

Лекція 7

Аналіз систем, які працюють за дисципліною обслуговування з очікуванням

Література

1. Омельченко А.В. Основи аналізу систем розподілу інформації. Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – С 43-55

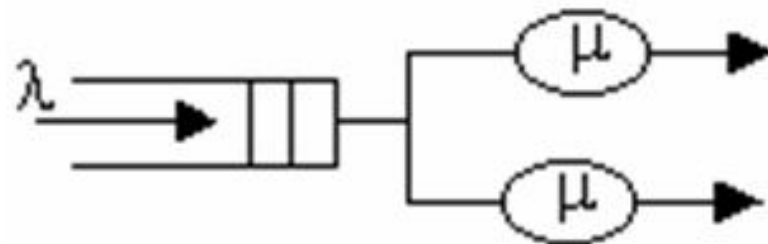
Основні питання

- Визначення ймовірностей станів СРІ
- Розподіл часу очікування у випадку дисципліни черги FIFO
- Формула Літтла
- Формула Полячека-Хінчина

Постановка задачі

- Вважається, що повністю доступна СРІ з v приладами обслуговує **найпростіший потік** заявок з параметром λ . При цьому використовується дисципліна обслуговування **з очікуванням**. Заявки можуть утворювати чергу необмеженої довжини. Заявки, що перебувають на очікуванні, обслуговуються по черзі. Тривалість зайняття приладу вважається випадковою величиною з **експоненціальним законом розподілу** і параметром інтенсивності обслуговування μ .
- Необхідно визначити ймовірності різних станів СРІ, функцію розподілу часу очікування початку обслуговування, середній час очікування та середню довжину черги.

Модель системи
 $M/M/v/W$



Визначення ймовірностей станів СРІ

Позначимо через $S(t)$ стан СРІ. При цьому, якщо $S(t) = i$, де $i \leq v$, то всі заявки перебувають на обслуговуванні. Якщо $i = v + r$, то v заявок перебувають на обслуговуванні, а інші $r = i - v$ викликів знаходяться у черзі.

З дотриманням умов, що вказані у наведеній постановці задачі, стани СРІ можуть бути описані процесом загибелі й народження з параметром потоку вхідних заявок (потоку народження) $\lambda_i = \lambda$ і параметром потоку звільнення (потоку загибелі)

$$\nu_i = \begin{cases} \beta \cdot i, & 0 \leq i \leq v \\ \beta \cdot v, & i > v \end{cases}.$$

Визначення ймовірностей станів СРІ

Отримаємо вирази для станів СРІ типу M/M/v/W

$$p_i = \begin{cases} \frac{E_{i,v}(y)}{1 + E_v(y) \frac{y}{v-y}}, & 0 \leq i \leq v \\ \frac{E_v(y) \cdot (\frac{y}{v})^{i-v}}{1 + E_v(y) \frac{y}{v-y}}, & i > v \end{cases}$$

Рекурентні співвідношення для ймовірностей станів для систем M/M/v/W мають вигляд

