

Графический метод решения уравнений

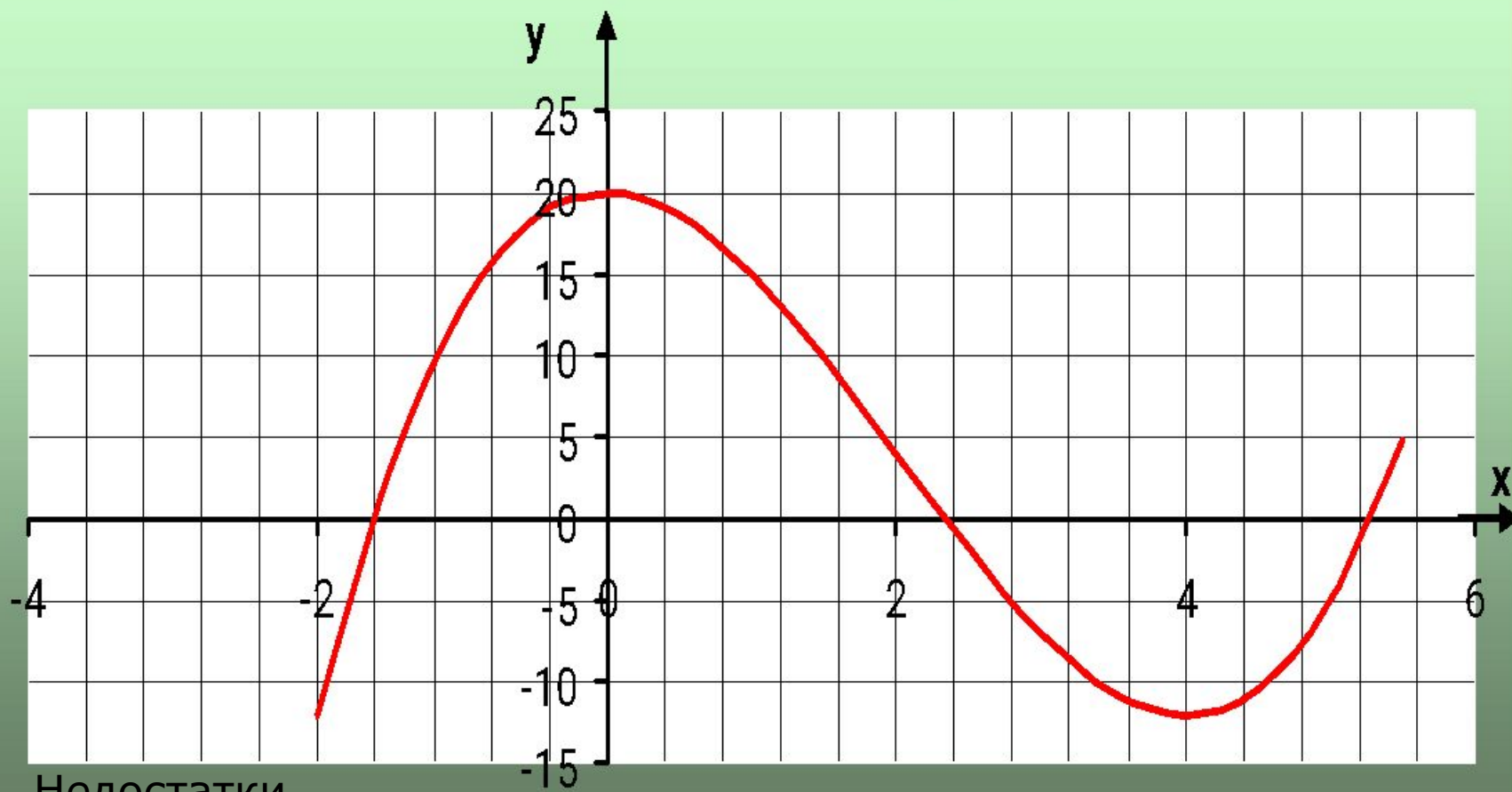


Пусть дано уравнение



$$x^3 - 6 * x^2 + 20 = 0$$

$$y = x^3 - 6x^2 + 20$$



Недостатки
Преимущества



Недостатки

- Можно найти корни уравнения в некотором ограниченном интервале, т.к. чертеж неизбежно ограничен
- Для получения корней с большей степенью точности применяются численные методы

