

Закон Кулона.

*Напряженность
электростатического
поля*

1.(9.13) Два точечных заряда $q_1=7,5$ нКл и $q_2=-14,7$ нКл расположены на расстоянии $r=5$ см друг от друга. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a=3$ см от положительного заряда и $b=4$ см от отрицательного заряда.

Дано

$q_1=7,5$ нКл
 $q_2=-14,7$ нКл
 $r=5$ см
 $a=3$ см
 $b=4$ см

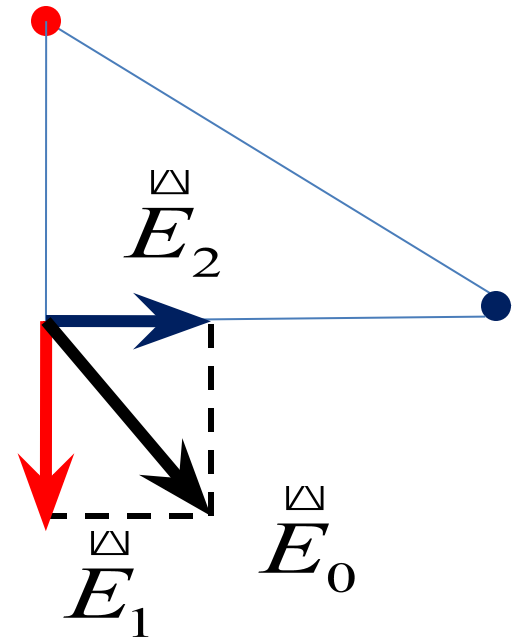
$E=?$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$|\vec{E}_0| = \sqrt{|\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2}$$

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$E_1 = \frac{kq_1}{a^2} \quad E_2 = \frac{kq_2}{b^2}$$



$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{a^4} + \frac{q_2^2}{b^4}}$$

$$E_0 = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{(7,5 \cdot 10^{-9})^2}{(3 \cdot 10^{-4})^4} + \frac{(14,7 \cdot 10^{-9})^2}{(4 \cdot 10^{-2})^4}} = 112 \cdot 10^3 \quad /$$

2.(9.15) Два металлических шарика одинакового радиуса и массы подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд Q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной $T=98$ мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса равно $l=10$ см, масса каждого шарика $m=5$ г.

Дано

$T=98$ мН
 $l=10$ см,
 $m=5$ г.

$Q=?$

$$mg + T + F_k = 0,$$

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

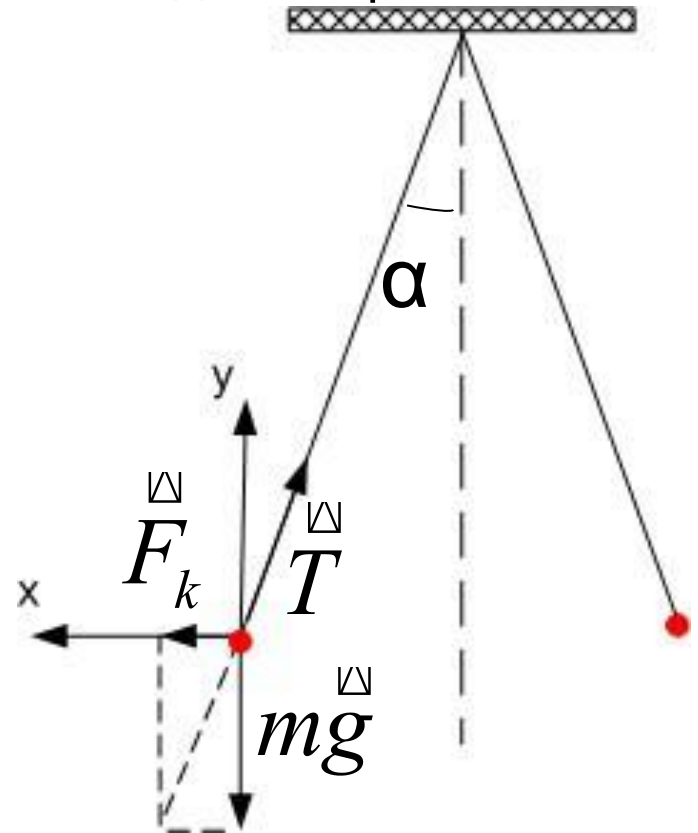
$$F_k - T \sin \alpha = 0$$

$$T \sin \alpha = F_k$$

$$\cos \alpha = \frac{mg}{T}$$

$$|F_k| = k \frac{(Q/2)^2}{r^2},$$

$$r = 2l \sin \alpha$$



$$Q = \sqrt{\frac{16T\ell^2 \sin^3 \alpha}{k}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 16T\ell^2 \sin^3 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2} \quad Q = 8\ell \sqrt{\pi T \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$Q = 8 \cdot 0,1 \sqrt{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 98 \cdot 10^{-3} \left[1 - \left(\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{9,8 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Ответ: $Q = 1,1$ мкКл.

