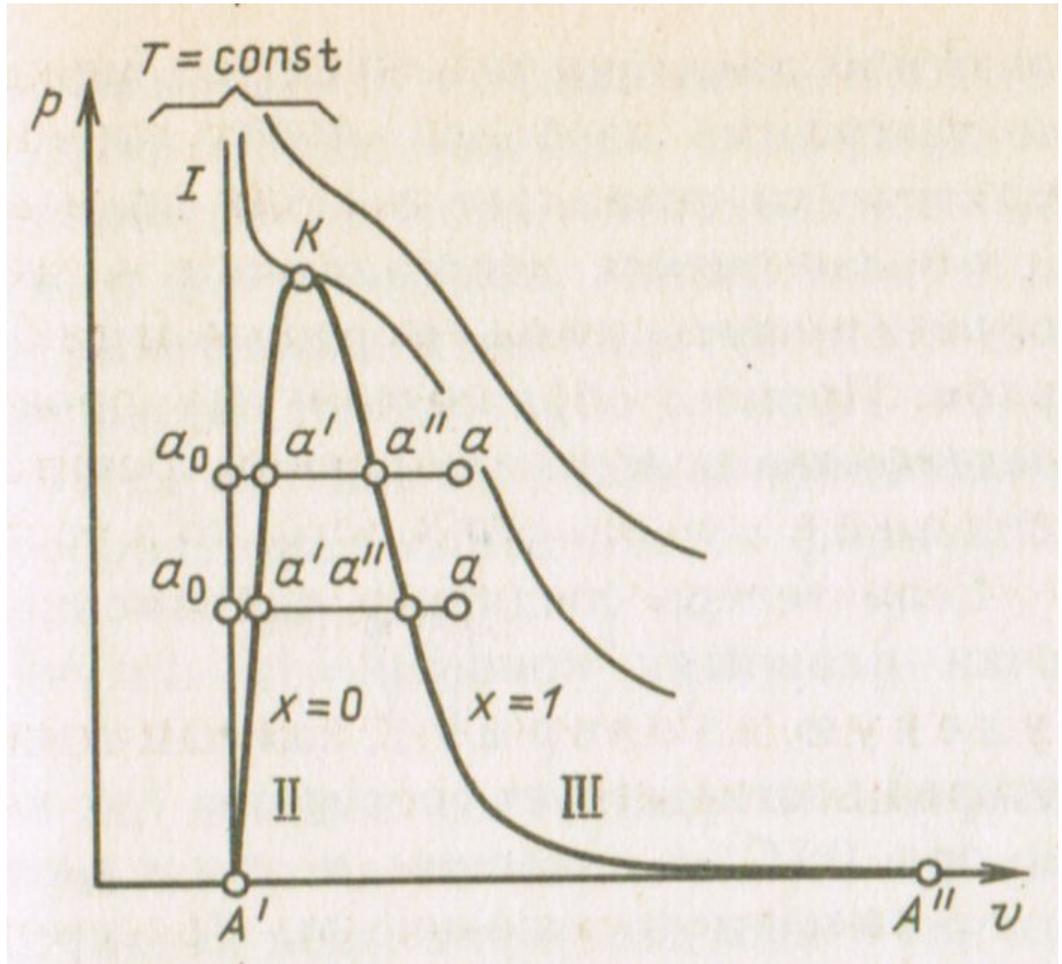
В качестве реального газа рассмотрим водяной пар, который широко используется во многих отраслях техники, и прежде всего в теплоэнергетике, где он является основным рабочим телом. Поэтому исследование термодинамических свойств воды и водяного пара имеет большое практическое значение.

# Основные понятия и определения

Рассмотрим процесс получения пара. Для этого 1 кг воды при температуре  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  поместим в цилиндр с подвижным поршнем. Приложим к поршню извне некоторую постоянную силу  $P$ . Тогда при площади поршня  $F$  давление будет постоянным и равным  $p=P/F$ . Изобразим процесс парообразования, т.е. превращения вещества из жидкого состояния в газообразное, в  $p, v$ -диаграмме.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

$p, v$ - диаграмма  
водяного пара



# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Начальное состояние воды, находящейся под давлением  $p$  и имеющей температуру  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  изобразится на диаграмме точкой  $a_0$ .