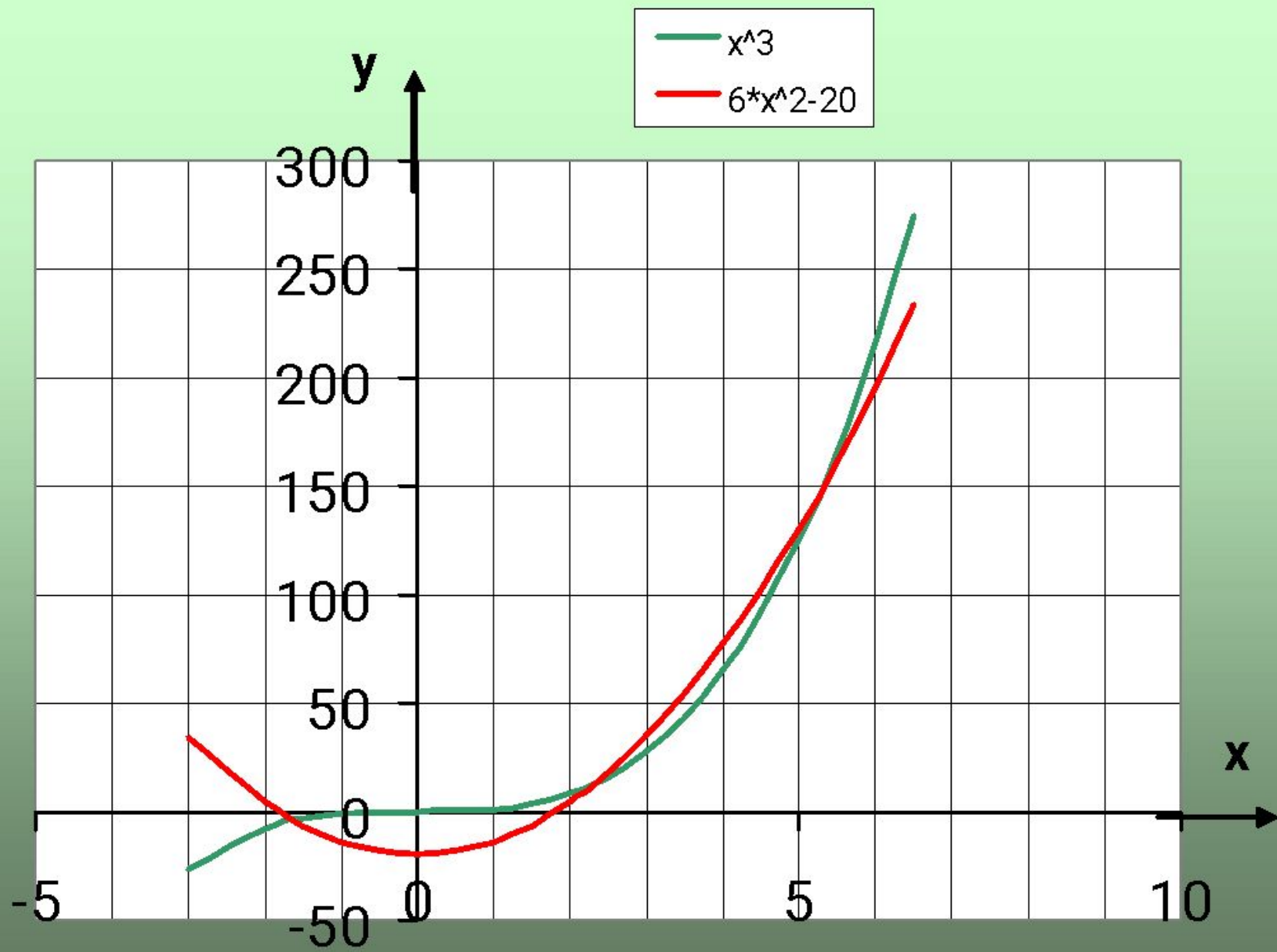
Преимущества

- Позволяет найти корни с точностью, достаточной для решения практических задач
- Простота
- Доступность
- Наглядность