3.(9.19) К вертикально расположенной бесконечной однородно заряженной плоскости прикреплена нить, на другом конце которой расположен одноименно заряженный шарик массой $m=40$ мг и зарядом $q=31,8$ нКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик, $T=0,5$ мН. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости. Диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряд $\epsilon=6$. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

Дано

$$m=40 \text{ мг}$$

$$q=31,8 \text{ нКл}$$

$$T=0,5 \text{ мН}$$

$$\epsilon=6$$

$$g=10 \text{ м/с}^2$$

$$\sigma = ?$$

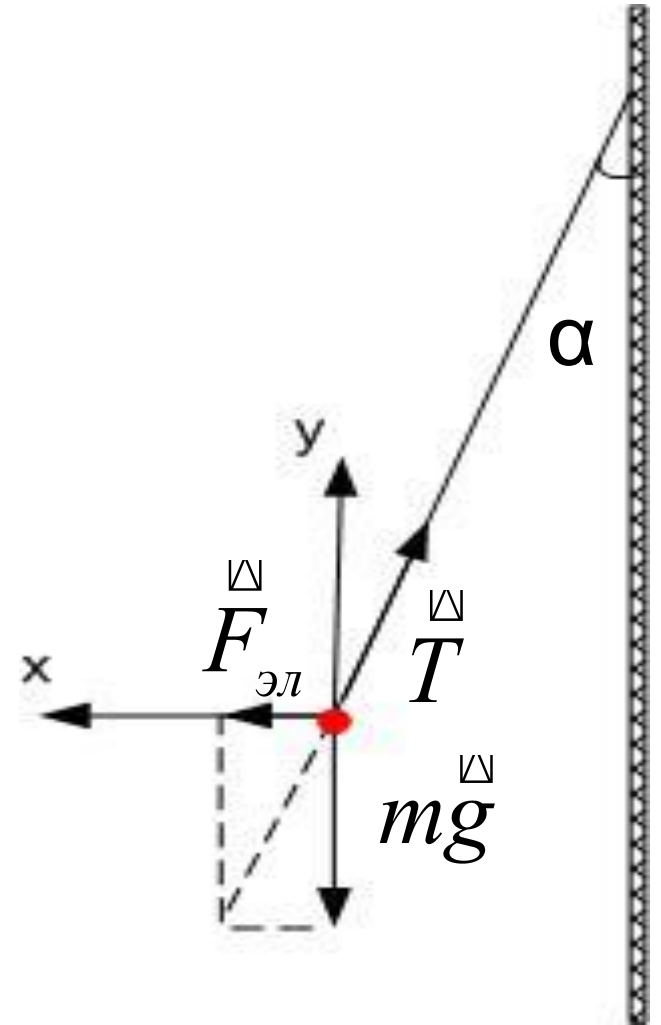
$$\vec{mg} + \vec{T} + \vec{F}_k = 0,$$

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

$$F_{\text{эл}} - T \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{mg}{T}$$

$$T \sin \alpha = F_{\text{эл}}$$



$$F_{\text{эл}} = qE \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

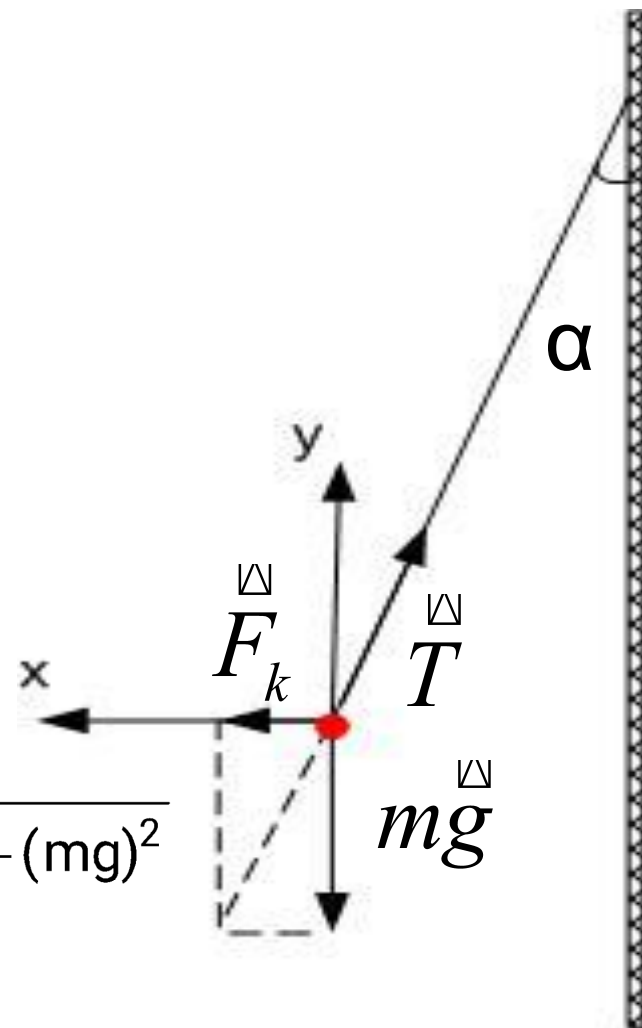
$$F_{\text{эл}} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = T \sin\alpha.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 T \sin\alpha}{q} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 T}{q} \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{q} \sqrt{T^2 - (mg)^2}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{31,8 \cdot 10^{-9}} \sqrt{1 - \left(\frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{0,5 \cdot 10^{-3}}\right)^2}$$

Ответ: $\sigma = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$.



4.(9.20) Найти силу F , действующую на заряд $q=0,66$ нКл, если заряд помещен: а) на расстоянии $r_1=2$ см от длинной однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau=0,2$ мКл/м; б) в поле однородно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma=20$ мКл/м²; в) на расстоянии $r_2=2$ см от поверхности однородно заряженного шара радиусом $R=2$ см и поверхностной плотностью заряда $\sigma=20$ мКл/м². Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon=6$.

