Лекция 5

1. Постановка задачи численного интегрирования
2. Методы прямоугольников
3. Метод трапеций
4. Метод Симпсона
5. Погрешности численного интегрирования. Правило Рунге

Определенный интеграл

Из курса математического анализа известно, что, если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a;b]** и дифференцируема, то определенный интеграл от этой функции в пределах от **a** до **b** существует и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\mathbf{S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad где \quad f(x) = F'(x)}$$

Методы интегрирования

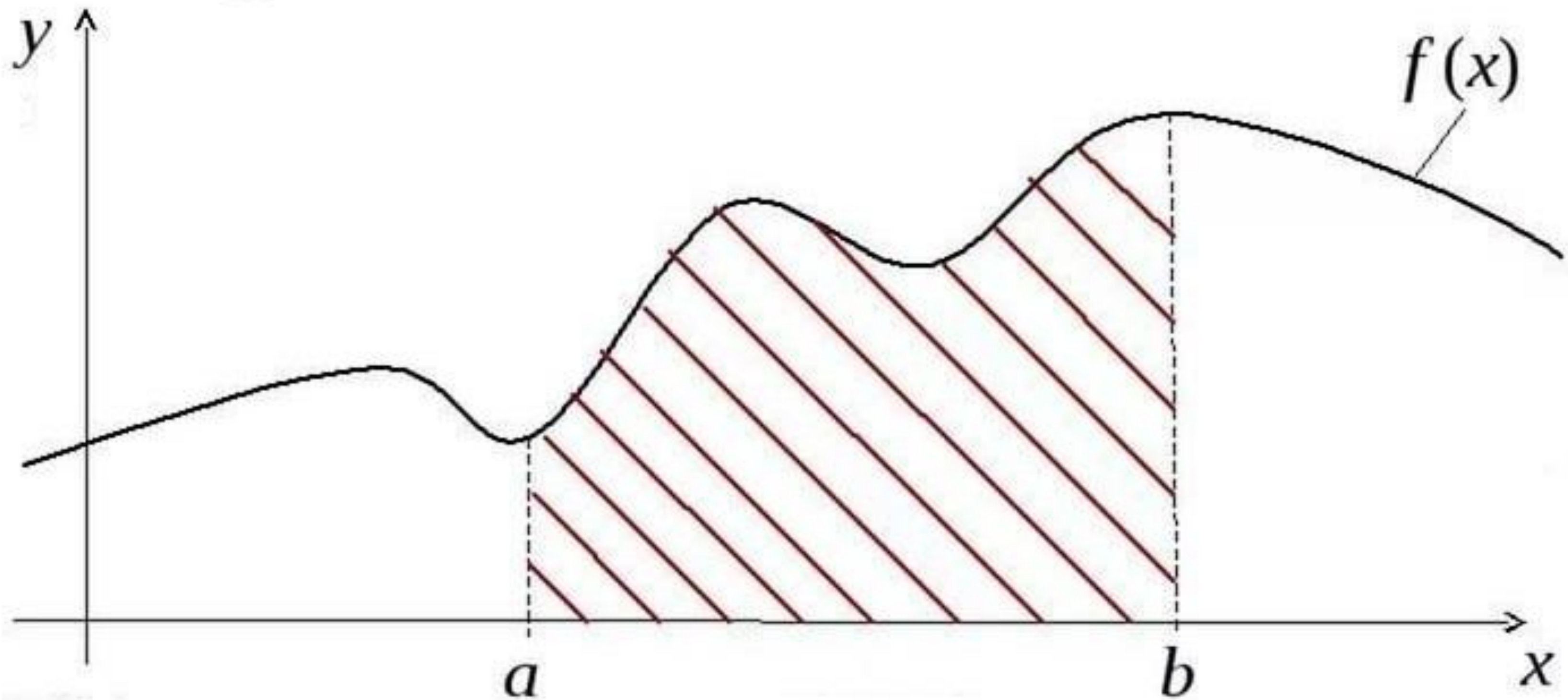
Некоторые методы интегрирования

- *Интегрирование по формулам.*
- *Внесение под знак дифференциала*
- *Интегрирование посредством замены переменной.*
- *Интегрирование по частям.*

Геометрический смысл определенного интеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Определенный интеграл S численно равен площади криволинейной трапеции под графиком функции f(x) на отрезке [a;b]