Применяют запись уравнения, при которой используются функции, графики которых хорошо известны

$$\varphi(x) = g(x)$$

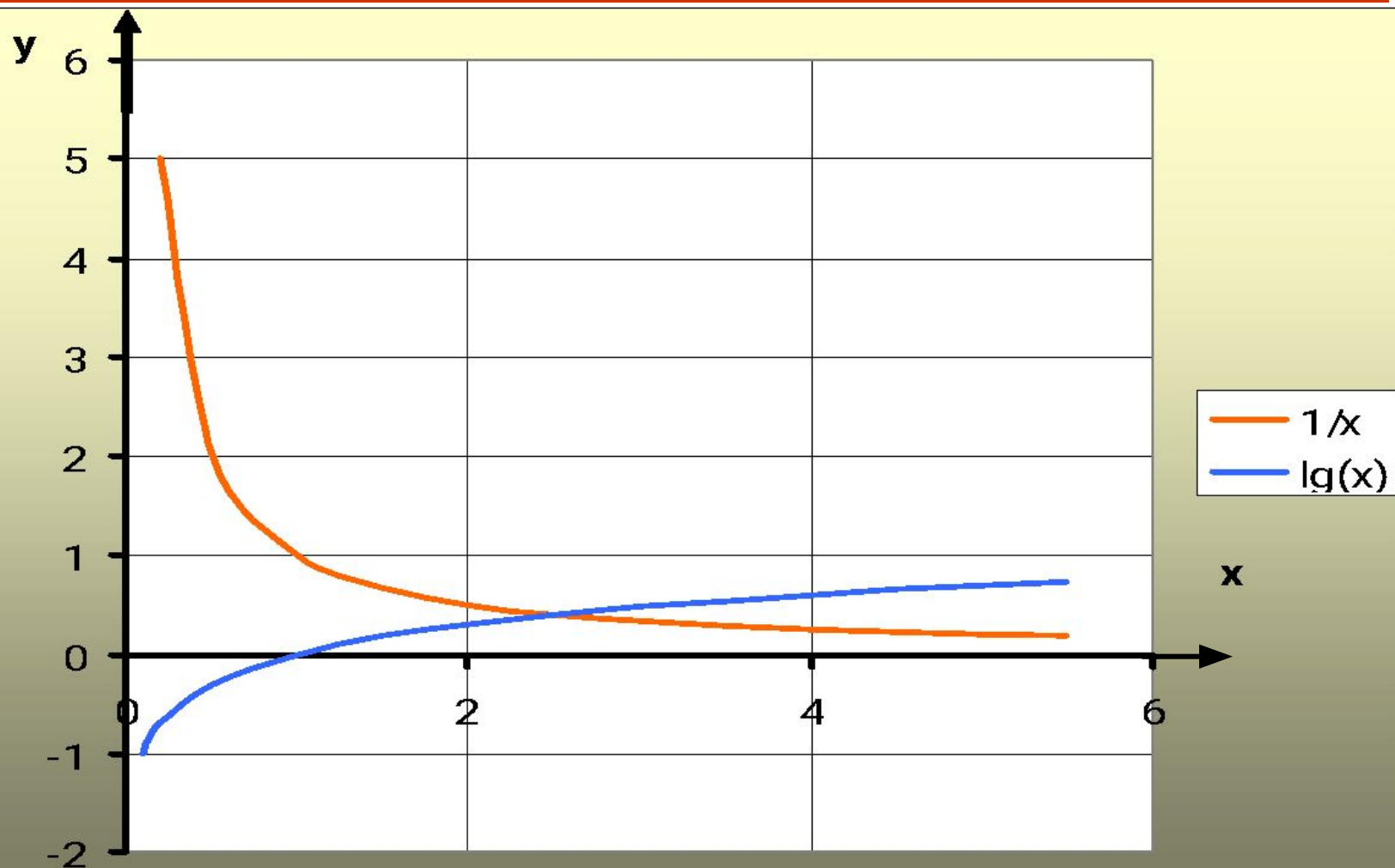
$$x^3 = 6 * x^2 - 20$$



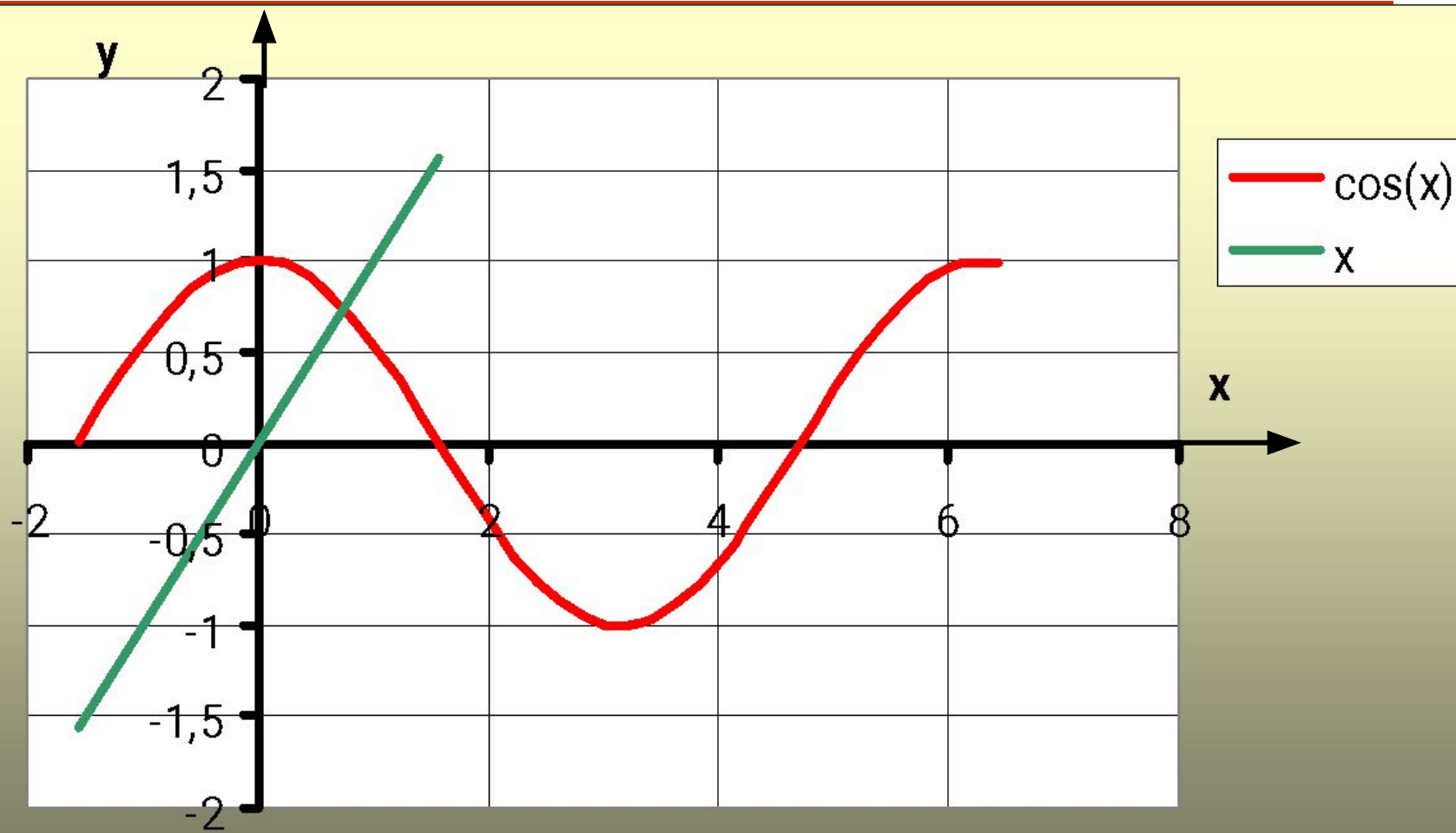
Задача об отыскании всех корней уравнения