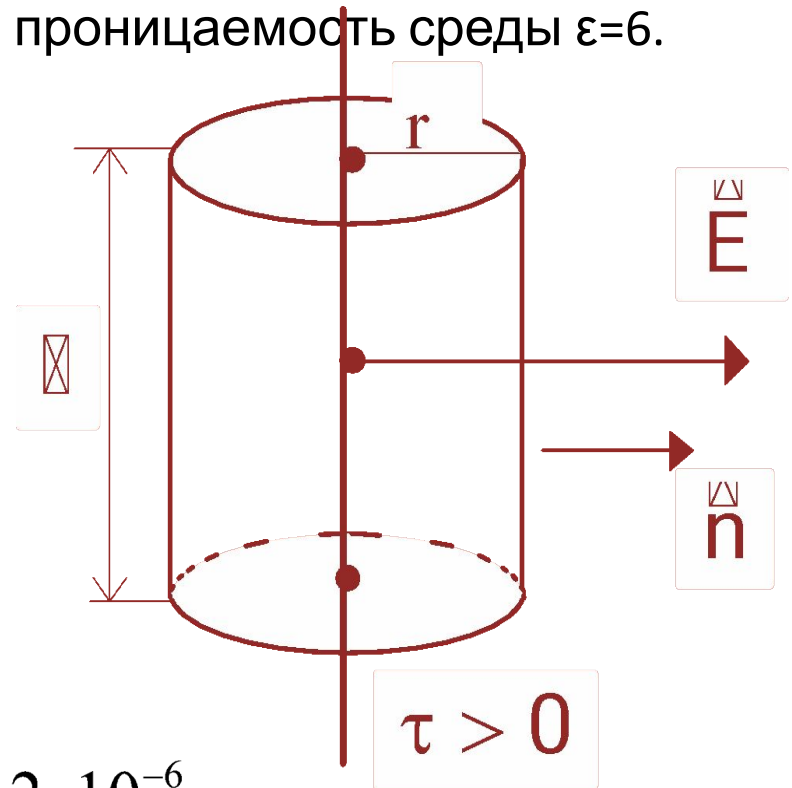
Дано

а)
 $q=0,66$ нКл
 $r_1=2$ см
 $\tau=0,2$ мКл/м
 $\epsilon=6$

$F=?$

$$F_1 = qE_1$$

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1}$$



$$F_1 = \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_1} = \frac{0,66 \cdot 10^{-9} \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{-12}} = 19,7 \cdot 10^{-6}$$

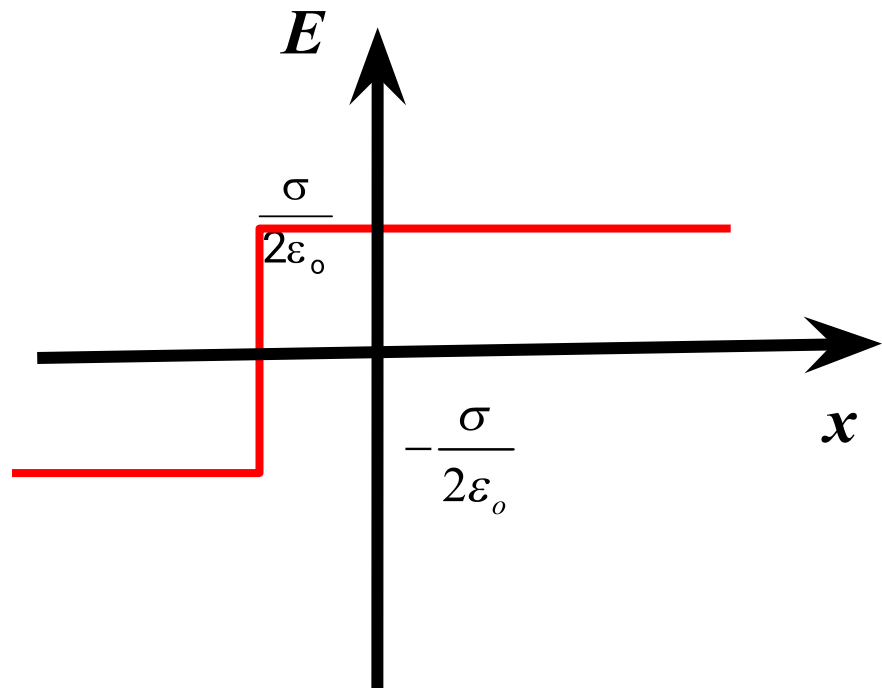
Дано

б)

$$q = 0,66 \text{ нКл}$$

$$\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$$

$$\varepsilon = 6$$



$$F_2 = qE_2$$

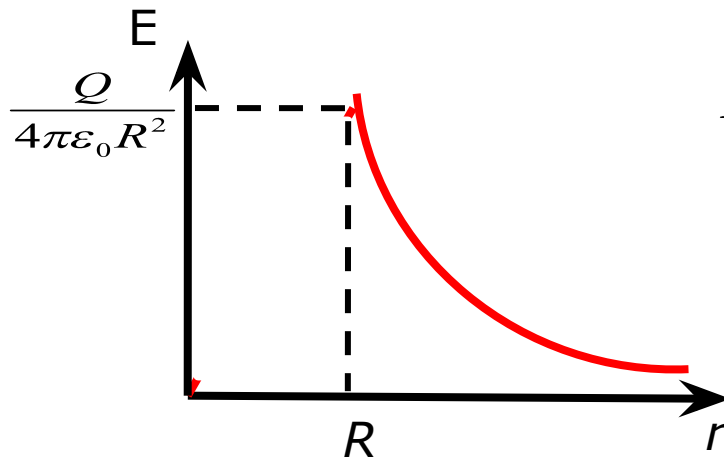
$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$F_2 = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{0,66 \cdot 10^{-9} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 124$$

$F = ?$

Дано

в)
 $q = 0,66 \text{ нКл}$
 $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$
 $r_2 = 2 \text{ см}$
 $R = 2 \text{ см}$
 $\varepsilon = 6$



$F = ?$

$$F_3 = qE_3$$

$$E_3 = \frac{Q_{\text{ш}}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+r_2)^2}$$

$$Q_{\text{ш}} = \sigma 4\pi R^2$$

$$F_3 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R+r_2)^2}.$$

$$F_3 = \frac{0,66 \cdot 10^{-9} \cdot 20 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 10^{-2})^2}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2})^2} = 62 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

Ответ: а) $F_1 = 20 \text{ мкН}$; б) $F_2 = 126 \text{ мкН}$; в) $F_3 = 62,8 \text{ мкН}$.