$$p_i = p_{i-1} \cdot (\frac{y}{i}) \quad i \leq v$$

$$p_i = p_{i-1} \cdot (\frac{y}{v}) \quad i > v$$

Друга формула Ерланга

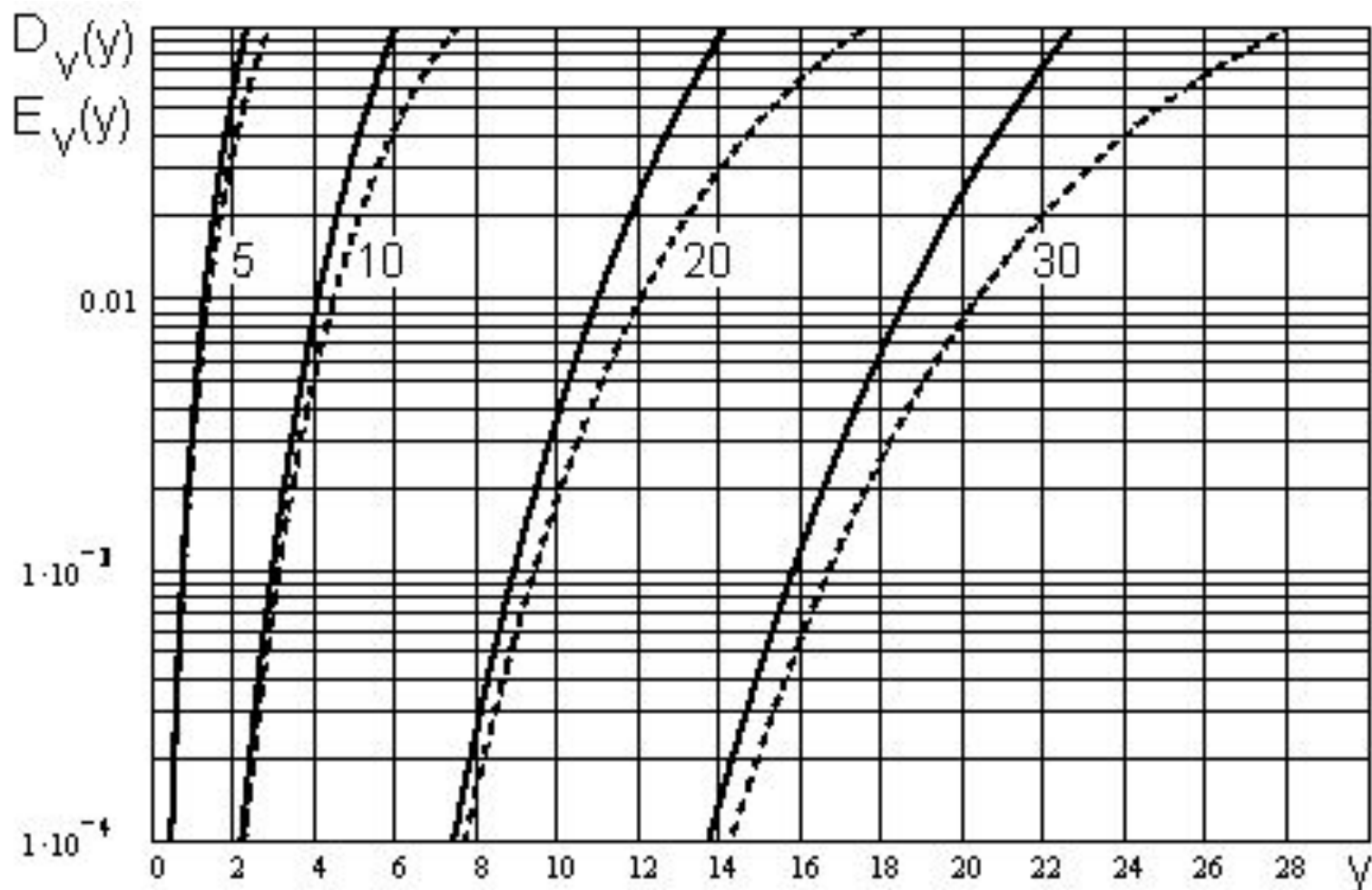
$$p_t = \frac{E_v(y)}{1 - \frac{y}{v}(1 - E_v(y))} = D_v(y)$$

Дану формулу часто називають
С-формулою Ерланга.



Agner Krarup Erlang (1878-1929)

Вигляд функцій Ерланга



Розподіл часу очікування у випадку дисципліни черги FIFO

- У даному випадку імовірність очікування початку обслуговування понад час t визначається за формулою

$$P(\gamma > t) = P(\gamma > 0) \cdot e^{-\mu \cdot (v-y) \cdot t} ,$$

$$\bar{\gamma} = \int_0^{\infty} t dF(t) = \frac{P(\gamma > 0)}{\mu(v-y)} , \quad \bar{r} = \bar{\gamma} \cdot \lambda ,$$

$$P_3(\gamma > t) = \frac{P(\gamma > t)}{P(\gamma > 0)} = e^{-\mu \cdot (v-y) \cdot t} ,$$

