ВоГУ

Лекция 31 (13)

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Кузина Л.А., к.ф.-м.н., доцент

2017 г.

План

1. Первое уравнение Максвелла
2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

3. Теорема Остроградского-Гаусса. Третье и четвёртое уравнения Максвелла

4. Полная система уравнений Максвелла

5. Частные случаи: стационарное поле; поле в свободном пространстве

Теория Максвелла для электромагнитного поля

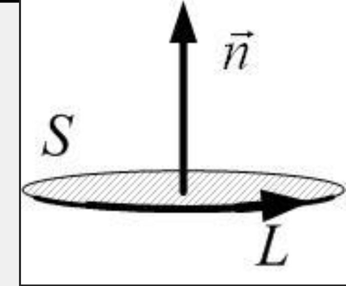
Теория Максвелла для электромагнитного поля – это обобщение :

- теоремы Остроградского-Г
- закона полного
- закона электромагнитной индукции Фарадея

Теория решает задачу электродинамики: найти характеристики электрического и магнитного полей системы зарядов и токов

Первое уравнение Максвелла

(I)



$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0$$

+

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

=

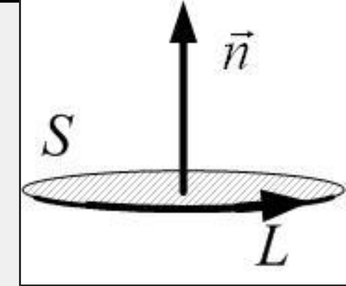
$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$$

Электрические поля создаются как электрическими зарядами, так и изменяющимся магнитным полем

Математическая теорема Стокса:

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = \int_S \left(rot\vec{E}\right)\cdot d\vec{S}$$



Ротор векторного поля; оператор дифференцирования

По определению:

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\left(rot\vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

Ротор – значит «вихрь» : если поле вихревое (непотенциальное), линии замкнуты, то его ротор отличен от нуля.

Ротор показывает вихревой характер поля

$$\oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_S \left(rot\vec{E}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

Контур L – произвольный

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(I)}$$

Первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

Ток смещения

Предположения Максвелла:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \vec{E}_B$$

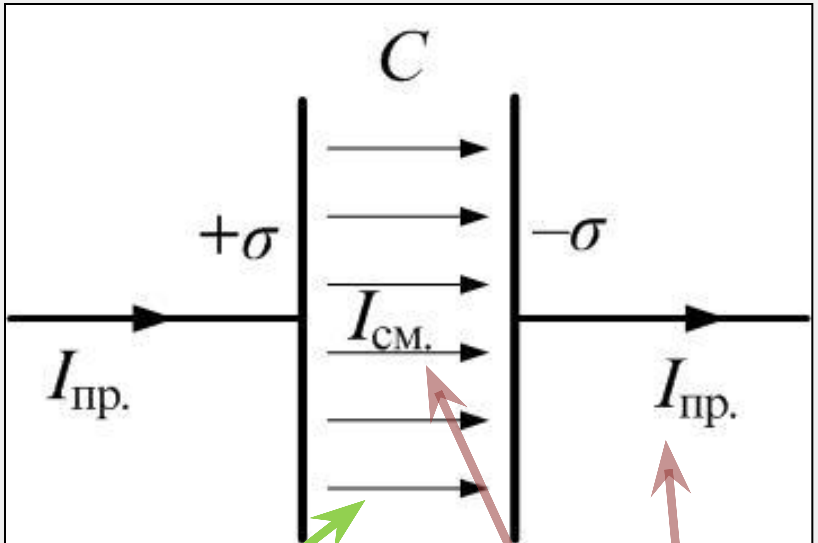
Симметричное предположение:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \vec{B}$$

За создание магнитных полей ответственны токи →

поле *B* удобно описывать с помощью **<u>токов смещения</u>**

Ток смещения



$$\boxed{\frac{d\vec{D}}{dt} \neq 0}$$

Предположение:

внутри конденсатора течёт ток смещения $I_{см}$

Он должен быть равен току проводимости в подводящих проводах

$$\boxed{I_{см.} = I_{пр.}}$$

Ток смещения

$$I_{\text{см.}} = I_{\text{пр.}}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$I_{\text{см.}} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma \cdot S) = S \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

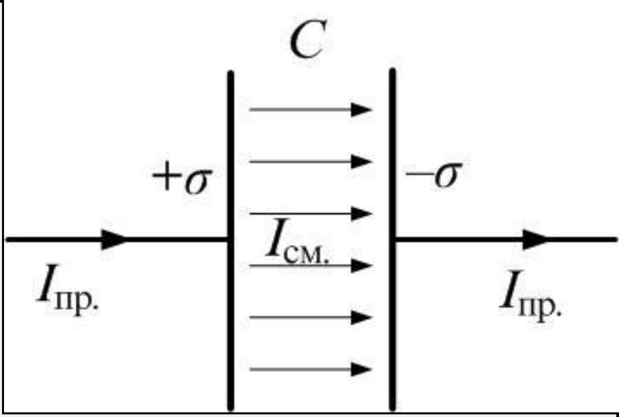
$$\boldsymbol{D=\sigma}$$

$$I_{\text{см.}} = S \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

По определению:

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



Особенности тока смещения:

- Течёт в вакууме, где нет частиц – переносчиков тока
- Не выделяется теплота Джоуля-Ленца
- Единственное положительное свойство (и назначение!) тока смещения **– создавать магнитное поле**

