

Нормальные алгоритмы Маркова



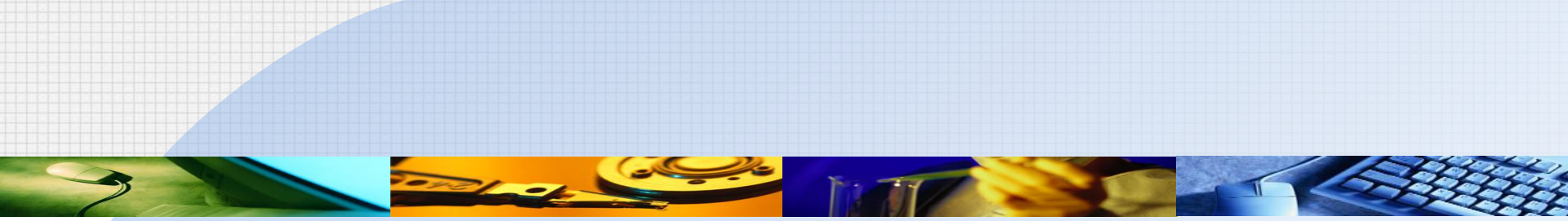


Теория **нормальных алгоритмов** была разработана советским математиком Андреем Андреевичем Марковым в конце 1940-х годов.

При изучении разрешимости некоторых задач алгебры, он предложил новую модель вычислений, которую назвал **нормальными алгорифмами**.

Андрей Андреевич Марков (младший)
(22.09.1903-11.10.1979) – советский математик, сын известного русского математика А.А.Маркова, основоположник советской школы конструктивной математики, автор понятия нормального алгоритма (1947 г.)





Нормальные алгорифмы Маркова (НАМ) — это строгая математическая форма записи алгоритмов обработки символьных строк, которую можно использовать для доказательства разрешимости или неразрешимости различных задач.

Эти алгоритмы представляют собой некоторые правила по переработке слов в каком-либо алфавите.

При этом исходные данные и результат работы алгоритма являются словами в этом алфавите.



Марков предположил, что **любой алгоритм можно записать как НАМ.**

В отличие от машин Тьюринга **НАМ** — это "чистый" алгоритм, который не связан ни с каким "аппаратным обеспечением" (лентой, кареткой и т.п.).

НАМ преобразует одно слово (цепочку символов некоторого алфавита) в другое и задается *алфавитом* и *системой подстановок*.



Алфавитом будем называть любое непустое множество.



Его элементы называются **буквами**, а любая последовательность букв – **словами** в данном алфавите

Для удобства рассуждений допускается **пустое слово**, которые обозначим **Λ**

Слова будем обозначать буквами P, Q, R и с индексами



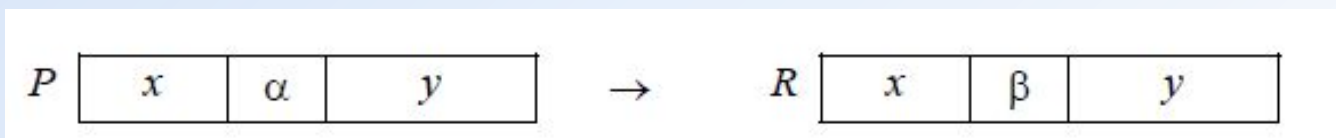
Формулой подстановки называется запись вида $\alpha \rightarrow \beta$ (читается « α заменить на β »), где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

При этом α называется **левой частью** формулы, а β – **правой частью**.

Сама **подстановка (как действие)** задается формулой подстановки и применяется к некоторому слову P .

Суть операции сводится к тому, что в слове P отыскивается часть, совпадающая с левой частью этой формулы (т.е. с α), и она заменяется на правую часть формулы (т.е. на β). При этом остальные части слова P (слева и справа от α) не меняются. Получившееся слово R называют **результатом подстановки**.

Условно это можно изобразить так:



Правила выполнения НАМ



Прежде всего, задается некоторое *входное слово* P .