5.(9.23) С какой силой F_l электрическое поле бесконечной однородно заряженной плоскости действует на единицу длины однородно заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити $\tau = 3 \text{ мкКл/м}$ и поверхностная плотность заряда на плоскости $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$.

Дано

$\tau = 3 \text{ мкКл/м}$ $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$.

$F = ?$

$$F = qE, \quad q = \tau l$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad F = \frac{\tau l \sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$F = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-12}} = 3,4 \text{ Н/м}$$

Ответ: $F_l = 3,4 \text{ Н/м}$

6.(9.26) С какой силой F_s на единицу площади отталкиваются две одноименные однородно заряженные бесконечно протяженные плоскости. Поверхностная плотность заряда на плоскостях $\sigma=0,3 \text{ мкКл/м}^2$.

Дано $\sigma=0,3 \text{ мкКл/м}^2$ $F=?$	$F = q_1 E_2$ $q_1 = \sigma_1 S \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma,$ $E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \qquad F = \frac{\sigma_1 S \sigma_2}{2\varepsilon_0},$ $F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \qquad F = \frac{(0,3 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 1}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,1 \cdot 10^{-3}$
---	---

Ответ: $F_s=5,1 \text{ кН/м}^2$.

7.(9.29) Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

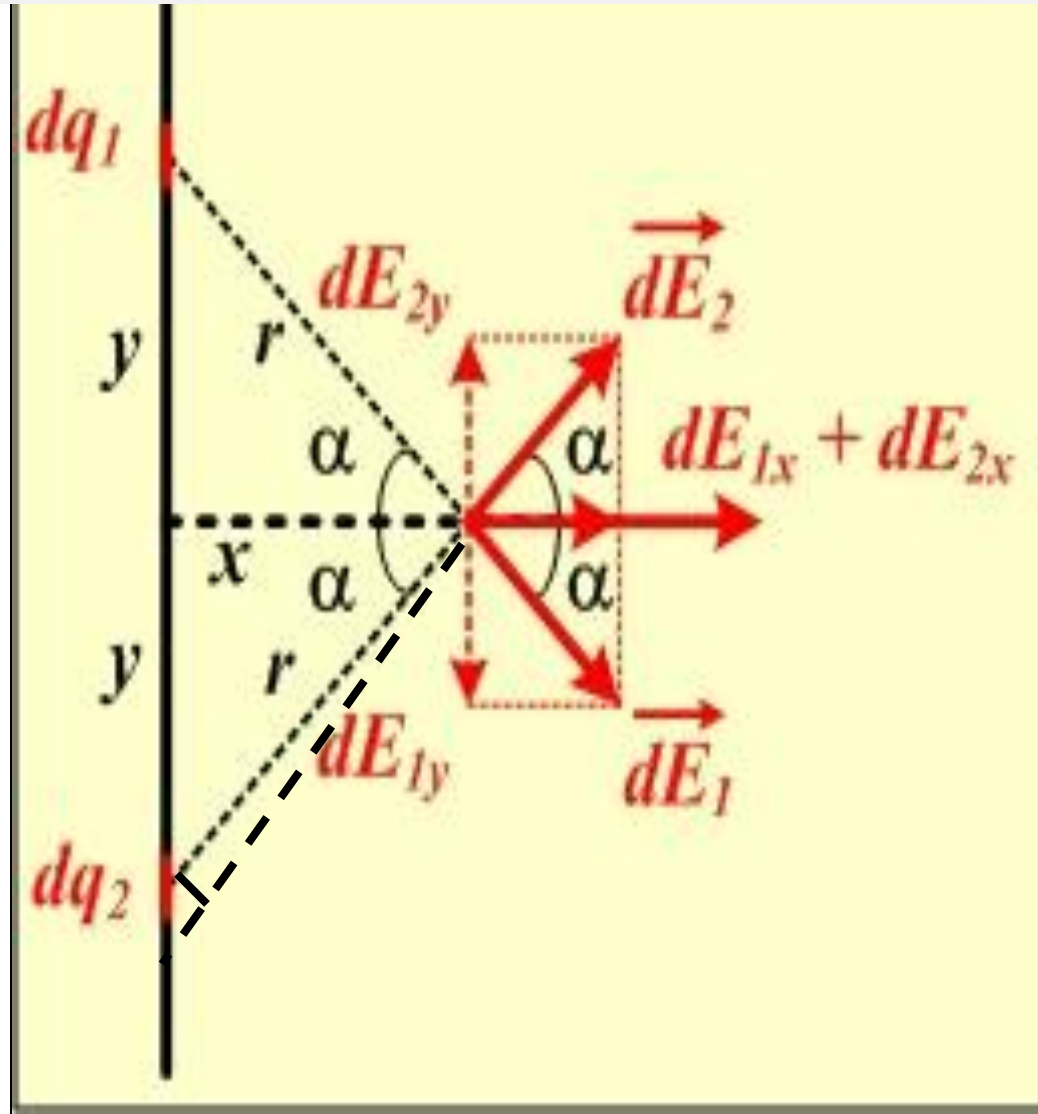
$$\vec{E} = \sum d\vec{E}_i$$

$$\sum_i dE_{yi} = 0$$

$$E = \sum E_{xi}$$

$$dE_{xi} = dE_i \cos \alpha_i$$

$$dE = \frac{\tau \cdot dl \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$dE = \frac{\tau \cdot \frac{dr}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

