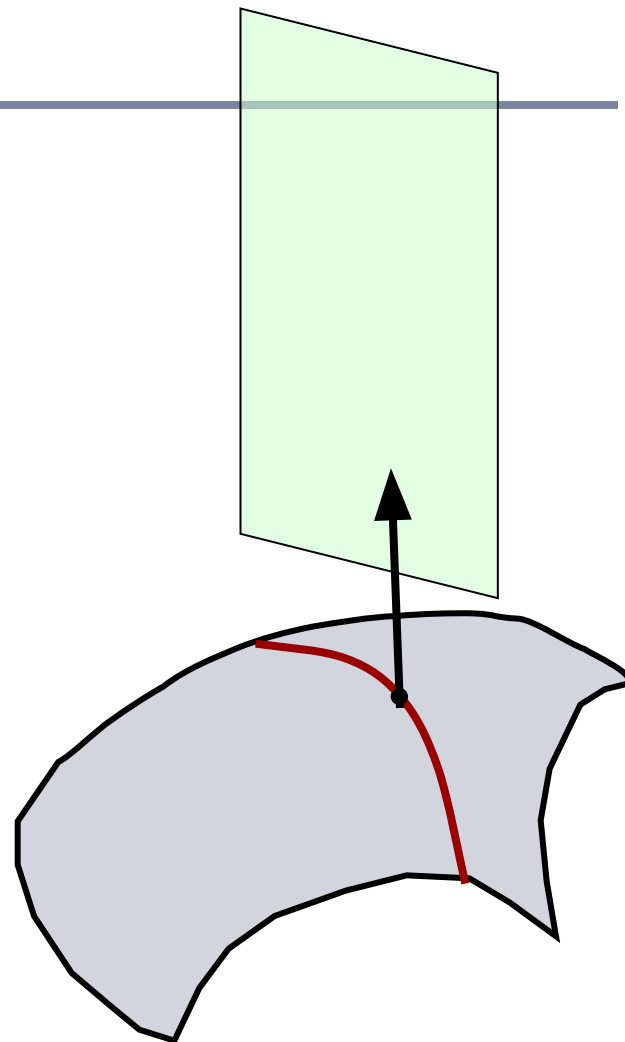


ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Определение нормального
сечения. Свойство
нормального сечения.
Теорема Менье. Индикатриса
Дюпена

Определение нормального сечения

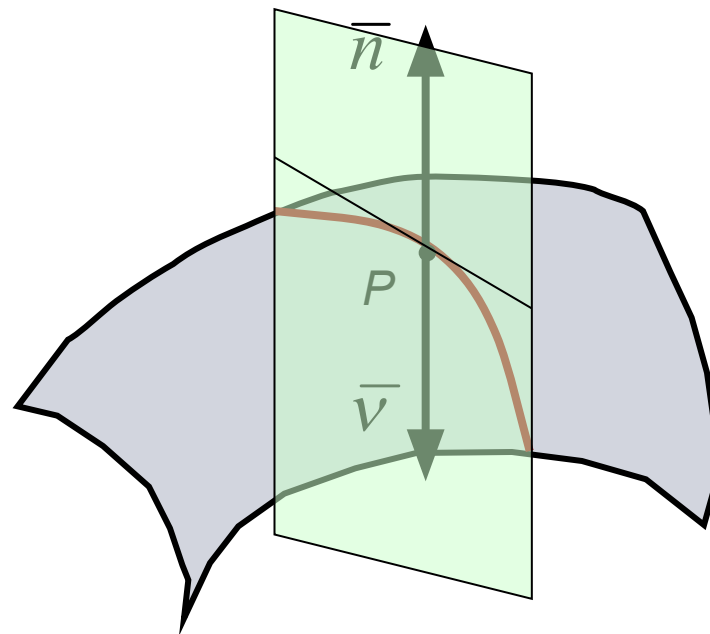
Проведем плоскость через нормаль поверхности в точке P . Она пересечет поверхность по некоторой кривой, которая называется **нормальным сечением поверхности в точке P** .