- Сделан чертеж для ограниченного промежутка
- На чертеже графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$
- Зная свойства этих функций, можем представить вид этих графиков при неограниченном их продолжении.

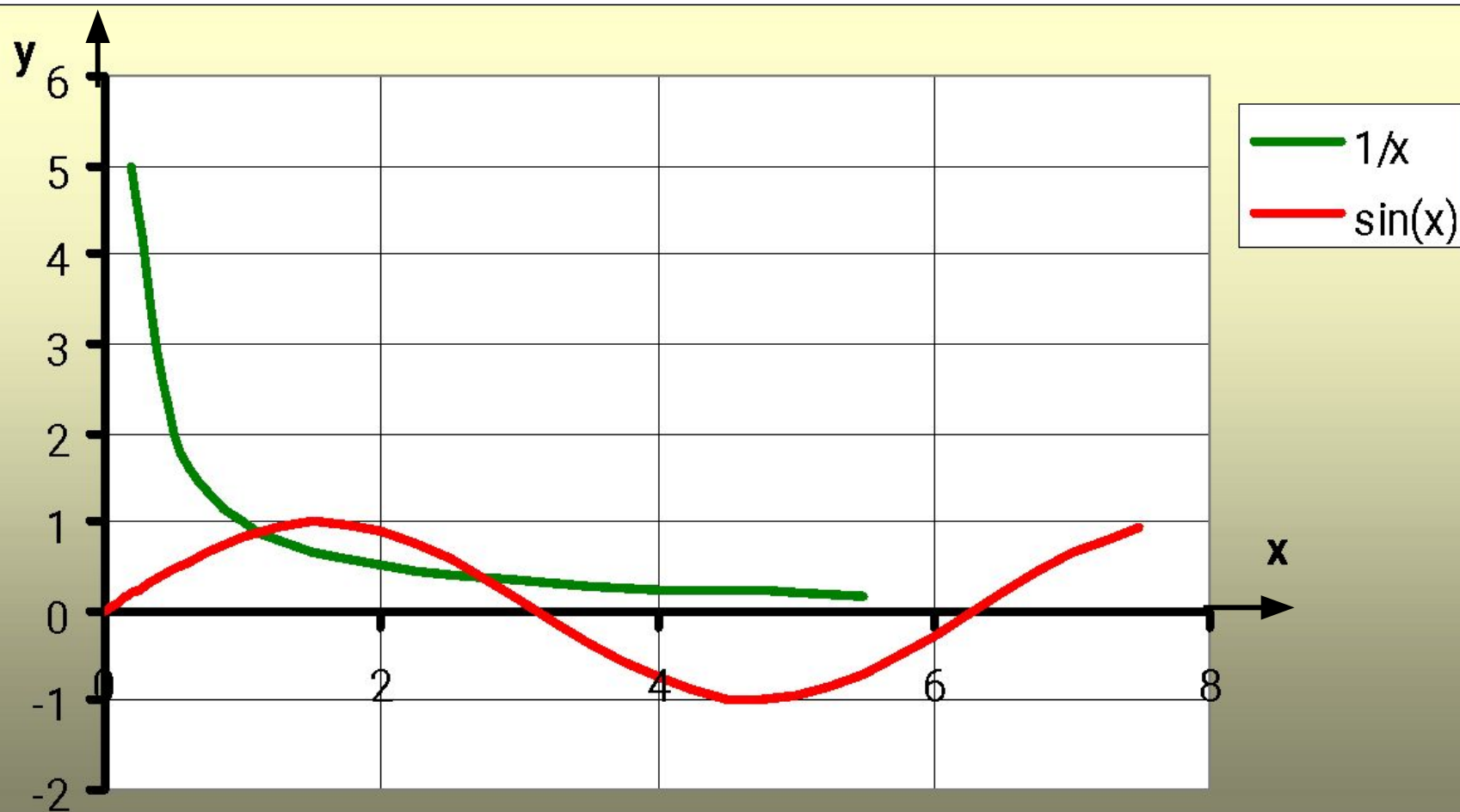
Пример 1. $x \lg(x) = 1$



Пример 2. $x = \cos(x)$



Пример 3. $1/x = \sin(x)$



Последовательность действий

- Представить уравнение в виде $\varphi(x) = g(x)$ так, чтобы графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ были известны или достаточно просты для исследования и построения.
- Построить графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ в промежутке $[a;b]$. Первое грубое приближение.
- Найти точки пересечения двух графиков
- Сделать новый чертеж в большем масштабе для небольшого промежутка

Пример оформления задания по
графическому решению уравнения в
электронной таблице



Отделение корней уравнения

Для получения значения корня с любой степенью точности применяются численные методы

Нахождение приближенных значений корней разбивается на два этапа

- Отделение корней
- Уточнение корней до заданной степени точности

Отделение корней. Определение

- Говорят, что корень ξ уравнения отделен на отрезке $[a;b]$, если этот корень содержится в данном отрезке и на этом отрезке других корней нет.