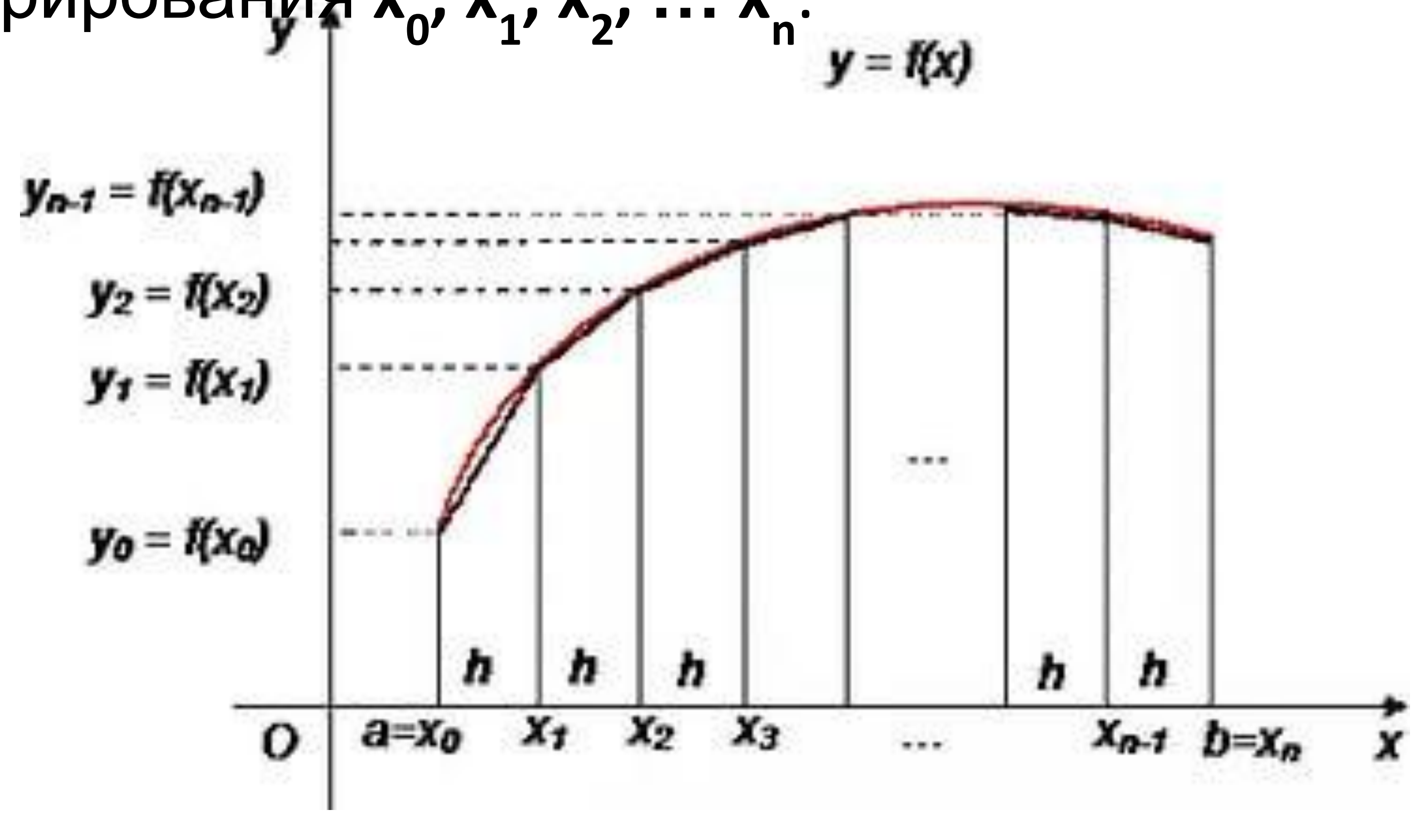
Приближенное вычисление площади криволинейной трапеции

Для приближенного вычисления этой площади отрезок **[a;b]** разбивается на **n** частей, внутри которых подинтегральная функция **f(x)** заменяется с некоторой степенью точности более простыми функциями $\mathbf{g_i(x)}$, которые могут быть проинтегрированы аналитически. Тогда

$$\mathbf{S = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)\,dx}$$

Замена подинтегральной функции интерполяционными полиномами

В качестве заменяющих функций обычно используют интерполяционные полиномы с узлами интерполяции в точках разбиения отрезка интегрирования $\mathbf{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n}$.



Методы численного интегрирования

Для получения простых формул используют полиномы нулевой, первой и второй степени и, соответственно, получают следующие методы и формулы численного интегрирования:

- методы прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона.

Очевидно, что во всех случаях замена функции **f(x)** интерполирующим полиномом приводит к образованию погрешности вычисления значения интеграла. Увеличение числа отрезков разбиения **n** (уменьшение длины шага интегрирования **h**) ведет к уменьшению погрешности.

Методы прямоугольников

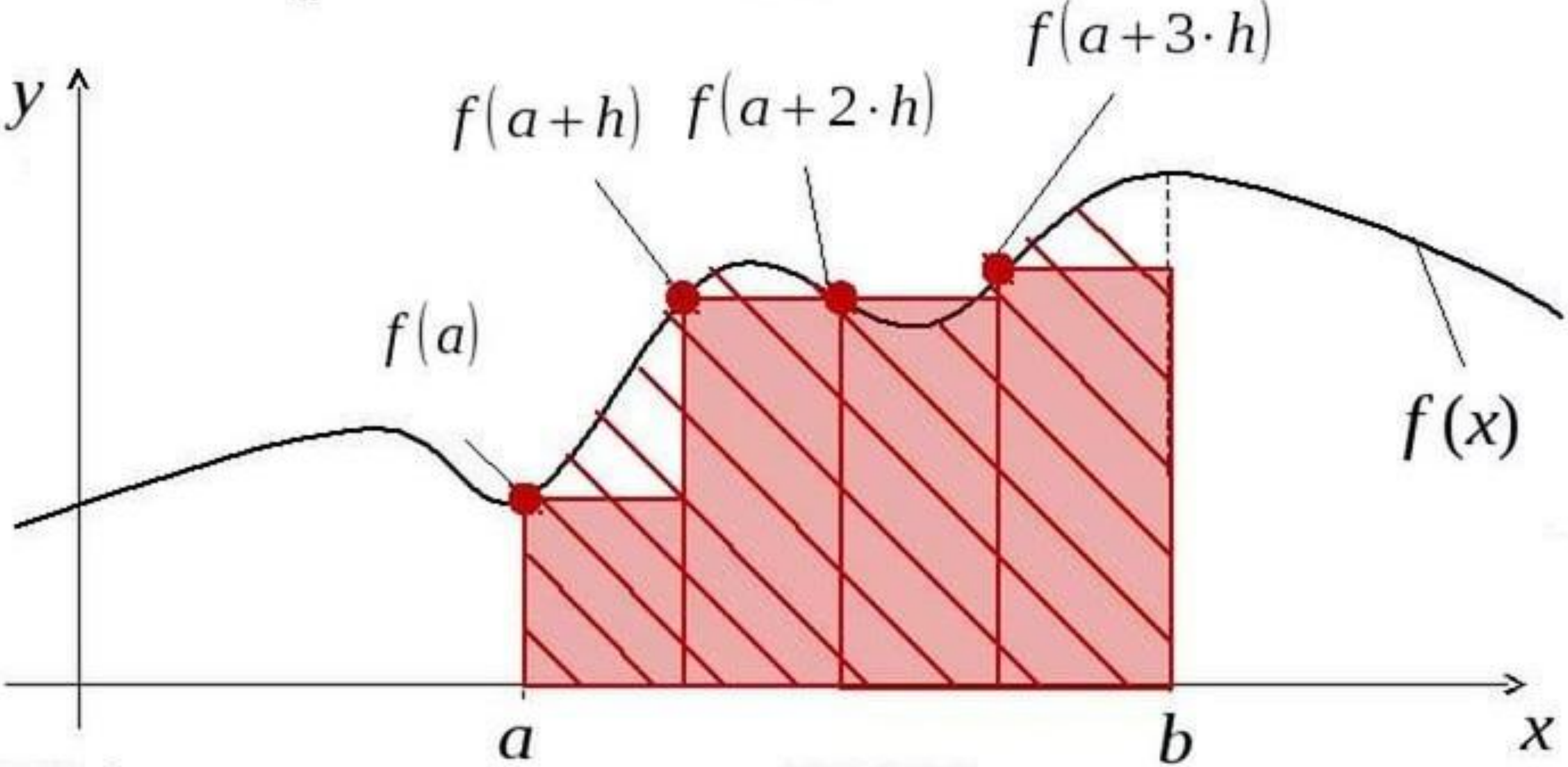
В методах прямоугольников подинтегральная функция **f(x)** заменяется в пределах каждого элементарного отрезка **$[x_i;x_{i+1}]$** интерполяционным полиномом нулевой степени, то есть постоянной величиной. При этом значение элементарного интеграла равно площади прямоугольника, а интеграл на отрезке **[a;b]** – сумме этих площадей.