При подводе теплоты к воде ее температура постепенно повышается до тех пор, пока не достигнет температуры кипения  $t_s$ , соответствующей данному давлению. При этом удельный объем жидкости сначала уменьшается, достигает минимального значения при  $t = 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а затем начинает возрастать. (Такой аномалией - увеличением плотности при нагревании в некотором диапазоне температур - обладают немногие жидкости. У большинства жидкостей удельный объем при нагревании увеличивается монотонно.)

Состояние жидкости, доведенной до температуры кипения, изображается на диаграмме точкой  $a'$ .

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

При дальнейшем подводе теплоты начинается кипение воды с сильным увеличением объема. В цилиндре теперь находится двухфазная среда - смесь воды и пара, называемая **влажным насыщенным паром**. По мере подвода теплоты количество жидкой фазы уменьшается, а паровой - растет. Температура смеси при этом остается неизменной и равной  $t_s$ , так как вся теплота расходуется на испарение жидкой фазы.

Следовательно, процесс парообразования на этой стадии является **изобарно-изотермическим**.

Наконец, последняя капля воды превращается в пар, и цилиндр оказывается заполненным только паром, который называется **сухим насыщенным**. Состояние его изображается точкой  $a''$ .

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

**Насыщенным** называется пар, находящийся в термическом и динамическом равновесии с жидкостью, из которой он образуется.

Динамическое равновесие заключается в том, что количество молекул, вылетающих из воды в паровое пространство, равно количеству молекул, конденсирующихся на ее поверхности. В паровом пространстве при этом равновесном состоянии находится максимально возможное при данной температуре число молекул. При увеличении температуры количество молекул, обладающих энергией, достаточной для вылета в паровое пространство, увеличивается. Равновесие восстанавливается за счет возрастания давления пара, которое ведет к увеличению его плотности и, следовательно, количества молекул, в единицу времени конденсирующихся на поверхности воды.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Отсюда следует, что давление насыщенного пара является монотонно возрастающей функцией его температуры, или, что то же самое, температура насыщенного пара есть монотонно возрастающая функция его давления.

При увеличении объема над поверхностью жидкости, имеющей температуру насыщения, некоторое количество жидкости переходит в пар, при уменьшении объема «излишний» пар снова переходит в жидкость, но в обоих случаях давление пара остается постоянным.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Насыщенный пар, в котором отсутствуют взвешенные частицы жидкой фазы, называется **сухим насыщенным паром**. Его удельный объем и температура являются функциями давления, поэтому состояние сухого пара можно задать любым из параметров — давлением, удельным объемом или температурой.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Двухфазная смесь, представляющая собой пар со взвешенными в нем капельками жидкости, называется **влажным насыщенным паром**.

Массовая доля сухого насыщенного пара во влажном называется **степенью сухости пара** и обозначается буквой  $x$ . Массовая доля кипящей воды во влажном паре, равная  $1-x$ , называется **степенью влажности**.

Для кипящей жидкости  $x = 0$ , а для сухого насыщенного пара  $x = 1$ .

Состояние влажного пара характеризуется двумя параметрами: давлением (или температурой насыщения  $t_s$ , определяющей это давление) и степенью сухости пара.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

При сообщении сухому пару теплоты при том же давлении его температура будет увеличиваться, пар будет перегреваться. Точка  $a$  изображает состояние **перегретого пара** и в зависимости от температуры пара может лежать на разных расстояниях от точки  $a''$ .

Таким образом, **перегретым** называется пар, температура которого превышает температуру насыщенного пара того же давления.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Так как удельный объем перегретого пара при том же давлении больше, чем насыщенного, то в единице объема перегретого пара содержится меньшее количество молекул, значит, он обладает меньшей плотностью. Состояние перегретого пара, как и любого газа, определяется двумя любыми независимыми параметрами.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Если рассмотреть процесс парообразования при более высоком давлении, то можно заметить следующие изменения. Точка  $a_0$ , соответствующая состоянию 1 кг воды при  $0^\circ\text{C}$  и новом давлении, остается почти на той же вертикали, так как вода практически несжимаема. Точка  $a'$  смещается вправо, т.к. с ростом давления увеличивается температура кипения, а жидкость при повышении температуры расширяется. Несмотря на увеличение температуры кипения, удельный объем пара все-таки падает из-за более сильного влияния растущего давления.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Поскольку удельный объем жидкости растет, а пара падает, то при постоянном увеличении давления мы достигнем такой точки, в которой удельные объемы жидкости и пара сравняются. Эта точка называется **критической**.

В критической точке различия между жидкостью и паром исчезают.

