Методика математического планирования эксперимента и анализа полученных результатов

В данной работе применялись план **КОНО** второго порядка для двух факторов и план **БОКС**а второго порядка для трех факторов, которые позволили значительно сократить время проведения работы и повысить эффективность исследований.

Матрицы Д–оптимального плана обладают важными свойствами в отношении коэффициентов регрессионной модели и выходного параметра: ортогональностью, ротатабельностью и униформностью, и обеспечивают получение минимума обобщенной дисперсии, то есть минимума дисперсии всех коэффициентов регрессии (критерий $S^2\{b\} \to \min$).

Свойство **ортогональности** обеспечивает независимость полученных коэффициентов регрессии b_i ,b_{ij} математической модели второго порядка и возможность исключения членов модели с незначимыми коэффициентами без последующего пересчета значимых коэффициентов.

Свойство **ротатабельности** обеспечивает постоянство дисперсии выходного параметра на равных расстояниях от центра эксперимента.

Свойство **униформности** обеспечивает постоянство дисперсии выходного параметра в некоторой области эксперимента.

Матрица планирования эксперимента КОНО-2

№	Кодированные значения	
	X_1	X_2
1	0	0
2	+1	+1
3	-1	+1
4	-1	-1
5	+1	-1
6	+1	0
7	0	+1
8	-1	0
9	0	-1

Матрица планирования эксперимента БОКС-3

№	Кодированные значения		
	X_1	X_2	X_3
1	+	+	+
2	-	+	+
3	+	-	+
4	-	-	+
5	+	+	-
6	-	+	-
7	+	-	-
8	-	-	-
9	+	0	0
10	-	0	0
11	0	+	0
12	0	-	0
13	0	0	+
14	0	0	-

Полиномиальное уравнение имеет общий вид:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{ij=1}^{ck} b_{ij} x_i x_j + \sum_{ijn=1}^{Mk} b_{iin} x_i x_j x_n \qquad (1)$$

где
Y – расчетное значение критерия оптимизации,
k – число факторов оптимизации,
Ck – число сочетаний из двух факторов,
Mk – число сочетаний из трех факторов,
b_0 – свободный член уравнения,
b_i – линейные коэффициенты,
b_{ij} – коэффициенты, характеризующие двойное взаимодействие факторов,
b_{ijn} – коэффициенты, характеризующие тройное взаимодействие факторов,
x_i, x_j, x_n – варьируемые факторы.

Для перехода от матрицы планирования к рабочей матрице используют соотношение, которое связывает кодированное значение факторов с натуральными:

$$X = \frac{x_i - x_{0i}}{I} \qquad (2)$$

где X – кодированное значение i-го фактора;

x_i – текущее натуральное значение i-го фактора,

x_{oi} – натуральное значение i-го фактора на нулевом уровне,

I – величина интервала варьирования i-го фактора в натуральных единицах.

Для случая, когда число факторов оптимизации равно двум, то есть для плана КОНО-2, уравнение (1) принимает вид:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 \qquad (3)$$

Для случая, когда число факторов оптимизации равно трем, уравнение (1) принимает вид:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 \qquad (4)$$

Определение коэффициентов регрессии проводится в следующей последовательности:

1) Нахождение среднего значения функции отклика по строкам:

$$\mathbf{Y_u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{Y_i} \qquad (5)$$

2) Определение построчных дисперсий:

$$\mathbf{S_u^2\{Y\}} = \frac{1}{k(N - N_ц + 1)}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{(Y_i - Y_u)^2} \qquad (6)$$

3) Проверка однородности дисперсий по <u>критерию Кочрена</u>, расчетное значение которого:

$$\mathbf{G_R = S_{u\,max}^2\{Y\}/\sum_{u=1}^{N} S_u^2\{Y\}} \qquad (7)$$

Полученное значение сравнивается с табличным.

Если $G_R < G_T$, то гипотеза об однородности дисперсий <u>не отвергается</u>.

4) Оценка дисперсии воспроизводимости:

$$\mathbf{S^2\{Y\}} = \frac{1}{k(N - N_ц + 1)}\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{m} \mathbf{(Y_i - Y_u)^2}, \qquad (8)$$

где N – число опытов в матрице.

5) Вычисление коэффициентов уравнения:

$$b_0 = g_1 \sum_{i=1}^{N} Y_u - g_2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 Y_u \qquad (9)$$

$$b_i = g_3 \sum_{u=1}^{N} x_{iu} Y_u \qquad (10)$$

$$b_{ij} = g_4 \sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} Y_u \qquad (11)$$

$$b_{ii} = g_5 \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 Y_u + g_6 \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 Y_u - g_2 \sum_{u=1}^{N} Y_u \qquad (12)$$

где

Y_u – среднее экспериментальное значение критерия оптимизации,

$g_1 - g_6$ – постоянные коэффициенты.

6) Определение дисперсий коэффициентов регрессии:

$$S^2\{b_0\} = g_1 S^2\{Y\} \quad (13)$$

$$S^2\{b_i\} = g_3 S^2\{Y\} \quad (14)$$

$$S^2\{b_{ij}\} = g_4 S^2\{Y\} \quad (15)$$

$$S^2\{b_{ii}\} = g_7 S^2\{Y\} \quad (16)$$

Их ковариации:

$$\mathrm{cov}\{b_0\} = g_2 S\{Y\} \quad (17)$$

$$\mathrm{cov}\{b_{ii}\, b_{ij}\} = g_6 S\{Y\} \quad (18)$$

7) Расчет дисперсии адекватности:

$$S_{ад}{}^2\{Y\} = \sum_{u=1}^{N} n(Y_u - Y_u)^2 / (N - Л) \quad (19)$$

где Y_u – расчетное значение критерия оптимизации,

Л – число коэффициентов регрессии:

$$Л = (k+2)(k+1)/2 \quad , \quad (20)$$

где k – число варьируемых факторов.

Например, для эксперимента, проводимого по матрице БОКС-3, Л=10.

8) **Определение значимости коэффициентов регрессии с помощью <u>критерия Стьюдента</u>:**

$$t_R\{b_i\} = |b_i| \;/\; S\{b_i\} > t_т \quad , \qquad (21)$$

где $t_т$ – табличное значение критерия Стьюдента.

9) Для проверки адекватности полученной регрессионной модели второго порядка используют <u>критерий Фишера</u>:

$$F_R = S_{ад}^{\,2}\{Y\} \;/\; S^2\{Y\} \qquad (22)$$

Если $F_R < F_т$, то модель считается адекватной с выбранной доверительной вероятностью.

Полученные в результате расчетов конкретные уравнения регрессии оценивались аналитически и графически в виде поверхностей отклика.