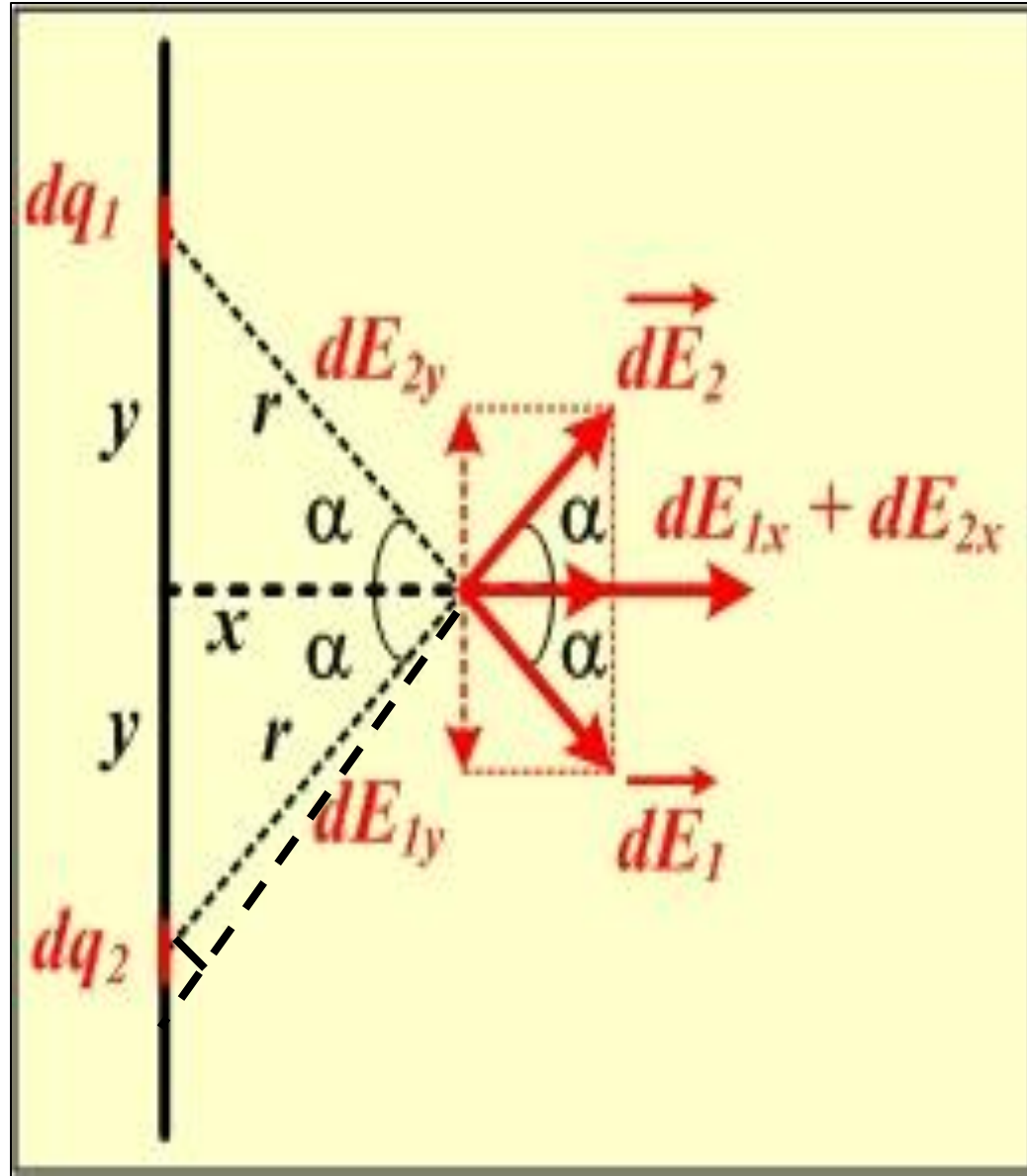
$$dr = r \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau \cdot \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 x} \cdot d\alpha$$

$$E = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 x} \cdot d\alpha$$



7.(9.29) Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

$$E = \frac{\tau \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$\sin \theta = \frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + x^2}}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + x^2}}$$

$$\ell/2 \gg x$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$x \gg \ell/2$$

$$\tau \ell = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

8. Длина однородно заряженной нити $l=25$ см. При каком предельном расстоянии a от нити по нормали к ее середине возбуждаемое ею электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 0,05. Указание: допускаемая ошибка δ равна $(E_2 - E_1)/E_2$, где E_2 – напряженность электрического поля бесконечно длинной нити, E_1 – напряженность поля нити конечной длины.