Если в качестве значения подинтегральной функции берется ее значение в **левом** конце отрезка, то получается **формула левых прямоугольников**. При использовании значения подинтегральной функции в **правом** конце отрезка получается **формула правых прямоугольников**.

При одном и том же числе отрезков разбиения **n** большую точность дает **метод средних прямоугольников**, в котором используется значение подинтегральной функции в **середине** отрезка. Поскольку объем вычислений во всех трех случаях одинаков, то более предпочтительным оказывается

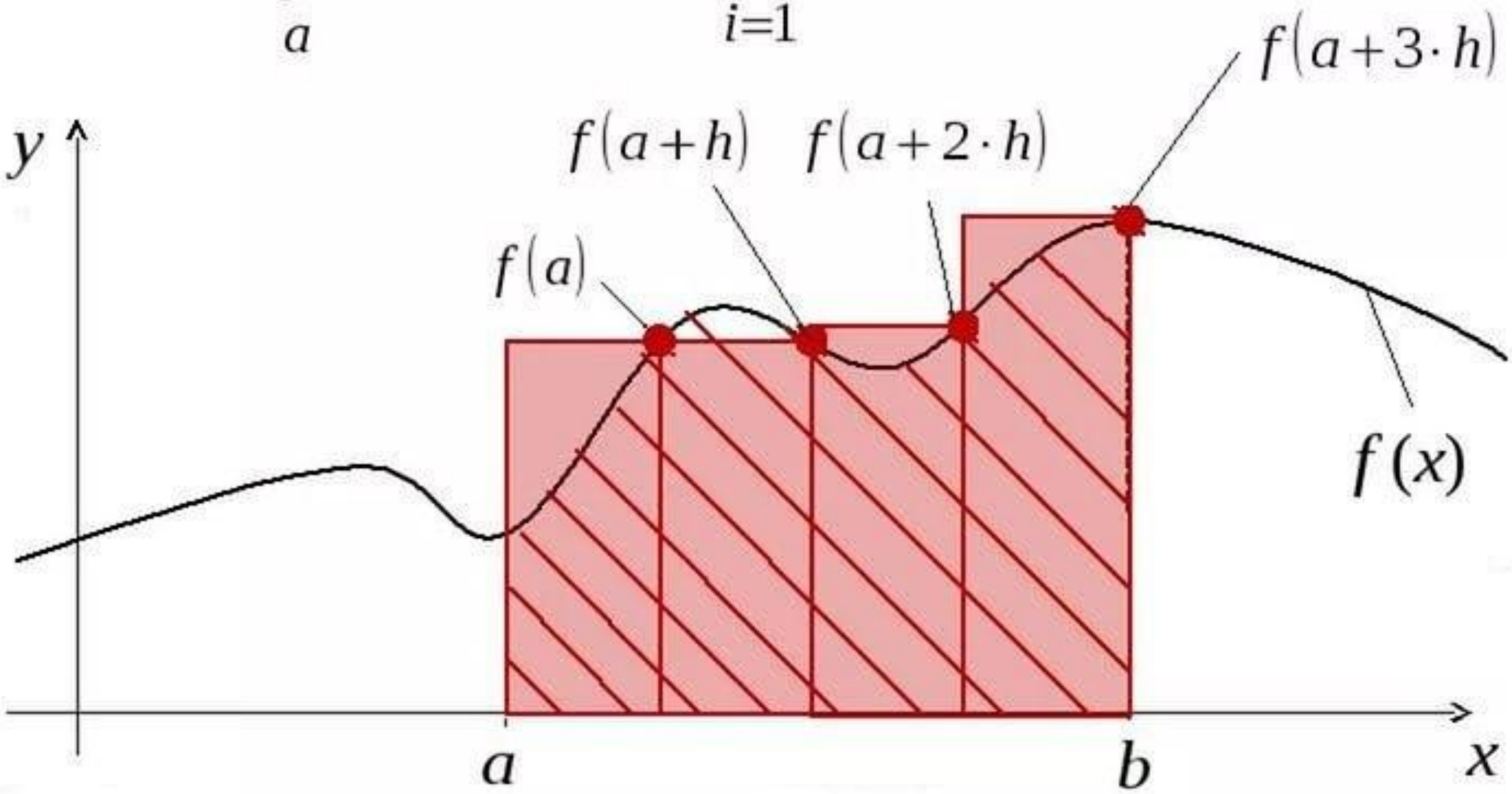
Приближенное вычисление определенного интеграла (метод левых прямоугольников)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f\left(a + i \cdot h\right)$$



Приближенное вычисление определенного интеграла (метод правых прямоугольников)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot f\left(a + i \cdot h\right)$$



Приближенное вычисление определенного интеграла (метод прямоугольников)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(a+(i+0{,}5)\cdot h)$$