Работа НАМ сводится к выполнению последовательности шагов. На каждом шаге входящие в НАМ формулы **подстановки просматриваются сверху вниз** и выбирается первая из формул, применимых к входному слову P , т.е. самая верхняя из тех, левая часть которых входит в P . Далее выполняется подстановка согласно найденной формуле. Получается новое слово P' .

На следующем шаге это слово P' берется за исходное и к нему применяется та же самая процедура, т.е. **формулы снова просматриваются сверху вниз начиная с самой верхней** и ищется первая формула, применимая к слову P' , после чего выполняется соответствующая подстановка и получается новое слово P'' . И так далее: $P \rightarrow P' \rightarrow P'' \rightarrow \dots$

□ Следует обратить особое внимание на тот факт, что на каждом шаге формулы в НАМ всегда просматриваются начиная с самой первой.

Необходимые уточнения:

1. Если на очередном шаге была применена обычная формула ($\alpha \rightarrow \beta$), то работа НАМ продолжается.

2. Если же на очередном шаге была применена заключительная формула ($\alpha \vdash \beta$), то после её применения работа НАМ прекращается. То слово, которое получилось в этот момент, и есть *выходное слово*, т.е. **результат применения** НАМ к входному слову.

Правила выполнения НАМ

■ Необходимые уточнения:

- Если левая часть α входит в P несколько раз, то на правую часть β , по определению, заменяется только первое (самое левое) вхождение α в P :

$$P \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & \alpha & y & \alpha & z \\ \hline \end{array} \rightarrow R \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & \beta & y & \alpha & z \\ \hline \end{array}$$

- Если правая часть формулы подстановки – пустое слово (в таком слове нет ни одного символа), то подстановка α сводится к вычеркиванию части α из P (отметим попутно, что в формулах подстановки не принято как-либо обозначать пустое слово):

$$P \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & \alpha & y \\ \hline \end{array} \rightarrow R \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline \end{array}$$

- Если в левой части формулы подстановки указано пустое слово, то подстановка $\rightarrow \beta$ сводится, по определению, к приписыванию β слева к слову P :

$$P \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \rightarrow R \begin{array}{|c|c|} \hline \beta & x \\ \hline \end{array}$$



Пусть дан алфавит $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,
слово $P = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$ и слово $Q = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}$

Под **объединением** слов PQ будем понимать слово:

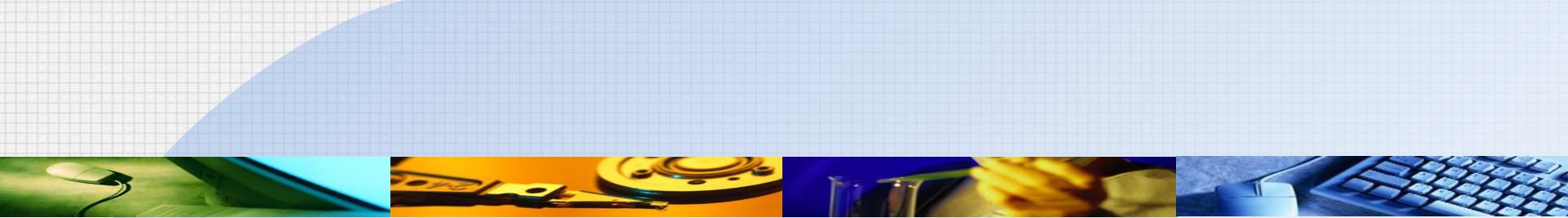
$$PQ = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}$$

В частности: $P\Lambda = \Lambda P = P$

Кроме этого: $(P_1 P_2) P_3 = P_1 (P_2 P_3)$



Слово P является **подсловом** слова Q , если слово P является составной частью слова Q , т.е. существуют такие (возможно пустые) слова R_1 и R_2 , что $Q = R_1PR_2$.