- Произвести полное отделение всех корней уравнения – значит разбить всю область допустимых значений на интервалы , в каждом из которых содержится только по одному корню (или ни одного).

Отделение корней

- Графически
- Аналитически (основываясь на свойствах функции).

Теорема

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения $f(x) = 0$, и притом единственный.

Пример

Отделим корни уравнения
 $x^3 - 6x^2 + 20 = 0$

1. Графически
2. Аналитически

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-4)$$

$$3x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

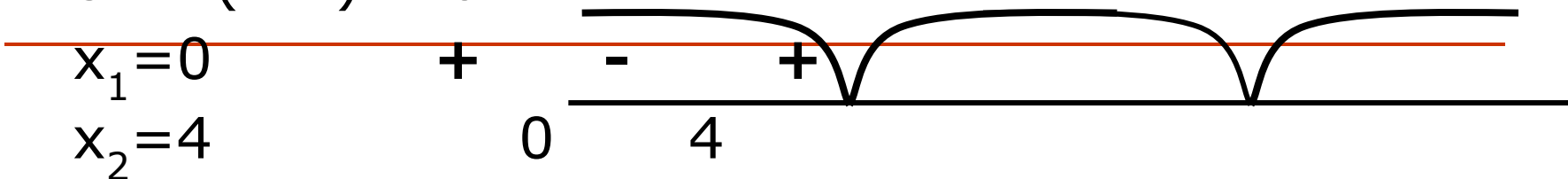
+

-

+

0

4



1 $f(-2) = -12 < 0$

$f(0) = 20 > 0$ $[-2; 0]$ единственный корень

2 $f(0) = 20 > 0$

$f(4) = -12 < 0$ $[0; 4]$ единственный корень

3 $f(4) = -12 < 0$

$f(6) = 20 > 0$ $[4; 6]$ единственный корень

Полное отделение корней:

- $(-\infty; -2]$ нет корней
- $(-2; 0]$ один корень
- $(0; 4]$ один корень
- $(4; 6]$ один корень
- $(6; +\infty)$ нет корней



Уточнение корней

- Пусть дано уравнение $f(x) = 0$.
Требуется найти корень ξ с точностью ε
- Пусть этот корень отделен; значит
$$a \leq \xi \leq b,$$
 a -приближенное значение с недостатком;
 b - приближенное значение с избытком;
 $b-a$ погрешность.
Если $b-a \leq \varepsilon$ то задача решена.
Иначе надо сужать интервал $b-a$.

Численные методы

