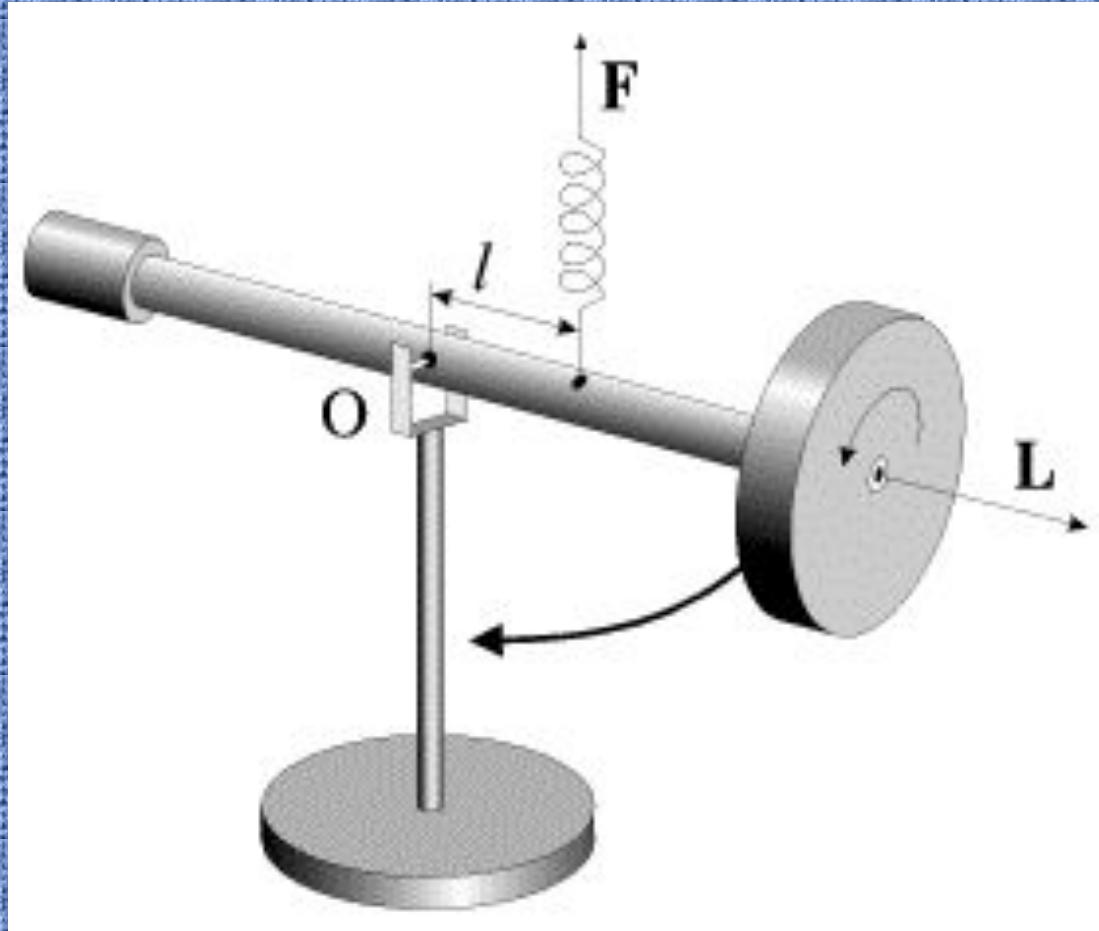


МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



План лекции

1. ***МЕХАНИКА ТТ.*** Момент инерции.
2. *Кинетическая энергия вращения.*
3. *Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения.*
4. *Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.*
5. *Деформации твердого тела.*

Момент инерции

Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс m материальных точек системы на квадрат расстояния до оси (дискретное распределение точек):

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу: $I = \int_0^m r^2 dm.$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Гюйгенса-Штейнера**: момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции I_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_c + ma^2.$$

Моменты инерции некоторых тел

1	Шар (ось вращения проходит через центр)	$I_u = \frac{2}{5} mR^2$
2	Сплошной цилиндр, диск (ось вращения проходит через центр)	$I_\delta = \frac{1}{2} mR^2$
3	Полый цилиндр (ось вращения проходит через центр)	$I_y = mR^2$
4	Стержень (ось вращения проходит через середину)	$I_c = \frac{1}{12} ml^2$
5	Стержень (ось вращения проходит через конец)	$I_c = \frac{1}{3} m\ell^2$

Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно ТТ, вращающееся около неподвижной оси Z , проходящей через него. Кинетическая энергия поступательного движения тела:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Используя формулу $v = \omega R$, получим

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2 m_i}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2},$$

I_z – момент инерции ТТ относительно оси Z .