Для воды параметры критической точки  $K$  составляют:  $t_{кр} = 374,15^\circ\text{C}$ ;

$$p_{кр} = 221,29 \cdot 10^5 \text{ Па}, v_{кр} = 0,00326 \text{ м}^3 / \text{кг} \quad (c - c_v) \frac{dp}{p} \Rightarrow$$

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Критическая температура — это максимально возможная температура сосуществования двух фаз: жидкости и насыщенного пара. При температурах, больших критической, возможно существование только одной фазы.

Название этой фазы (жидкость или перегретый пар) в какой-то степени условно и определяется обычно ее температурой.

Все газы являются сильно перегретыми сверх  $t_{кр}$  парами. Чем выше температура перегрева (при данном давлении), тем ближе пар по своим свойствам к идеальному газу.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Наименьшим давлением, при котором еще возможно равновесие воды и насыщенного пара, является давление, соответствующее **тройной точке**. Это единственное состояние, в котором могут одновременно находиться в равновесии пар, вода и лед (точка  $a'$ ).

Параметры тройной точки для воды:  $p_0 = 611 \text{ Па}$ ;  
 $t_0 = 0,01 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $v_0 = 0,00100 \text{ м}^3/\text{кг}$ .

При более низких давлениях пар может сосуществовать лишь в равновесии со льдом.

Процесс образования пара непосредственно из льда называется **сублимацией**.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Если соединить одноименные точки плавными кривыми, то получим нулевую изотерму I, каждая точка которой соответствует состоянию 1 кг воды при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  и давлении  $p$ , нижнюю пограничную кривую II, представляющую зависимость от давления удельного объема жидкости при температуре кипения, и верхнюю пограничную кривую III, дающую зависимость удельного объема сухого насыщенного пара от давления.

# $p, v$ - диаграмма водяного пара

Все точки горизонталей между кривыми II и III соответствуют состояниям влажного насыщенного пара, точки кривой II определяют состояние кипящей воды, точки кривой III — состояния сухого насыщенного пара.

Влево от кривой II до нулевой изотермы лежит область некипящей однофазной жидкости, вправо от кривой III — область перегретого пара.

Таким образом, кривые II и III определяют область насыщенного пара, отделяя ее от области воды и перегретого пара, и поэтому называются **пограничными**.

Выше точки  $K$ , где пограничных кривых нет, находится область однофазных состояний, в которой нельзя провести четкой границы между жидкостью и паром.

# Определение параметров воды и пара

Термодинамические параметры кипящей воды и сухого насыщенного пара берутся из таблиц теплофизических свойств воды и водяного пара. В этих таблицах термодинамические величины со штрихом относятся к воде, нагретой до температуры кипения, а величины с двумя штрихами — к сухому насыщенному пару.

Поскольку для изобарного процесса подведенная к жидкости теплота  $q = h_2 - h_1$ , то, применив это соотношение к процессу  $a'a''$ , получим  $q = r = h'' - h'$ .

Величина  $r$  называется **теплотой парообразования** и определяет количество теплоты, необходимое для превращения одного килограмма воды в сухой насыщенный пар той же температуры.

# Определение параметров воды и пара

Приращение энтропии в процессе парообразования:

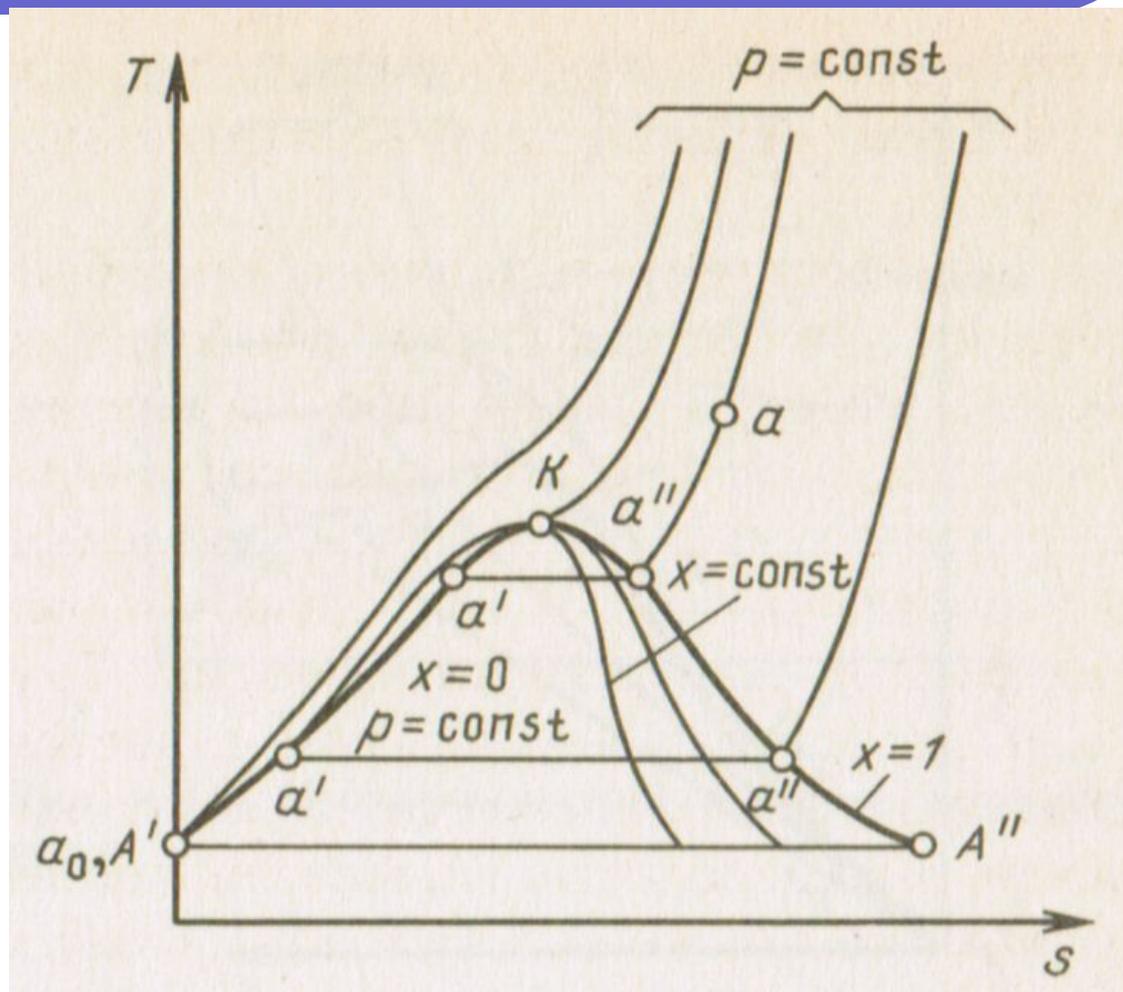
$$s'' - s' = \int \frac{dq}{T} = \frac{1}{T_s} \int dq = \frac{r}{T_s}$$

За нулевое состояние, от которого отсчитываются величины  $s'$ ,  $s''$ , принято состояние воды в тройной точке.

Так как состояние кипящей воды и сухого насыщенного пара определяется только одним параметром, то по известному давлению или температуре из таблиц воды и водяного пара берутся значения функций состояния.

# T, s-диаграмма водяного пара

T, s-диаграмма  
водяного пара



# T, s-диаграмма водяного пара

T,s- диаграмма строится путем переноса числовых данных таблиц водяного пара в T,s- координаты.