Ток смещения – это просто меняющееся во времени электрическое поле

Некоторые соотношения для плотности тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

Поляризованность

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \vec{j}_{\text{поляриз.}} + \vec{j}_{\text{вак.}}$$

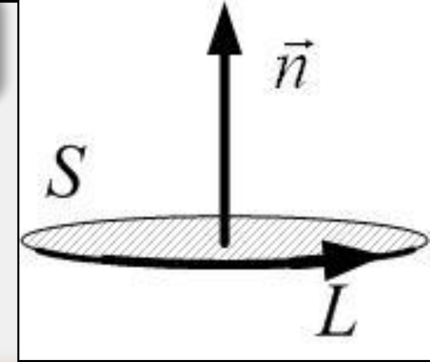
Возникает в веществе при его поляризации в переменном электрическом поле

Существует и в вакууме, где никаких заряженных частиц нет

Теория Максвелла. <u>Второе</u> уравнение Максвелла

Закон полного тока:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}^{\text{макро}} d\vec{S}$$



Поскольку магнитные поля создаются:

- **токами проводимости**
- **токами смещения**

<u>Нужно заменить</u>:

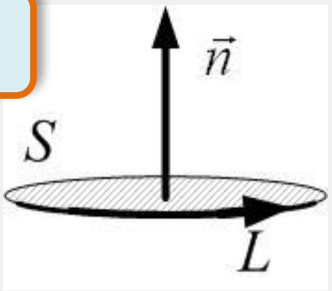
$$\vec{j}^{\text{макро}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см.}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

(II)

<u>Это – второе уравнение Максвелла в интегральной форме</u>

Теория Максвелла. Второе уравнение Максвелла



Второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Математическая теорема Стокса для H:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(rot\vec{H} \right) \cdot d\vec{S}$$

Контур L – произвольный

Второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

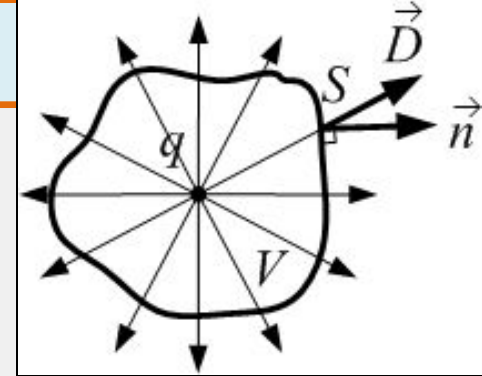
$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(II)

Смысл второго уравнения:

магнитные поля создаются токами проводимости и токами смещения

Теорема Остроградского-Гаусса. <u>Третье</u> уравнение Максвелла



$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum_i q_i^{свободн.}$$

$$\oint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int\limits_V \rho \cdot dV$$

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

(III)

<u>Это – третье уравнение Максвелла в интегральной форме:</u>

Смысл третьего уравнения:

<u>источником электрического поля являются электрические заряды</u>

(III)

$$\oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int\limits_V \boxed{\rho}\cdot dV$$

$$\oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int\limits_V \boxed{\left(div\vec{D}\right)}\cdot dV$$

Математическая теорема Гаусса:

Поверхность S – произвольная

Дивергенция векторного поля по определению:

$$div\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_y}{\partial y}$$

<u>Это – третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме</u>

$$\boxed{div\vec{D} = \rho}$$

Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля
Четвёртое уравнение Максвелла

(IV)

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \boxed{0}$$

Поверхность S – произвольная

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \boxed{\left(div\vec{B}\right)} \cdot dV$$

$$\boxed{div\vec{B} = 0}$$

(IV)

Это – четвёртое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

Смысл четвёртого уравнения: магнитных зарядов нет

Полная система уравнений Максвелла

в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{(I)}$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad \text{(II)}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV \quad \text{(III)}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{(IV)}$$

Это основные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

Это материальные уравнения

Они связывают характеристики полей со свойствами среды и друг с другом и включают закон Ома в дифференциальной форме

Полная система уравнений Максвелла

в дифференциальной форме

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ (I)

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ (II)

$$div\vec{D} = \rho$$ (III)

$$div\vec{B} = 0$$ (IV)

Основные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

Материальные уравнения

Уравнения Максвелла

Частный случай: стационарное поле

Для стационарных полей все производные равны нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \sum I^{\text{проводимости}}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = \sum q^{\text{свободных}}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

$$rot\vec{E} = 0$$

$$rot\vec{H} = \vec{j}$$

$$div\vec{D} = \rho$$

$$div\vec{B} = 0$$

Поля – магнитное и электрическое – разделяются
Их характеристики не связаны друг с другом

Уравнения Максвелла

Частный случай: поле в свободном пространстве

$$\begin{cases}
\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\
\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \\
\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\
\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \\
\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}
\end{cases}$$

В свободном пространстве нет ни зарядов, ни токов проводимости

$$\begin{cases}
rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
div\vec{D} = 0 \\
div\vec{B} = 0
\end{cases}$$

Электромагнитное поле свободном пространстве

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \end{cases}$$

- Изменение магнитного поля $\vec{B}$ порождает поле электрическое $\vec{E}$ тоже в общем случае переменное
- Изменения электрического поля $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ порождают снова возникновение магнитного поля $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$
- Это – электромагнитная волна, распространяющаяся в свободном пространстве, в отрыве от первоначально породивших её зарядов и токов
- Поля – электрическое и магнитное – распространяются, превращаясь друг в друга