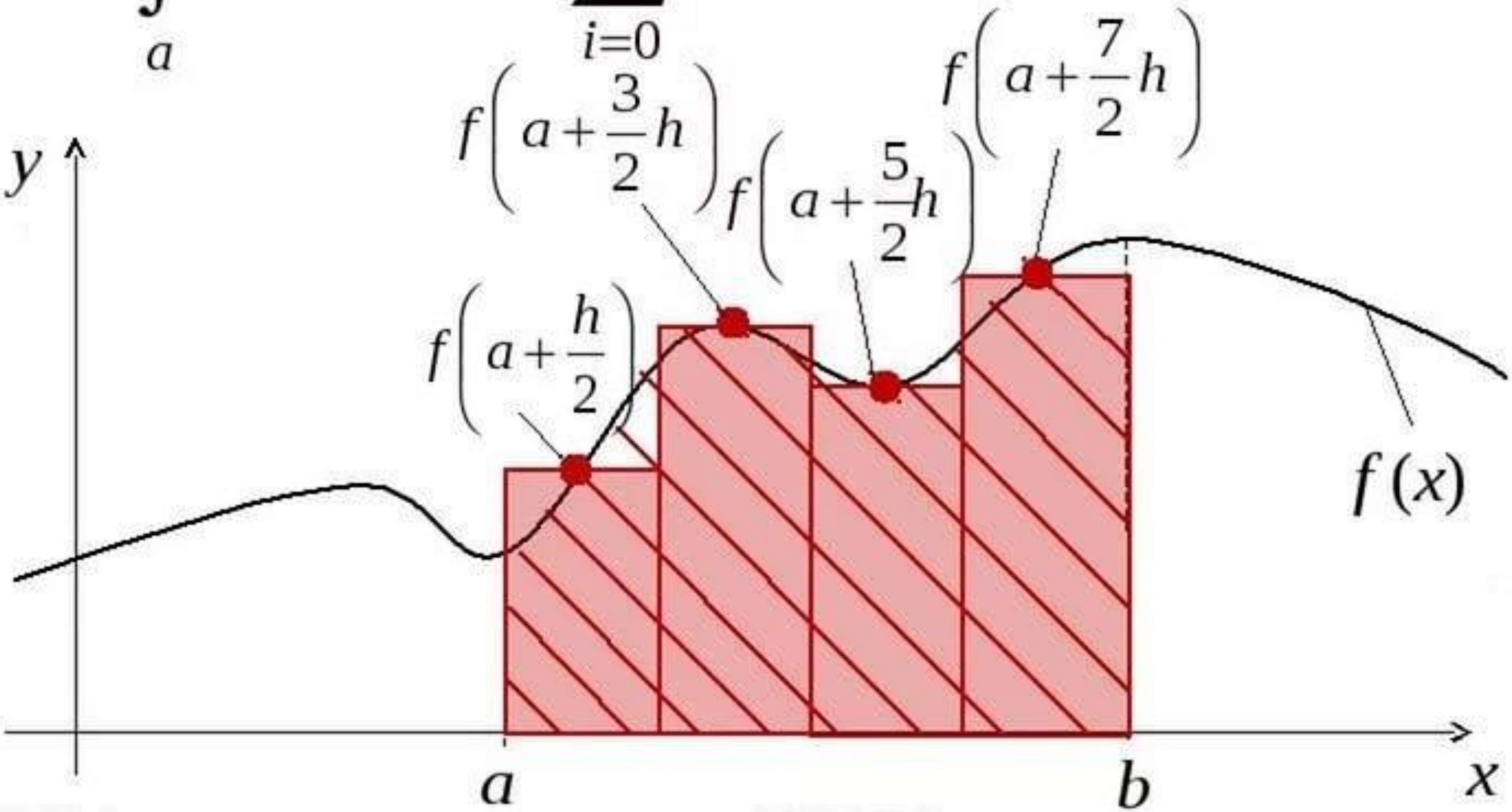
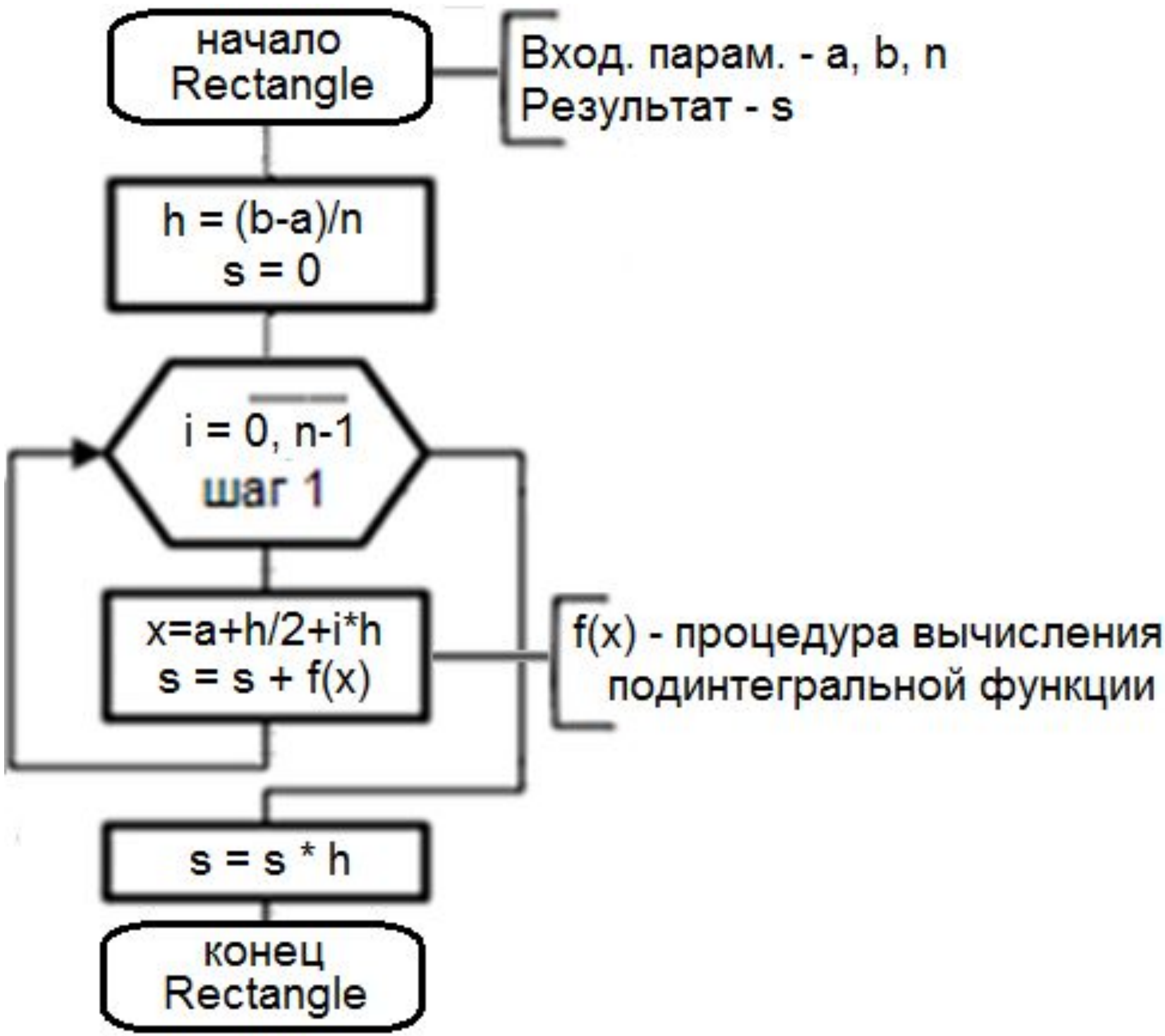