Дано

$$l = 25 \text{ см}$$

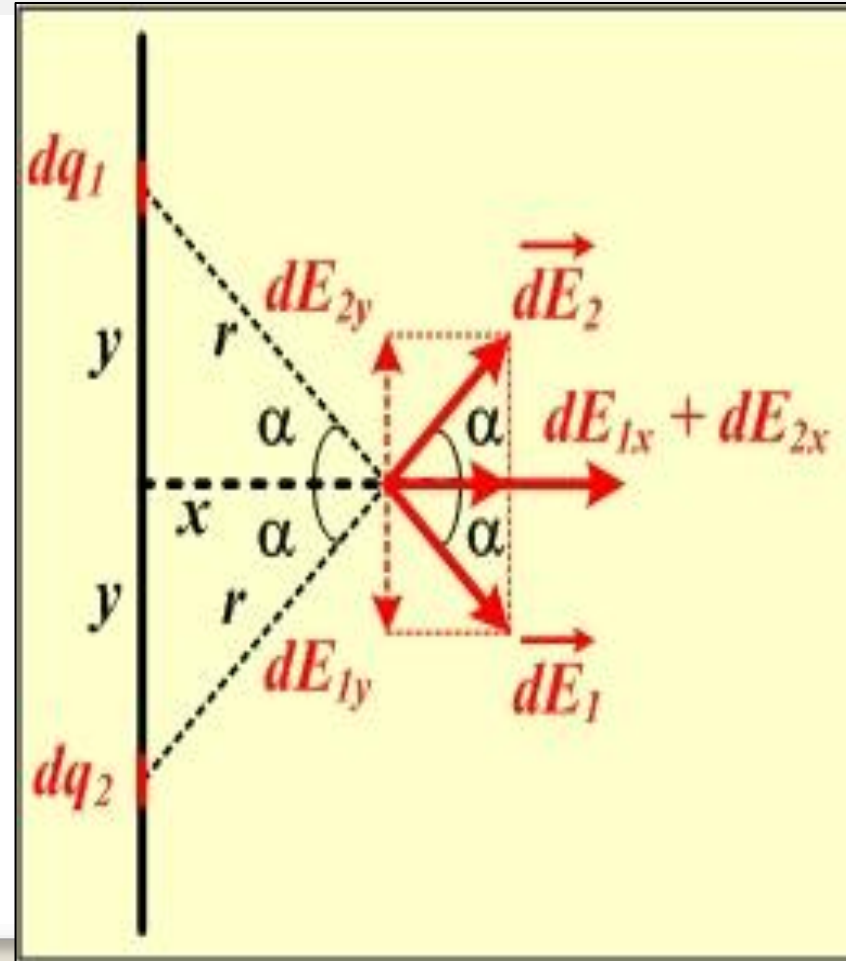
$$\delta = 0,05$$

$$a = ?$$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$E_1 = \frac{\tau \sin \alpha}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2}$$



$$\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2} = 1 - \sin \alpha = 1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}},$$

$$\delta = 1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}} \quad \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}} = 1 - \delta$$

$$4a^2 = \frac{\ell^2}{(1 - \delta)^2} - \ell^2$$

$$\ell^2 = (1 - \delta)^2 (\ell^2 + 4a^2)$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell^2}{(1 - \delta)^2} - \ell^2},$$

$$a = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{1}{(1 - \delta)^2} - 1}$$

$$a = \frac{0,25}{2} \sqrt{\frac{1}{(1 - 0,05)^2} - 1} = 0,041$$

Ответ: a=4,1 см.

9.(9.33) Напряженность электрического поля на оси однородно заряженного кольца имеет максимальное значение на некотором расстоянии от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на половине этого расстояния, будет меньше максимального значения напряженности?

Дано

$$E(L) = E_{\max}$$

$$\frac{E_L}{E_{0,5L}} = ?$$

$$E = \sum E_{xi}$$

$$\sum_i dE_{yi} = 0$$

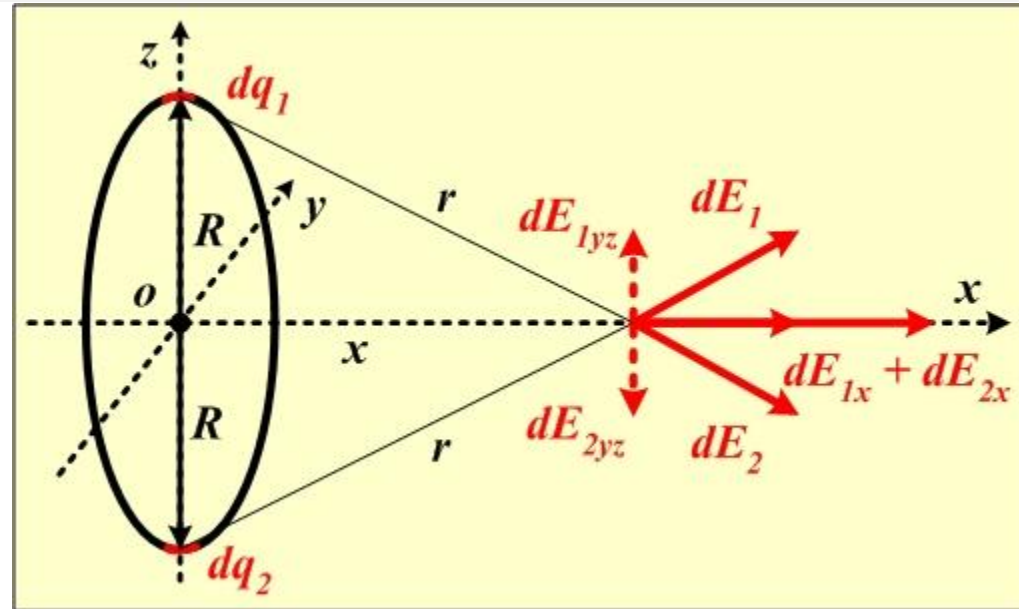
$$dE_{xi} = dE_i \cos \alpha$$

$$E = \int dE = \int \frac{dq \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0$$