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела:

$$T_{вр} = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Сравнивая формулы $E_{пост} = \frac{m v^2}{2}$ и $T_{вр} = \frac{I \omega^2}{2}$,

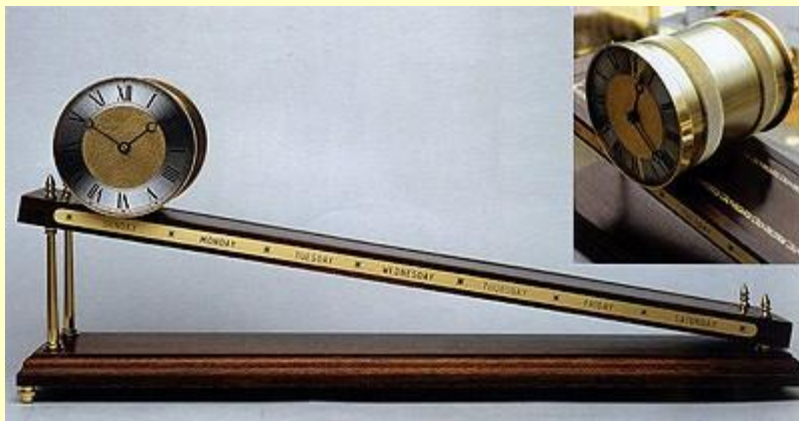
можно сделать вывод, что физический смысл **момента инерции** – **мера инертности тела** при вращательном движении.

В случае плоского движения тела, энергия движения складывается:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}.$$

Плоское движение – движение, когда тело совершает одновременно поступательное и вращательное движение.

Примеры плоского движения



Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса - вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \text{ или } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

$\vec{M}$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (рис.1). Модуль момента силы

$$M = rF \sin \alpha = Fl, (1)$$

α - угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $r \sin \alpha = l$ – плечо силы – кратчайшее расстояние между линией действия силы и т. O .

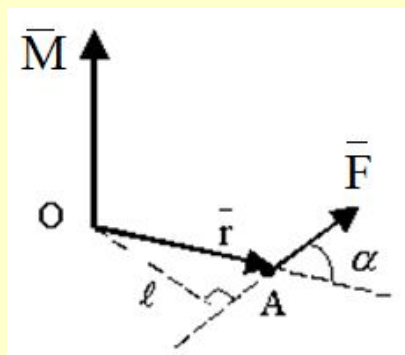


Рис. 1

Работа при вращении тела равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения

но записать:

$$dA = M_z d\varphi \quad dA = Fr \sin \alpha d\varphi.$$

где M_z - момент силы относительно неподвижной оси Z .

С другой стороны, работа при вращении тела идет на увеличение кинетической энергии:

$$dA = dE_k, \text{ но } dE_k = d\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right) = I_z \omega d\omega; \Rightarrow dA = M_z d\varphi = I_z \omega d\omega, \quad M_z \frac{d\varphi}{dt} = I_z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

$$\text{Учитывая } \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \text{ получаем } M_z = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon. \quad \vec{M} = I \vec{\varepsilon}. (2)$$

Уравнение (2) называется **уравнением динамики вращательного движения** твердого тела относительно неподвижной оси.

Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса материальной точки A относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] \text{ или } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

$\vec{r}$ – радиус - вектор от т. O до т. A , $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс материальной точки, $\vec{L}$ – псевдовектор – направлен в сторону поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$ (рис. 2). Модуль L : $L = rp \sin \alpha = rmv \sin \alpha = p\ell$, $\ell = r \sin \alpha$ – плечо.

Моментом импульса ТТ относительно оси, называется величина



при условии, что

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \vec{r}_i,$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i,$$

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2 = I_z \omega, \text{ т.е. } L_z = I_z \omega. (3)$$

Таким образом, момент импульса ТТ относительно оси равен произведению момента инерции тела на угловую скорость.

Продифференцируем формулу (3) по времени: $\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z$ т.е. $\frac{dL_z}{dt} = M_z$

- это **уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси: производная момента импульса ТТ относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

В замкнутой системе $M=0$, $\frac{dL}{dt} = 0; \Rightarrow L = const$ - **закон сохранения момента импульса**.

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется с течением времени.

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса m	Момент инерции $I = mr^2$
Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила $\vec{F} = m\vec{a}$	Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad L_z = I_z \omega$
Основное уравнение динамики $\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики $I_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}_z$
Кинетическая энергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия $T_{\text{вр}} = \frac{I \omega^2}{2}$

Деформации твердого тела

Деформация (от лат. *deformatio* — «искажение») — изменение взаимного положения частиц тела, связанное с их перемещением друг относительно друга. Деформация представляет собой результат изменения межатомных расстояний и перегруппировки блоков атомов. Обычно деформация сопровождается изменением величин межатомных сил, мерой которого является упругое механическое напряжение.

Деформации разделяют на обратимые (упругие) и необратимые (пластические, ползучести). Упругие деформации исчезают после окончания действия приложенных сил, а необратимые — остаются. В основе упругих деформаций лежат обратимые смещения атомов металлов от положения равновесия (другими словами, атомы не выходят за пределы межатомных связей); в основе необратимых — необратимые перемещения атомов на значительные расстояния от исходных положений равновесия (то есть выход за рамки межатомных связей, после снятия нагрузки переориентация в новое равновесное положение).