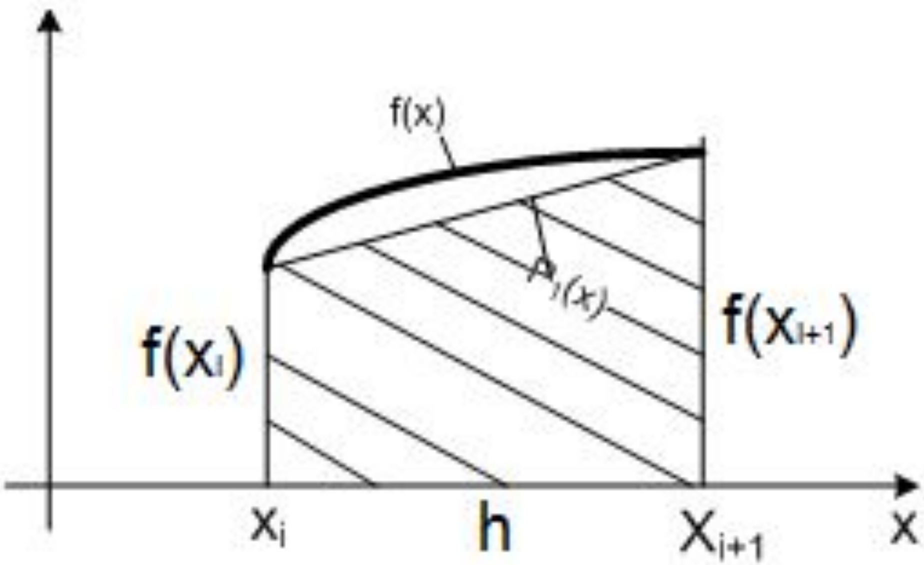
Схема алгоритма метода прямоугольников

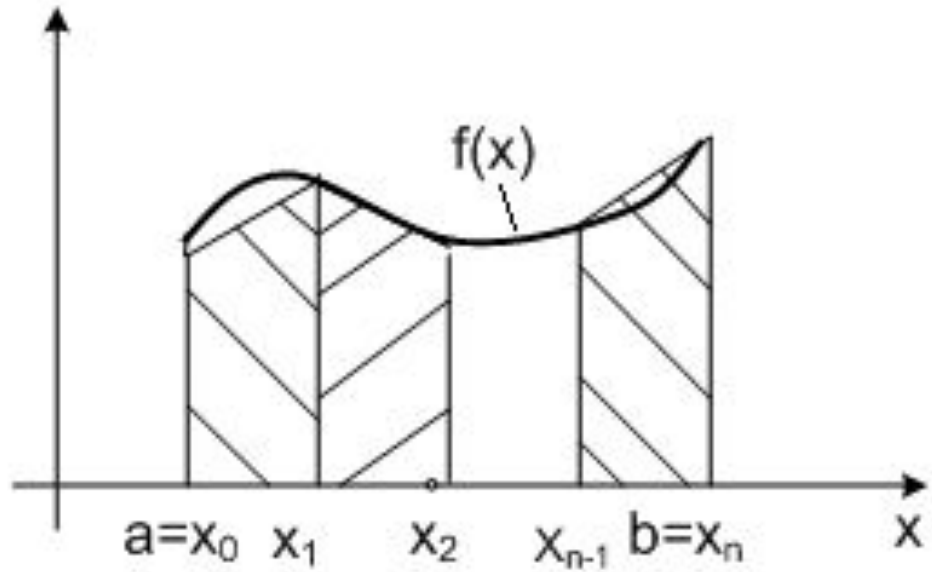


Метод трапеций

В методе трапеций подинтегральная функция **f(x)** на каждом элементарном отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ заменяется интерполяционным полиномом первой степени. При этом значение элементарного интеграла равно площади прямоугольной трапеции с высотой **h** и основаниями $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$, а интеграл на отрезке **[a;b]** – сумме этих площадей.