Определение нормального сечения

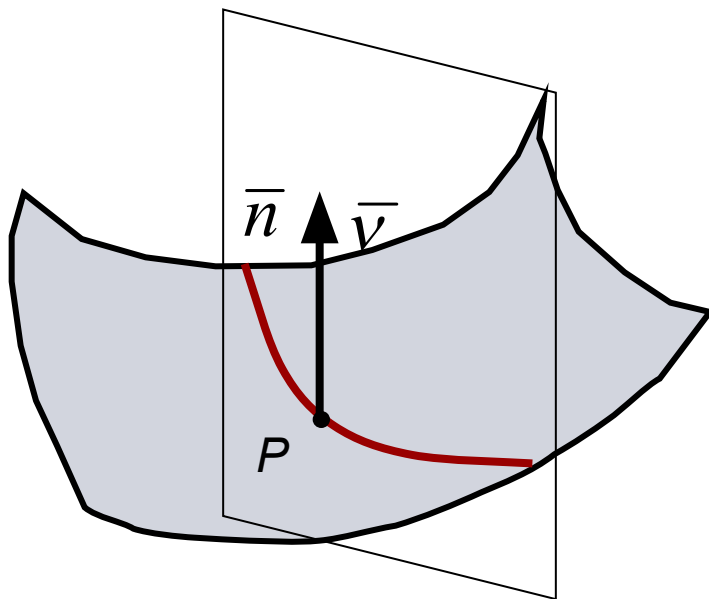
Так как главная нормаль лоской кривой лежит в плоскости этой кривой и она перпендикулярна касательной в данной точке, то $\bar{v} \parallel \bar{n}$,

где $\bar{v}$ - вектор главной нормали нормального сечения в точке P .

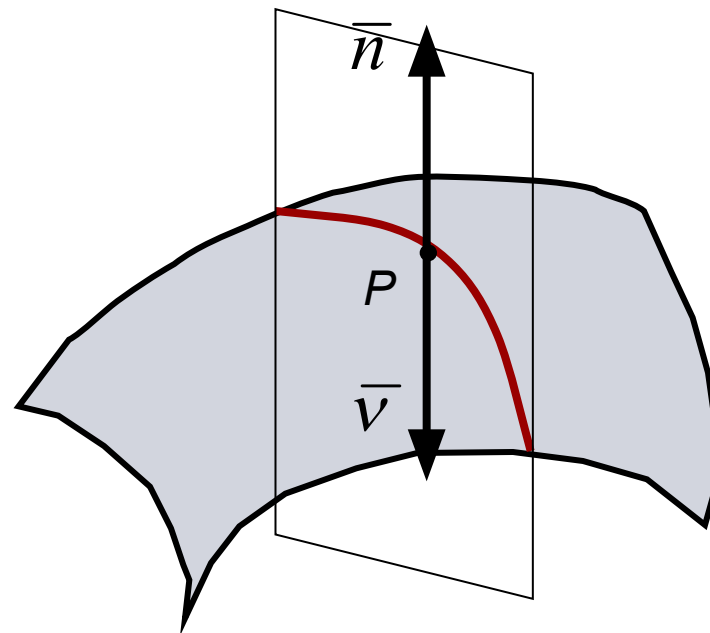


Определение нормального сечения

Нормальное сечение называется **вогнутым**, если $\bar{v} \uparrow\uparrow \bar{n}$ и **выпуклым**, если $\bar{v} \uparrow\downarrow \bar{n}$.



Вогнутое сечение



Выпуклое сечение

Свойство нормального сечения

Утверждение 3

Нормальная кривизна k_n поверхности в точке P в направлении нормального сечения равна кривизне нормального сечения k в этой точке, взятой со знаком $+$, если сечение $\vec{n} \cdot \vec{v} = 1$ вогнутое, и со знаком $-$, если сечение выпуклое: $k_n = \pm k$

Доказательство:

$$k_n = np_{\vec{n}} \vec{r}'' = np_{\vec{n}}(k\vec{v}) = k(\vec{n} \cdot \vec{v}) = \pm k$$