$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{4\pi\epsilon_0 q [(R^2 + x^2)^{3/2} - 3/2 (R^2 + x^2)^{1/2} 2x \cdot x]}{(4\pi\epsilon_0)^2 (R^2 + x^2)^3}$$

$$(R^2 + x^2)^{3/2} - \frac{3}{2} (R^2 + x^2)^{1/2} \cdot 2x^2 = 0$$

$$(R^2 + x^2) - 3x^2 = 0 \qquad x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$E(0, 5x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R/2\sqrt{2}}{\left(R^2 + \frac{R^2}{8}\right)^{3/2}}.$$

$$\frac{E_x}{E_{0,5x}} = \frac{R\sqrt{2}(R^2 + R^2/8)^{3/2}}{(R^2 + R^2/2)^{3/2} R/2\sqrt{2}} = \frac{2(1+1/8)^{3/2}}{(1+1/2)^{3/2}} = 1,3$$

10. По четверти кольца радиусом $r=6,1$ см однородно распределен отрицательный заряд с линейной плотностью $\tau=64$ нКл/м. Найти силу F , действующую на заряд $q=12$ нКл, расположенный в центре кольца.

Дано

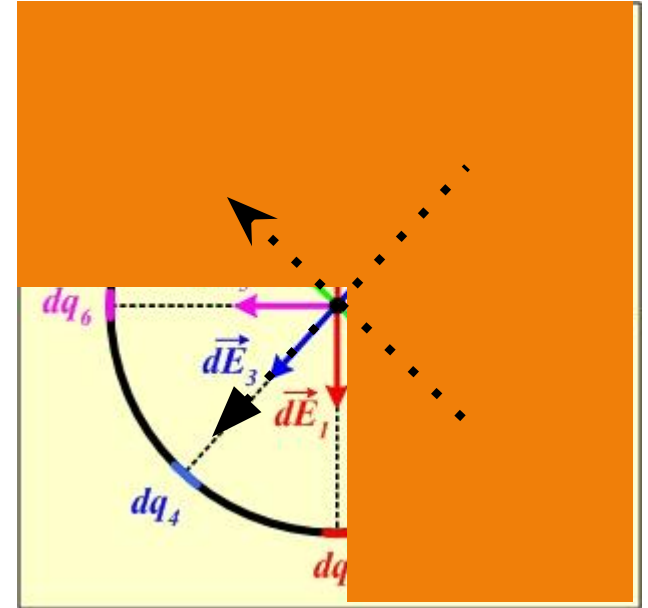
$r=6,1$ см
 $\tau=64$ нКл/м
 $q=12$ нКл

$F=?$

$$F = qE_0$$

$$\sum_i dE_{yi} = 0$$

$$E_0 = \sum dE_{xi} \cos \alpha_i$$



$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{\tau r d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha$$

$$dq = \tau dl = \tau r d\alpha$$

$$dq = \tau dl = \tau r d\alpha$$

$$E_0 = 2 \int_0^{\pi/4} dE_x = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\tau r d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\pi/4} \cos \alpha d\alpha =$$

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \pi / 4.$$

$$F = qE_0 = \frac{12 \cdot 10^{-9} 64 \cdot 10^{-9} \sqrt{2} / 2}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} 6,1 \cdot 10^{-2}} = 161$$

Ответ: $F = 161$ мкН.

Напряженность поля заряженной сферы

11. Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R , несущей заряд Q , на расстоянии r от центра сферы:

внутри сферы ($r < R$): $E = 0$;

на поверхности сферы ($r = R$):
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}$$

вне сферы ($r > R$):
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

Получите данные соотношения.

Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.

Заряженная равномерно по поверхности сфера.