Метод трапеций





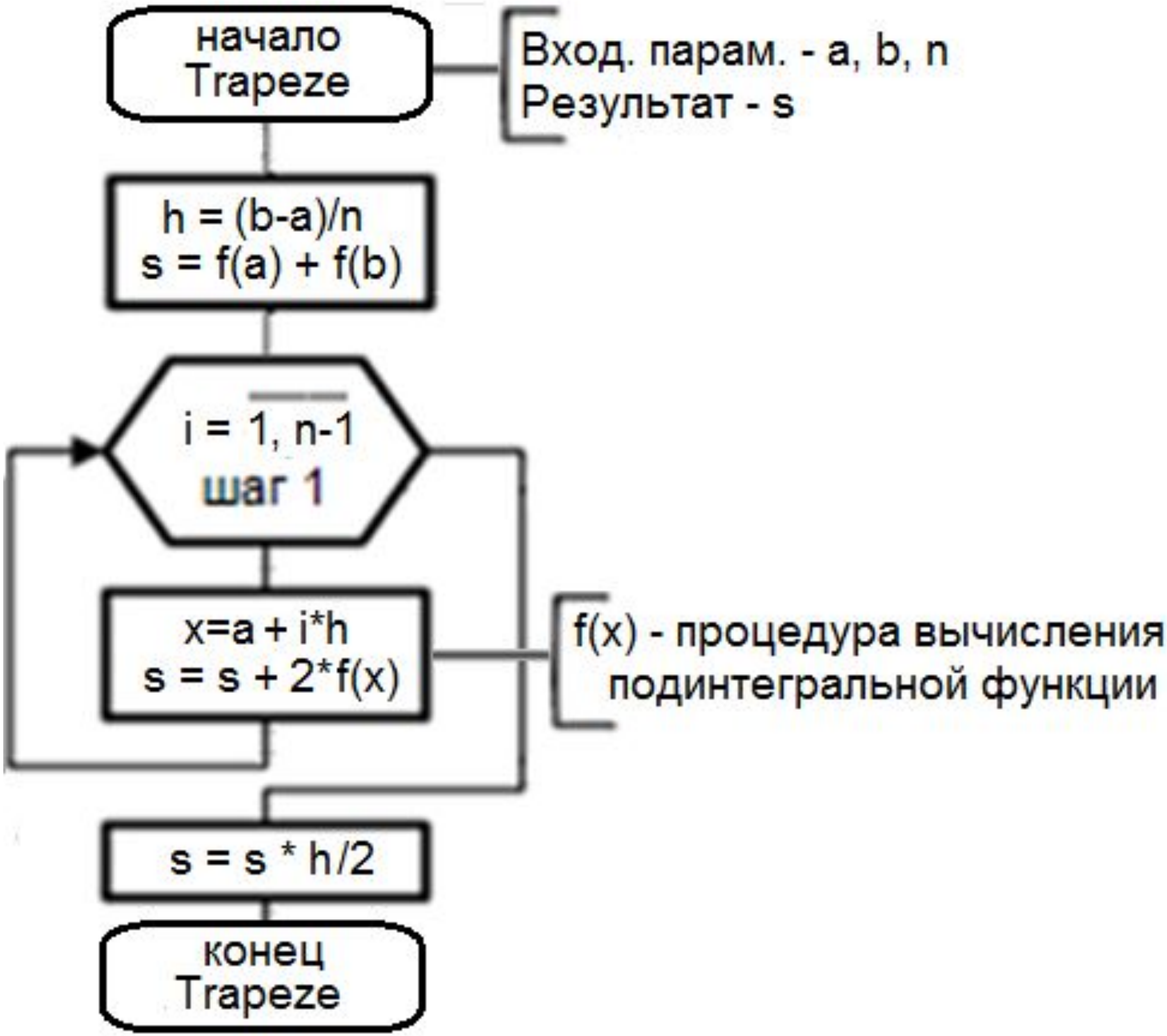
Вывод формулы трапеций

$$S_0 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h, \quad S_1 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h, \quad S_2 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h, \ldots$$

$$S_{n-2} = \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} \cdot h, \quad S_{n-1} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h$$

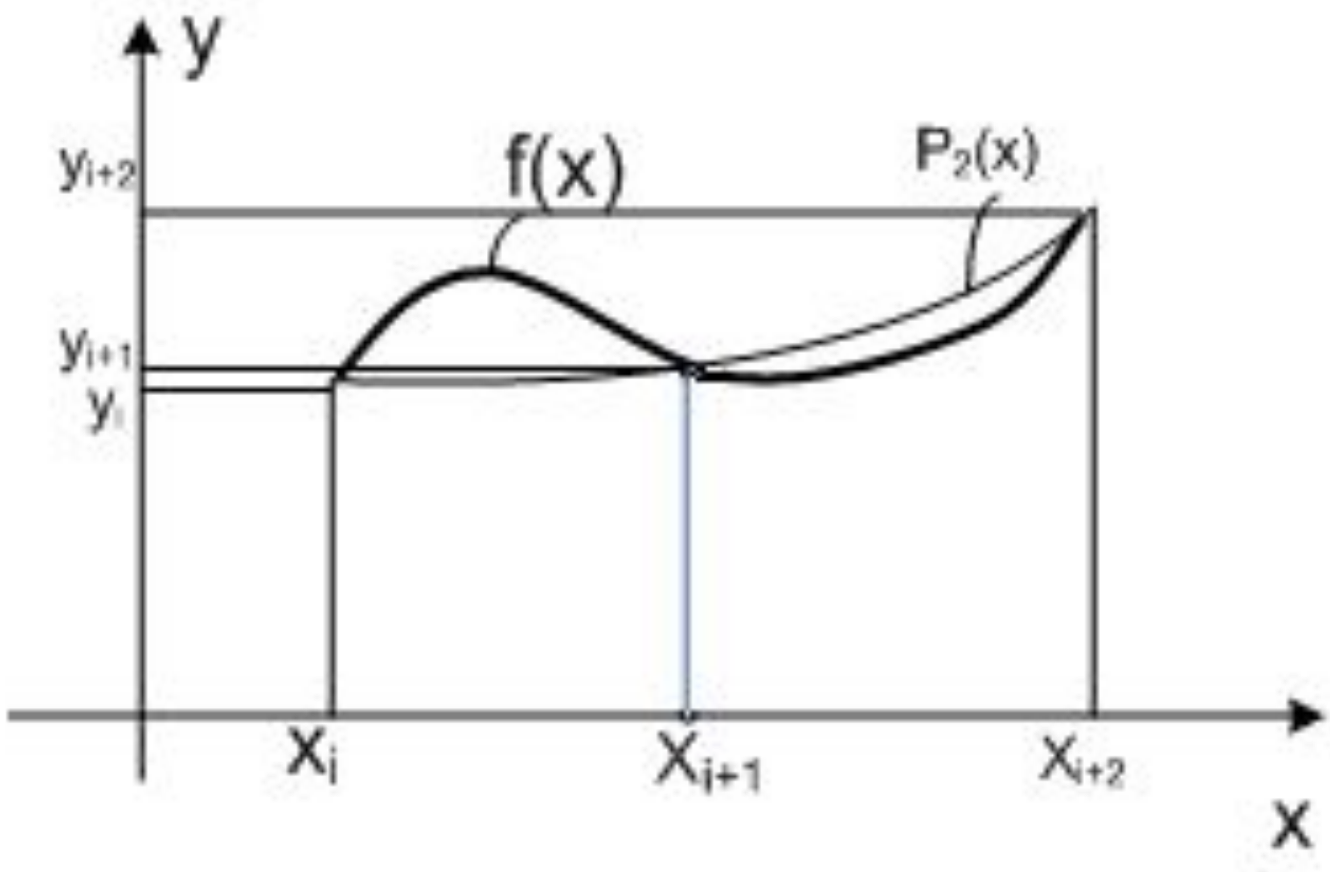
$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