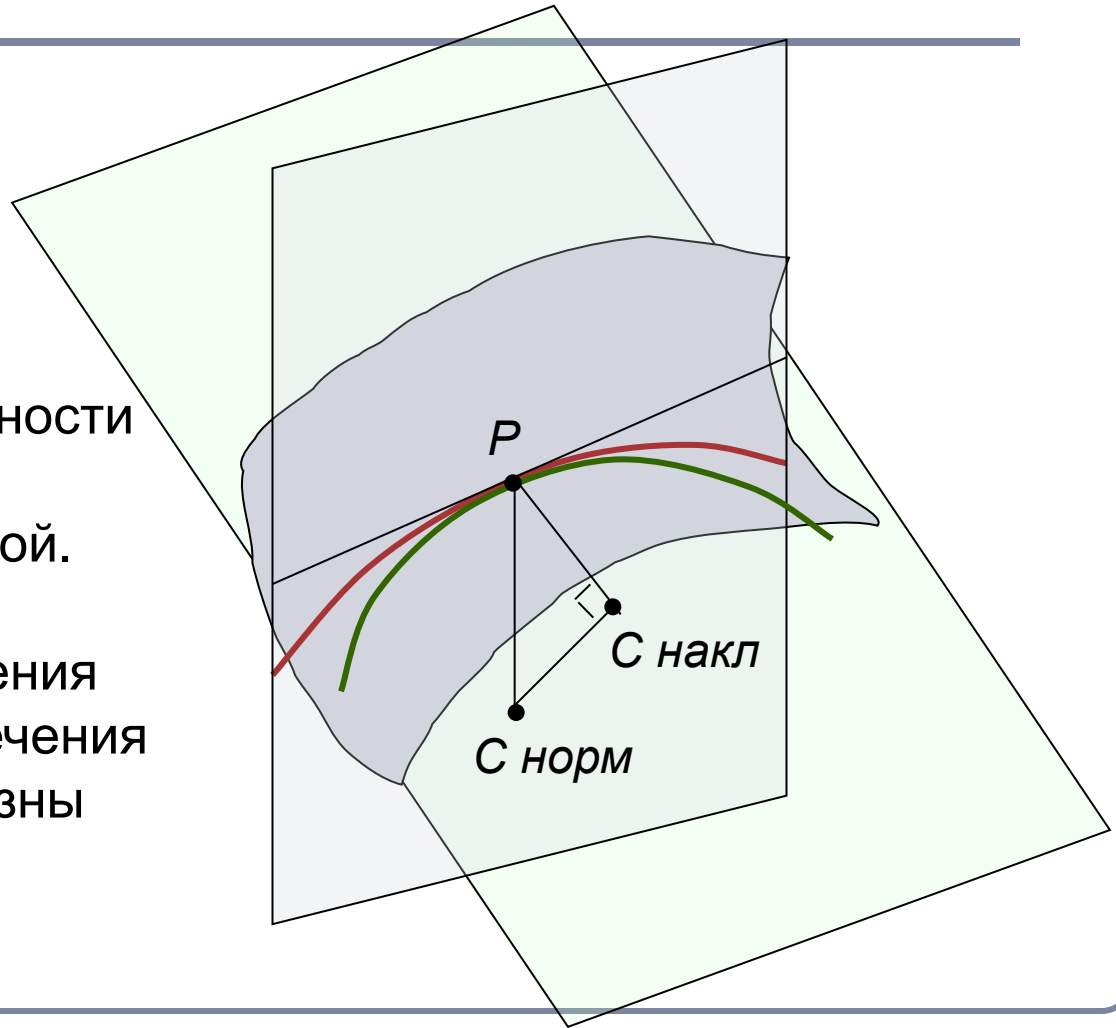
«+» - для вогнутых сечений, т.к. для них $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{n}$, и поэтому

«-» - для выпуклых сечений, т.к. в этом случае $\vec{n} \cdot \vec{v} = -1$

Ч.т.д.

Теорема Менье

Проведём в точке P поверхности нормальное и наклонное сечение с общей касательной. Тогда проекция центра кривизны нормального сечения на плоскость наклонного сечения совпадает с центром кривизны наклонного сечения.