Пластические деформации — это необратимые деформации, вызванные изменением напряжений. Деформации ползучести — это необратимые деформации, происходящие с течением времени. Способность веществ пластически деформироваться называется пластичностью. При пластической деформации металла одновременно с изменением формы меняется ряд свойств — в частности, при холодном деформировании повышается прочность.

Деформации твердого тела

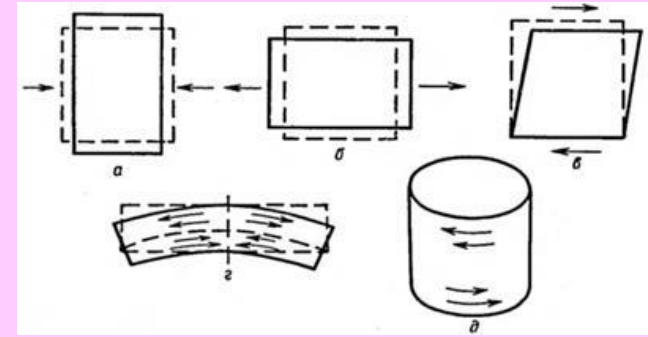
Наиболее простые виды деформации тела в целом:

растяжение-сжатие,

сдвиг,

изгиб,

кручение.



В большинстве практических случаев наблюдаемая деформация представляет собой совмещение нескольких одновременных простых деформаций. В конечном счёте, любую деформацию можно свести к двум наиболее простым: растяжению (или сжатию) и сдвигу. Деформация называется упругой, если она исчезает после удаления вызвавшей её нагрузки (то есть тело возвращается к первоначальным размерам и форме), и пластической, если после снятия нагрузки деформация не исчезает (или исчезает не полностью).

Все реальные твёрдые тела при деформации в большей или меньшей мере обладают пластическими свойствами. Твёрдое тело с достаточной точностью можно считать упругим, то есть не обнаруживающим заметных пластических деформаций, пока нагрузка не превысит некоторого предела (предел упругости).

Природа пластической деформации может быть различной в зависимости от температуры, продолжительности действия нагрузки или скорости деформации. При неизменной нагрузке, приложенной к телу, деформация изменяется со временем; это явление называется ползучестью. С возрастанием температуры скорость ползучести увеличивается.

Деформации твердого тела

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, которую испытывает тело, является его *относительная деформация*.

Относительное изменение длины стержня (*продольная деформация*):

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell},$$

Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

d – диаметр стержня.

Деформации ε и ε' всегда имеют разные знаки (при растяжении $\Delta \ell(+)$, а $\Delta d(-)$; при сжатии $\Delta \ell(-)$, а $\Delta d(+)$). Из опыта вытекает связь между ε и ε' :

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon,$$

μ - (+) коэффициент, зависящий от свойств материала, называемый *коэффициентом Пуассона*.

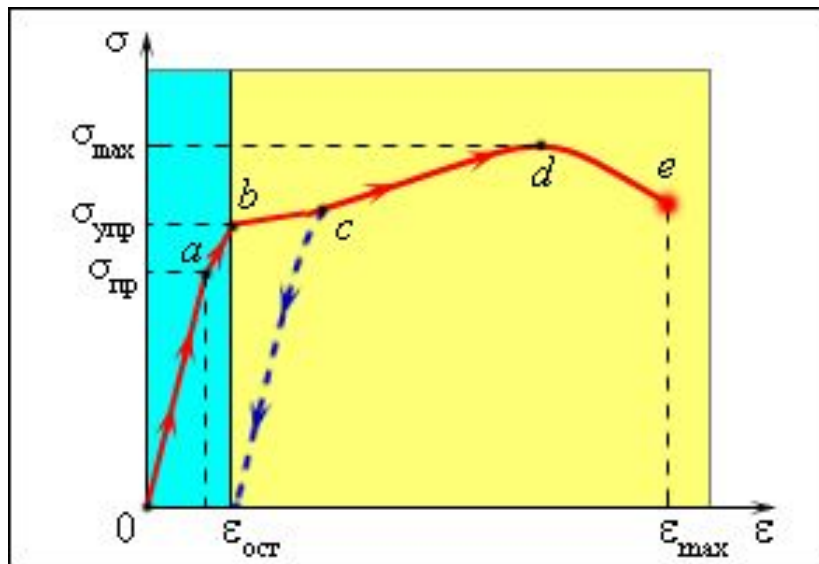
Деформации твердого тела

Американский физик Р. Гук (1635-1703) экспериментально установил, что для малых деформаций относительное удлинение E и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

E – модуль Юнга – определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное 1.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется **напряжением**: $\sigma = \frac{F}{S}$.



$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES} \text{ или}$$

$$F = \frac{ES}{\ell} \Delta \ell = k \Delta \ell$$

k - коэффициент упругости.

закон Гука: удлинение стержня при упругой деформации $\sim$ действующей на стержень силе.

Диаграмма, показывающая зависимость между механическим напряжением (σ) и деформацией (ε) обобщённого материала. Слева — упругие деформации, справа — пластические