Схема алгоритма метода трапеций

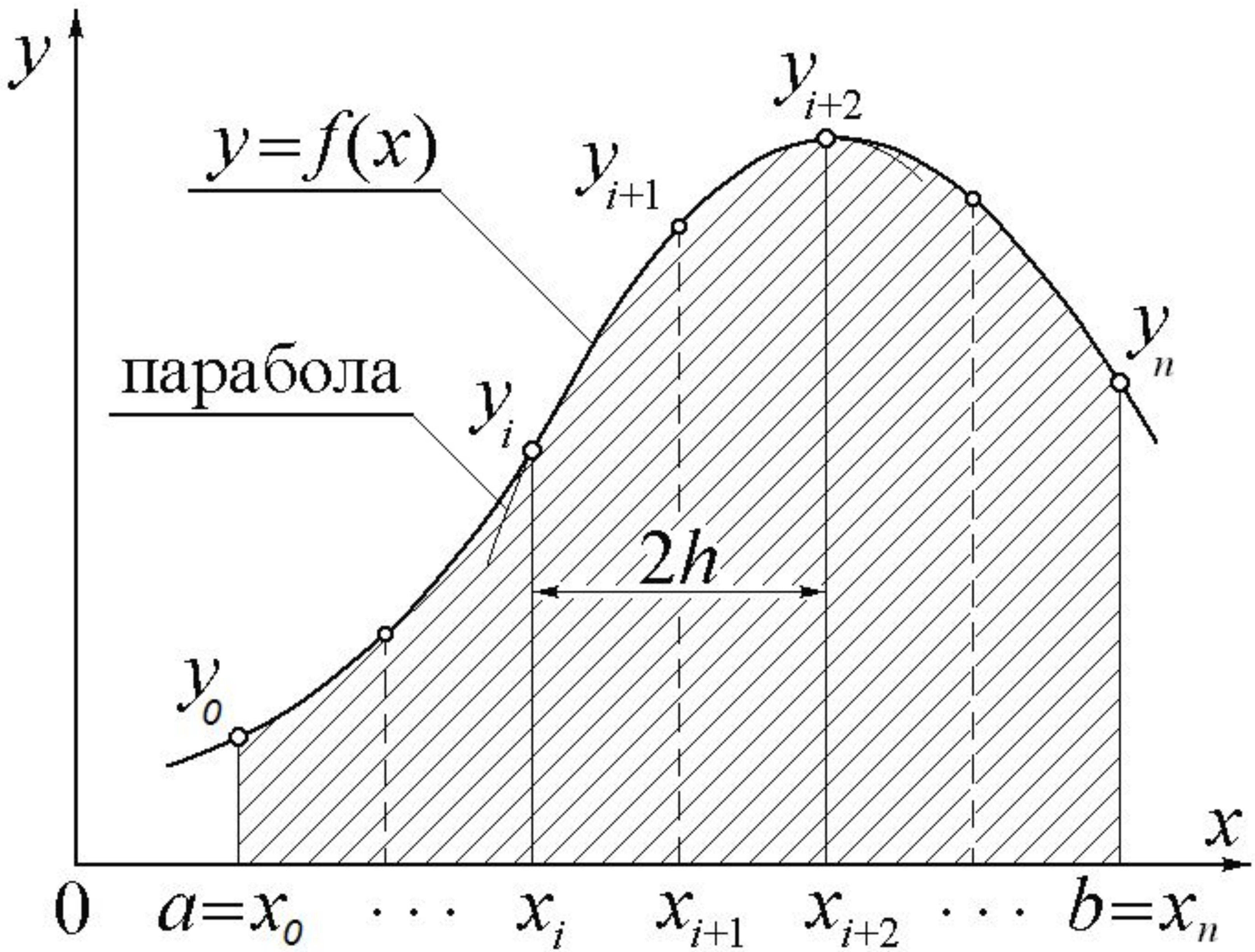


Метод Симпсона

В методе Симпсона применяется интерполирующий полином второй степени, поэтому за элементарный отрезок интерполирования принимается отрезок **[x_i;x_{i+2}]**, а весь отрезок интегрирования **[a;b]** разбивается на четное число частей **n = 2m**.



Метод Симпсона



Вывод формулы Симпсона

Для получения интерполирующей функции на интервале **[x_i;x_{i+2}]** воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона, используя в качестве узлов интерполяции точки **x_i, x_{i+1} и x_{i+2}**.

$$f(x) \approx y_i + \frac{\Delta y_i}{1!h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 y_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \qquad x \in [x_i, x_{i+2}].$$

Тогда в пределах отрезка **[x_i;x_{i+2}]** получим следующую приближенную формулу:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} [y_i + \frac{\Delta y_i}{1!h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 y_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})]dx = \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}).$$

В частности, для отрезка **[x_0;x_2]** $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$

Для отрезка **[x_2;x_4]** $\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$