Рассмотрим упорядоченную пару слов (P, Q)

Марковской подстановкой (P, Q) называется следующая операция над словами:
в заданном слове R находят первое вхождение слова P и, не изменяя остальных частей слова R , заменяют в нем это вхождение словом Q





Замечание:

- 1) Полученное слово называется **результатом** применения марковской подстановки (P, Q) к слову R
- 2) Если первого вхождения слова P в слово R нет (и, следовательно, вообще нет ни одного вхождения P в R), то считается что марковская подстановка (P, Q) **не применима** к слову R



Частными случаями марковских подстановок являются подстановки с пустыми словами:

$$(\Lambda, Q), (P, \Lambda), (\Lambda, \Lambda)$$

- Формула с пустой левой частью применима к любому слову. (Пустое слово всегда присутствует перед любым словом).
- Формула с пустыми левой и правой частями не меняет слово.



Для обозначения марковской подстановки (P, Q) используют запись $P \rightarrow Q$

Эту запись называют **формулой подстановки (P, Q)**

Различают **простые подстановки $P \rightarrow Q$** и **заключительные подстановки $P \mapsto Q$**



Пример

Данное слово: **521421**

Подстановка: **21** $\rightarrow$ **3**

Результат подстановки:

5343



Пример

Данное слово: **521421**

Подстановка: **21** $\mapsto$ **Λ**

Результат подстановки:

5421



Пример

Данное слово: **521421**

Подстановка: **25** $\rightarrow$ **7**

Результат подстановки:

Не применима



Например: `abbcabbca` $\rightarrow$ `adddabba`

$$\begin{cases} c \rightarrow & (1) \\ bb \rightarrow ddd & (2) \end{cases}$$

$\text{abb}\underline{\text{c}}\text{abbca} \xrightarrow{1} \text{abbab}\underline{\text{b}}\text{ca} \xrightarrow{1} \text{a}\underline{\text{bb}}\text{abba} \xrightarrow{2} \text{adddab}\underline{\text{b}}\text{a} \xrightarrow{2}$

$$\begin{cases} c \rightarrow & (1) \\ bb \mapsto ddd & (2) \end{cases}$$

$$\text{dcacb} \xrightarrow{1} \text{dacb} \xrightarrow{1} \text{dab}$$



Пример (перестановка символов)

$A=\{a,b\}$. Преобразовать слово P так, чтобы в его начале оказались все символы a , а в конце – все символы b .

Например: $babba \rightarrow aabbb$



Пример (использование спецзнака)

- $A=\{a,b\}$. Удалить из непустого слова P его первый символ. Пустое слово не менять.

Р **Пример** (фиксация спецзнаком обрабатываемого символа)

$A=\{0,1,2,3\}$. Пусть P – непустое слово. Трактуя его как запись неотрицательного целого числа в четверичной системе счисления, требуется получить запись этого же числа, но в двоичной системе.

Например: $0123 \rightarrow 00011011$



Пример (перемещение спецзнака)

$A=\{a,b\}$. Требуется приписать символ a к концу слова P .

Например: $bbab \rightarrow bbaaba$



Пример (смена спецзнака)

$A=\{a,b\}$. В слове P заменить на aa последнее вхождение символа a , если такое есть. Например: $bababb \rightarrow babaabb$



Пример (перенос символа через слово)

- $A=\{a,b\}$. Перенести в конец непустого слова P его первый символ. Пустое слово не менять.
- Например: $bbaba \rightarrow babab$



Пример (использование нескольких спецзнаков)

- $A=\{a,b\}$. Удвоить слово P , т.е. приписать к P (слева или справа) его копию.
Например: $abb \rightarrow abbabb$

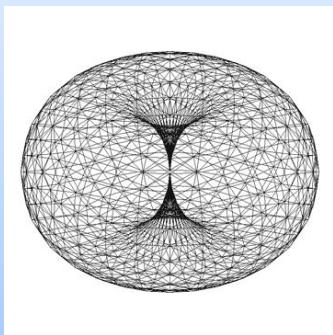


Пример (согласованная работа с различными частями слова)

Пусть слово P имеет чётную длину $(0, 2, 4, \dots)$.

Удалить правую половину этого слова.

Например: $bbab \rightarrow bb$



Создавать - лучше, чем уничтожать,
а дарить - лучше, чем принимать