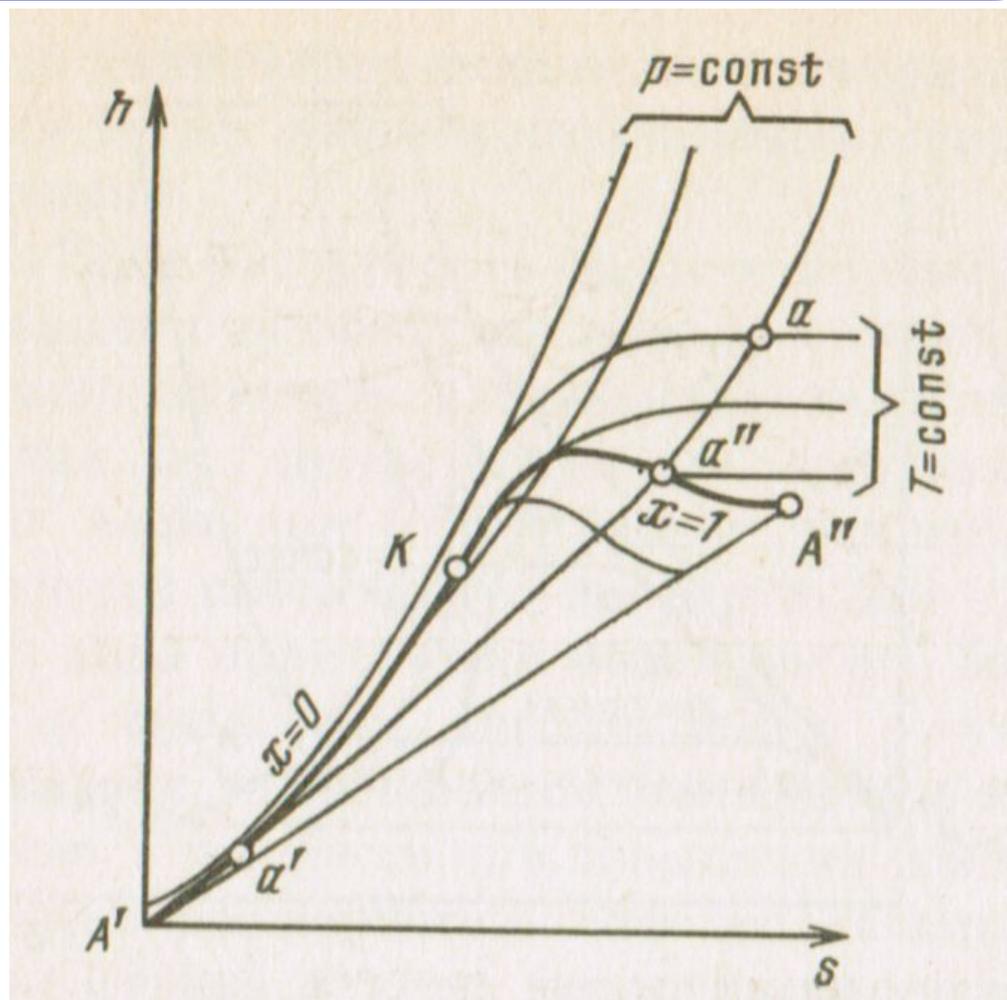
Состояние воды в тройной точке ( $s_0 = 0$ ;  $T_0 = 273,16\text{K}$ ) изображается в диаграмме точкой A'. Влево от нижней пограничной кривой располагается область жидкости, между пограничными кривыми - двухфазная область влажного насыщенного пара, вправо и вверх от верхней пограничной кривой - область перегретого пара.

На диаграмму наносят изобары, изохоры и линии постоянной степени сухости, для чего каждую изобару  $a'a''$  делят на одинаковое число частей и соединяют соответствующие точки линиями  $x = const$ .

Область диаграммы, лежащая ниже нулевой изотермы, отвечает различным состояниям смеси пар + лед.

# h, s-диаграмма водяного пара

h, s-диаграмма  
водяного пара



# $h, s$ -диаграмма водяного пара

За начало координат принято состояние воды в тройной точке. Откладывая на диаграмме для различных давлений значения  $s'$  и  $h'$  для воды при температуре кипения, а также  $s''$  и  $h''$  для сухого насыщенного пара, получаем нижнюю и верхнюю пограничные кривые.

Изобары в двухфазной области влажного пара представляют собой пучок расходящихся прямых. данного состояния. Так как в области насыщения изобара совпадает с изотермой, тангенс угла наклона постоянен и изобара является прямой. Чем выше давление насыщения, тем выше температура, тем больше тангенс угла наклона изобары, поэтому в области насыщения прямые  $p = const$  расходятся. Чем больше давление, тем выше лежит изобара.

Критическая точка К лежит не на вершине, а на левом склоне пограничной кривой.

# h, s-диаграмма водяного пара

В h, s-диаграмме водяного пара нанесены также линии  $v = const$ , идущие круче изобар.

Обычно всю диаграмму не выполняют, а строят только ее верхнюю часть, наиболее употребительную в практике расчетов. Это дает возможность изображать ее в более крупном масштабе.

Для любой точки на этой диаграмме можно найти  $p$ ,  $v$ ,  $t$ ,  $h$ ,  $s$ ,  $x$ .

Большое достоинство диаграммы состоит в том, что количество теплоты в изобарном процессе равно разности ординат конечной и начальной точек процесса изображается отрезком вертикальной прямой, а не площадью как в  $T$ ,  $s$ -диаграмме.

# Вопросы к зачету

1. Изотермический процесс.
2. Изобарный процесс.
3. Изохорный процесс.
4. Адиабатный процесс.
5. Политропный процесс.
6.  $p$ - $v$ - диаграмма водяного пара.
7.  $h$ - $s$ - диаграмма водяного пара.