Вывод формулы Симпсона

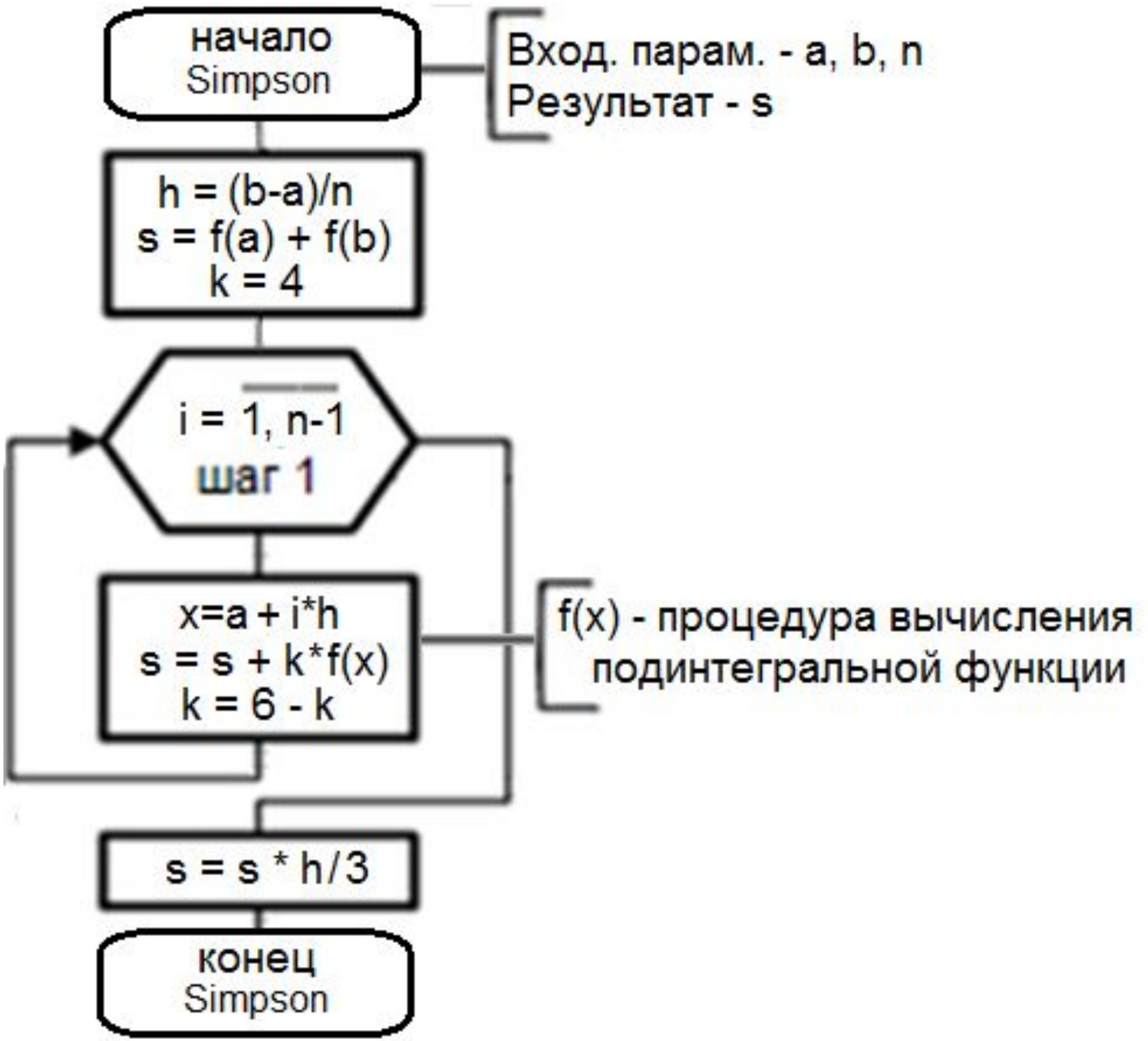
Просуммировав подобные выражения на всем отрезке интегрирования **[a;b]**, получим *формулу Симпсона*:

$$\mathbf{S}=\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})]=$$

$$=\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}[y_0+y_{2m}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})]=$$

$$=\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}\left(y_0+y_{2m}+4\sum_{i=1}^{m}y_{2i-1}+2\sum_{i=2}^{m}y_{2i-2}\right),\qquad \text{где}\quad y_i=f(x_i)$$

Схема алгоритма метода Симпсона



Погрешности численного интегрирования

Замена подинтегральной функции интерполяционным полиномом приводит к погрешности вычисления определенного интеграла

$\mathbf{R} = |\mathbf{S} - \mathbf{S}^*|$, где $\mathbf{S}^*$ – точное значение интеграла.

Имеются следующие оценки этой погрешности для рассмотренных нами методов и случаев аналитического или табличного задания подинтегральной функции:

Оценки погрешности численного интегрирования

- при использовании метода средних прямоугольников

$$R \le \frac{b-a}{24} h^2 \cdot \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$$ **при аналитически заданной f(x)**

$$R \le \frac{b-a}{24} |\overline{\Delta^2 y}|$$ **при таблично заданной f(x)**

- при использовании метода трапеций

$$R \le \frac{b-a}{12} h^2 \cdot \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$$ **при аналитически заданной f(x)**

$$R \le \frac{b-a}{12} |\overline{\Delta^2 y}|$$ **при таблично заданной f(x)**

- при использовании метода Симпсона

$$R \le \frac{b-a}{180} h^4 \cdot \max_{x \in [a;b]} |f^{(4)}(x)|$$ **при аналитически заданной f(x)**

$$R \le \frac{b-a}{180} |\overline{\Delta^4 y}|$$ **при таблично заданной f(x)**

где $\overline{\Delta^{(k)} y}$ – среднее арифметическое конечных разностей **k**–го порядка.

Сравнение погрешностей методов

Из приведенных формул видно, что уменьшение шага интегрирования **h** приводит к уменьшению погрешности. Метод Симпсона при шаге **h** дает примерно ту же точность, что и методы прямоугольников и трапеций при шаге **h/2**, а при одинаковой точности метод Симпсона требует примерно вдвое меньше вычислений.

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Однако практическое использование этих формул ограничено в связи с трудоемкостью вычислений и зависимостью оценок от свойств конкретных подинтегральных функций. На практике для оценки погрешности численного интегрирования используют *метод двойного просчета (правило Рунге)*. Приближенное значение интеграла вычисляют дважды: вначале с шагом **h**, а затем с шагом **h/2**. Полученные значения интегралов $\mathbf{S_h}$ и $\mathbf{S_{h/2}}$ могут быть применены для оценки погрешности последнего, более точного значения $\mathbf{S_{h/2}}$ по формуле:

$$\mathbf{R} \le \frac{|\mathbf{S_h} - \mathbf{S_{h/2}}|}{\mathbf{2^k - 1}}$$

где **k=2** – для методов трапеций и средних прямоугольников;

k=4 – для метода Симпсона.

Метод двойного просчета может быть использован для автоматического выбора шага интегрирования при заданной допустимой погрешности.

Схема алгоритма метода двойного просчета