Теорема Менье

В силу утверждения 2: $k_{n_{\text{норм}}} = k_{n_{\text{накл}}} \quad (*)$ $k_{n_{\text{норм}}} = \pm k_{\text{норм}} \quad (**)$

$$k_{n_{\text{накл}}} = \bar{r}_{\text{накл}}'' \bar{n} = k_{\text{накл}} \bar{v}_{\text{накл}} \bar{n}$$

Θ – угол между плоскостями нормального и наклонного сечения (острый).

$$\bar{v}_{\text{накл}} \bar{n} = \pm \cos \theta$$

“+”, если $\bar{n} \uparrow \uparrow \bar{v}_{\text{норм}}$, для вогнутых нормальных сечений;

“-”, если $\bar{n} \uparrow \downarrow \bar{v}_{\text{норм}}$, для выпуклых нормальных сечений.

$k_{n_{\text{накл}}} = k_{\text{накл}} (\pm \cos \theta)$ подставим эту формулу и (**) в (*):

$$\pm k_{\text{норм}} = \pm k_{\text{накл}} \cos \theta, \text{ следовательно, } k_{\text{норм}} = k_{\text{накл}} \cos \theta$$

Теорема Менъе

$$k_{\text{норм}} = \frac{1}{p_{\text{норм}}}, \quad k_{\text{накл}} = \frac{1}{p_{\text{накл}}}, \quad \text{следовательно,}$$

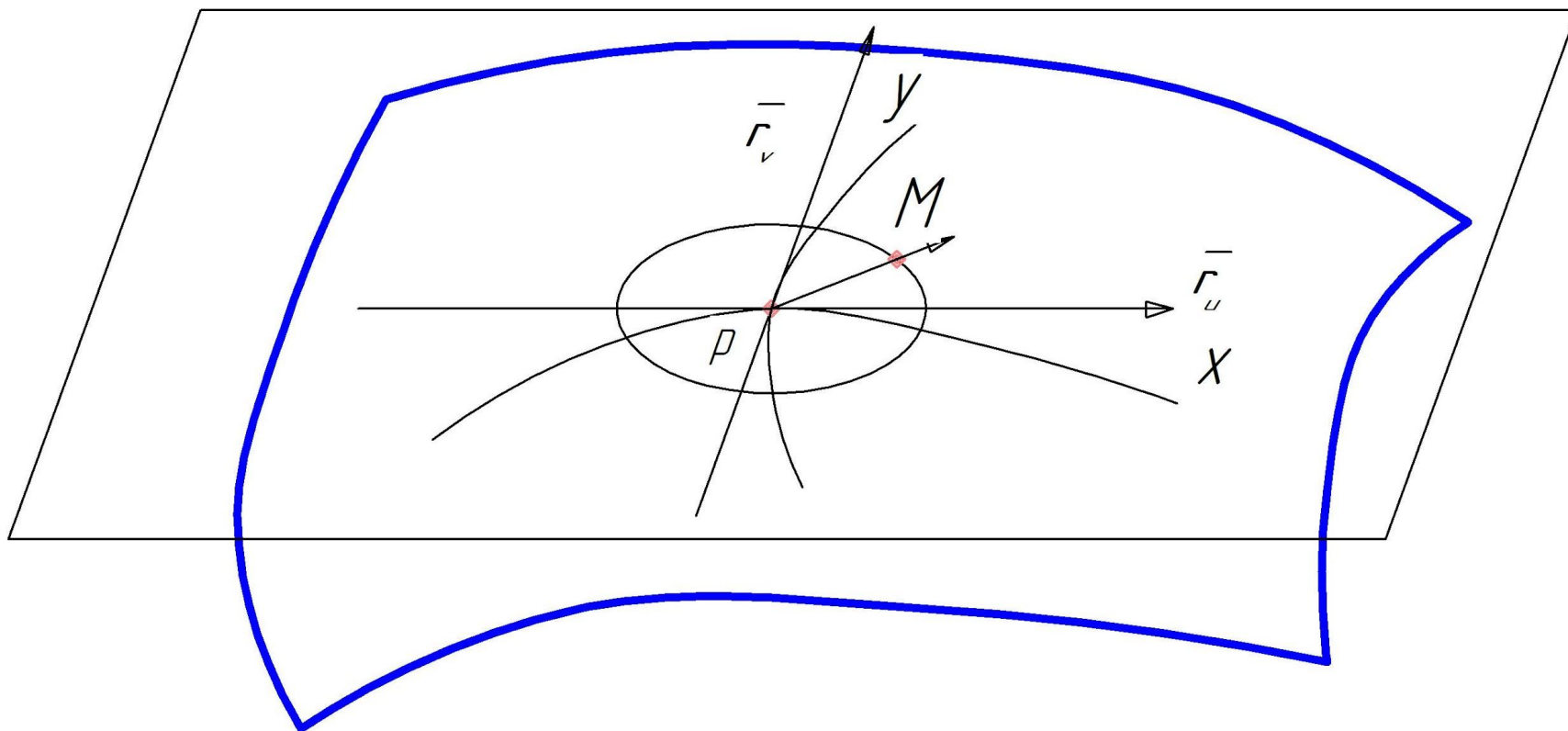
$$p_{\text{накл}} = p_{\text{норм}} \cos \theta$$