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

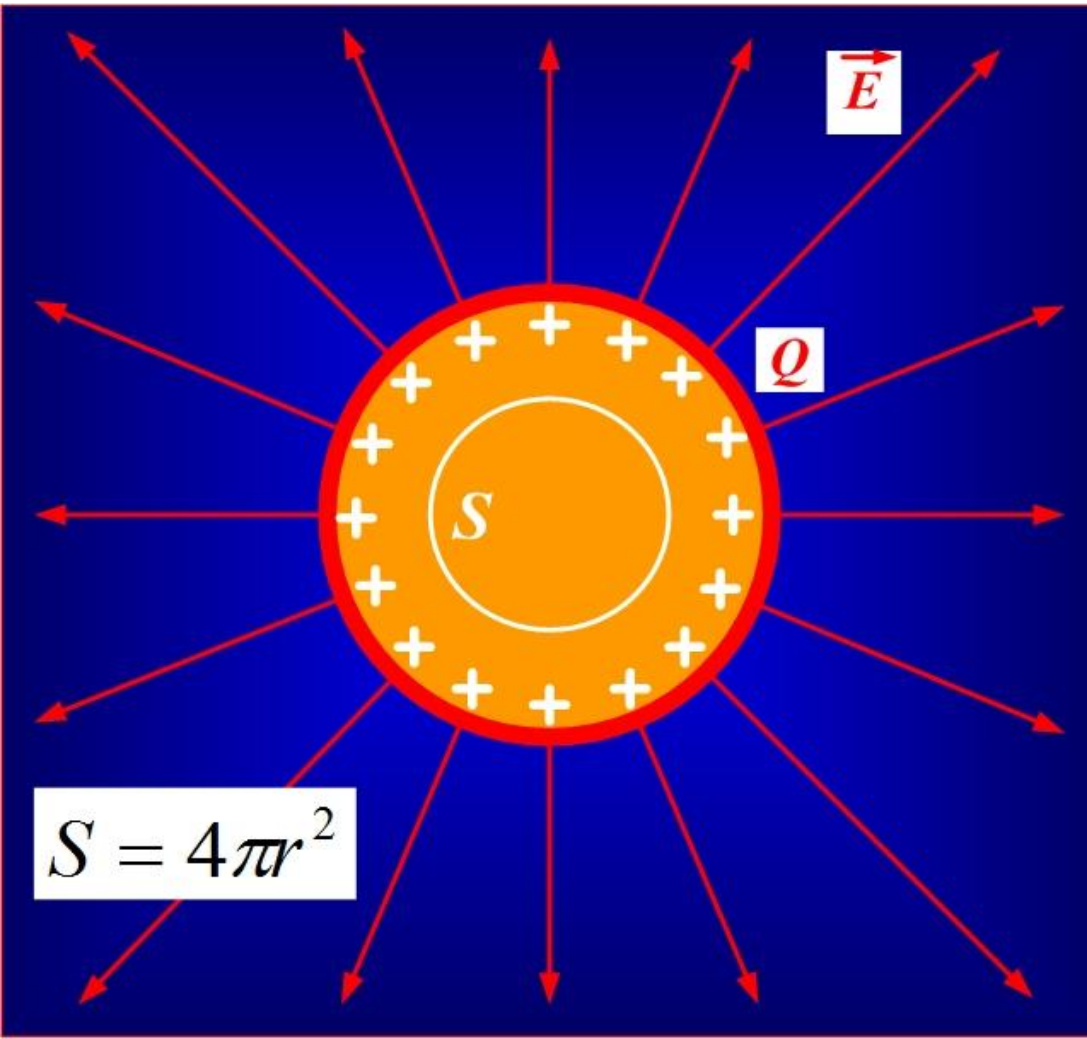
Поверхность сферы разделяет все пространство на две части: внутреннюю ($r < R$) и внешнюю ($r \geq R$).

$$r < R \quad Q = 0$$

$$\Phi_E = ES =$$

$$= E \cdot 4\pi \cdot r_1^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$



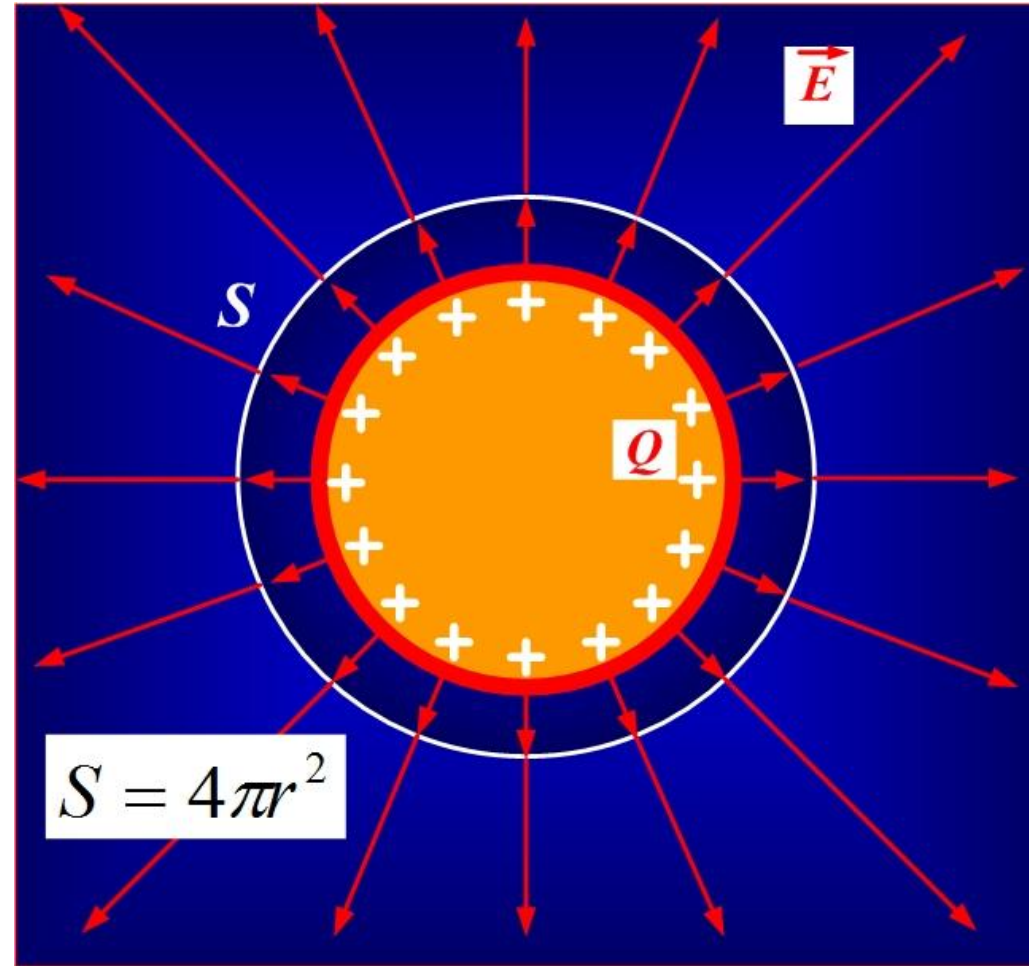
Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.

Заряженная равномерно по поверхности сфера.

$$r \geq R \quad Q = \sigma 4\pi R^2$$

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r_2^2}.$$