Ч.т.д.

Определение индикатрисы Дюпена

Определение: проведём в точке Р поверхности касательную плоскость и в ней отложим от этой точки отрезок длины $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$, где k_n - нормальная кривизна поверхности в точке Р в направлении, в котором откладывается отрезок в касательной плоскости. Противоположный конец отрезка опишет кривую в касательной плоскости, которая называется **индикатрисой Дюпена**.

Определение индикатрисы Дюпена



Уравнение индикатрисы Дюпена

Зададим в касательной плоскости систему координат Pxu , с базисом

$$\bar{r}_u, \bar{r}_v, \quad \text{т.е.} \quad \frac{y}{x} = \frac{dv}{du} \quad (*)$$

Пусть точка $M(x, y)$ на индикатрисе Дюпена, тогда

$$\overline{PM} = x\bar{r}_u + y\bar{r}_v. \quad \text{Так как} \quad |\overline{PM}| = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}}, \quad \text{то} \quad \frac{1}{|k_n|} = (x\bar{r}_u + y\bar{r}_v)^2,$$

$$\text{следовательно,} \quad Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{1}{|k_n|}, \quad \text{а} \quad k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

$$\frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{|Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2|} = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$$

Уравнение индикатрисы Дюпена

Умножим числитель и знаменатель левой дроби на $\frac{y^2}{dv^2}$,

Получим с использованием равенства (*):

$$\frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2|} = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 \Rightarrow |Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1$$

$$\text{или } Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1 \quad (23)$$

(23) – уравнение индикатрисы Дюпена в системе координат Pxy в касательной плоскости.

Виды индикатрис Дюпена. Типы точек на поверхности

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$$

Индикатриса Дюпена – кривая второго порядка, в уравнении которой отсутствует слагаемые первой степени. Следовательно ИД не может быть параболой $y^2=2px$

Вид кривой зависит от значения инварианта I_2

$$I_2 = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = LN - M^2$$

1. Если $I_2 > 0$ ($LN - M^2 > 0$), следовательно, индикатриса Дюпена – эллипс, и точка Р на поверхности называется **эллиптической**.

Виды индикатрис Дюпена. Типы точек на поверхности

2. Если $I_2 < 0$ ($LN - M^2 < 0$), следовательно, индикатриса Дюпена – пара смежных гипербол, точка Р называется **гиперболической**.
3. Если $I_2 = 0$ ($LN - M^2 = 0$), тогда индикатриса Дюпена – пара параллельных прямых, точка Р называется **параболической**.

Пример

1. На эллипсоиде все точки эллиптические.
2. На однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде все точки гиперболические.
3. На торе все три типа точек на поверхности присутствуют:

Во внешней части тора – эллиптические точки, во внутренней части – гиперболические точки, а на окружностях, разделяющих внешнюю и внутреннюю части – параболические точки.

Вблизи эллиптической точки поверхность представляет собой часть эллипсоида.

Вблизи гиперболической точки поверхность представляет собой гиперболический параболоид, а вблизи параболической точки – цилиндр.