$$\bar{\gamma}_3 = \frac{1}{\mu(v-y)} .$$

Формула Літтла

- **Формула Літтла встановлює співвідношення між середнім числом викликів в системі, інтенсивністю вхідного потоку й середнім часом перебування заявок у системі.** Вона справедлива для будь-якої системи з очікуванням, що перебуває у сталому стані.
- Останнє співвідношення означає, що середнє число заявок у системі дорівнює добутку інтенсивності надходження заявок у систему на середній час їхнього перебування в системі:

$$\bar{N} = \lambda \bar{T}.$$

При цьому не накладається жодних обмежень на тип потоку заявок і час обслуговування. Вперше доведення цього факту дав Дж. Літтл.

Доведення формули Літтла

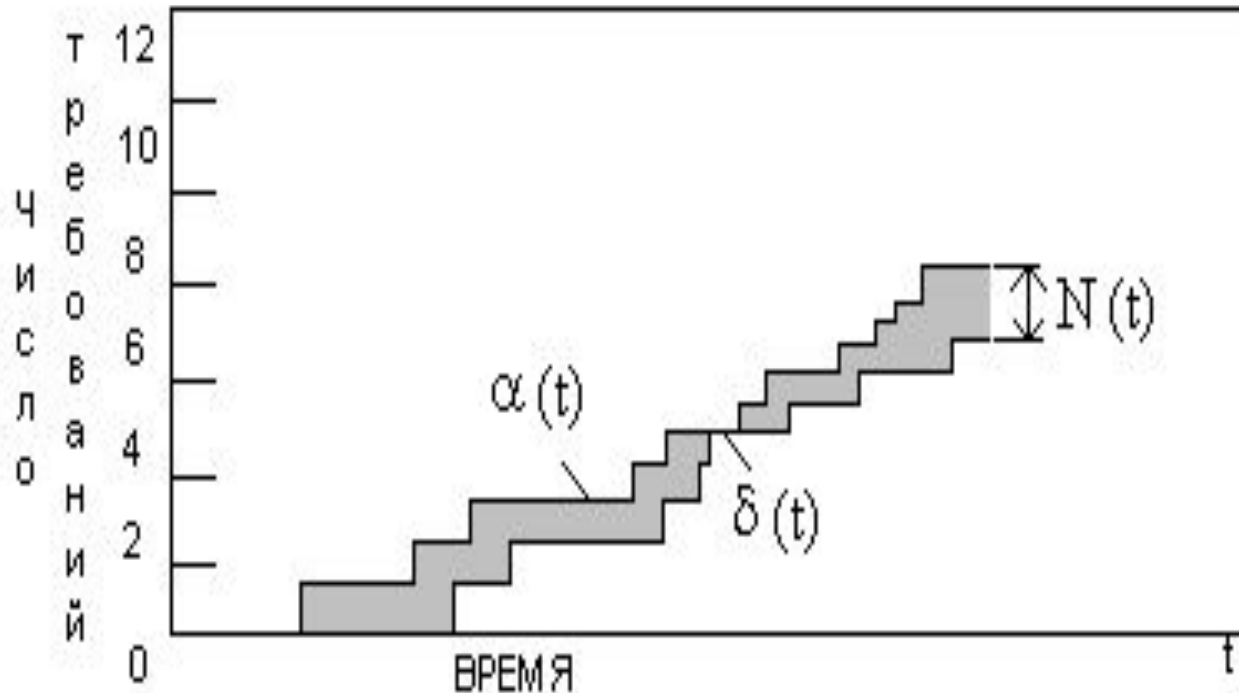
- Рассмотрим **любую СМО** (одноканальную, многоканальную, марковскую, немарковскую, с неограниченной или ограниченной очередью) и связанные с ней два потока событий:
 - поток заявок, прибывающих в СМО;
 - поток заявок, покидающих СМО.
- Если в системе установился предельный, стационарный режим, то **среднее число заявок, прибывающих в СМО за единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих её.**
- Оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ .

Доведення формули Літтла

- Обозначим:
 - $\alpha(t)$ – число заявок, прибывших в СМО до момента t ;
 - $\delta(t)$ - число заявок, покинувших СМО до момента t .
- И та и другая функции являются случайными и меняются скачком (увеличиваются на единицу) в моменты приходов заявок $\alpha(t)$ и уходов заявок $\delta(t)$.

Доведення формули Літтла

- Вид функцій $\alpha(t)$ і $\delta(t)$ показан на рисунке.



- Обе линии – ступенчатые, верхняя - $\alpha(t)$, нижняя - $\delta(t)$
 - $\alpha(t)$ – число заявок, прибывших в СМО до момента t ;
 - $\delta(t)$ - число заявок, покинувших СМО до момента t .

Доведення формули Літтла

- Очевидно, что для любого момента t их разность $N(t) = \alpha(t) - \delta(t)$ есть не что иное, как *число заявок, находящихся в СМО*
- Когда линии $\alpha(t)$ и $\delta(t)$ сливаются, в *системе нет заявок*

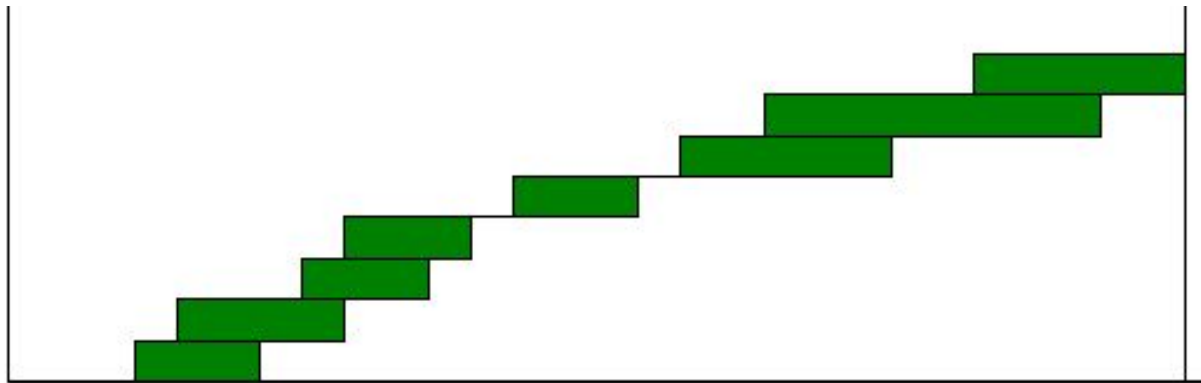
Доведення формули Літтла

- Рассмотрим очень большой промежуток времени T (мысленно продолжив график далеко за пределы чертежа) и вычислим для него **среднее число заявок**, находящихся в СМО
- Оно будет равно интегралу от функции $N(t)$ на этом промежутке, деленному на длину интервала T :

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt.$$

Доведення формули Літтла

- Но этот интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, залитой на рисунку.
- Разглядим внимательней этот рисунок.
- Фигура на рисунке состоит из прямоугольников, каждый из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени пребывания в системе соответствующей заявки (первой, второй и т.д.)



Доведення формули Літтла

- Обозначим эти времена $t_1, t_2, \dots$
- Правда, под конец промежутка T некоторые прямоугольники войдут в заливую фигуру не полностью, а частично, но при достаточно большом T эти детали не будут играть роли
- Таким образом, можно считать, что:

$$\int_0^T N(t)dt = \sum_i t_i,$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T

Доведення формули Літтла

- Разделим правую и левую часть последнего выражения на длину интервала T
- Получим

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \sum_i t_i.$$

- Разделим и умножим правую часть на интенсивность λ :

$$\bar{N} = \lambda \frac{1}{T\lambda} \sum_i t_i.$$

Доведення формули Літтла

- Но величина $T\lambda$ есть не что иное, как *среднее число заявок, пришедших за время T*
- Если мы разделим сумму всех времен t_i на среднее число заявок, то получим *среднее время пребывания заявки в системе*
- Итак:

$$\bar{N} = \lambda \bar{T}$$

откуда:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} \bar{N}.$$

Доведення формули Літтла

- *Это и есть формула Литтла:*
 - для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания *среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок*

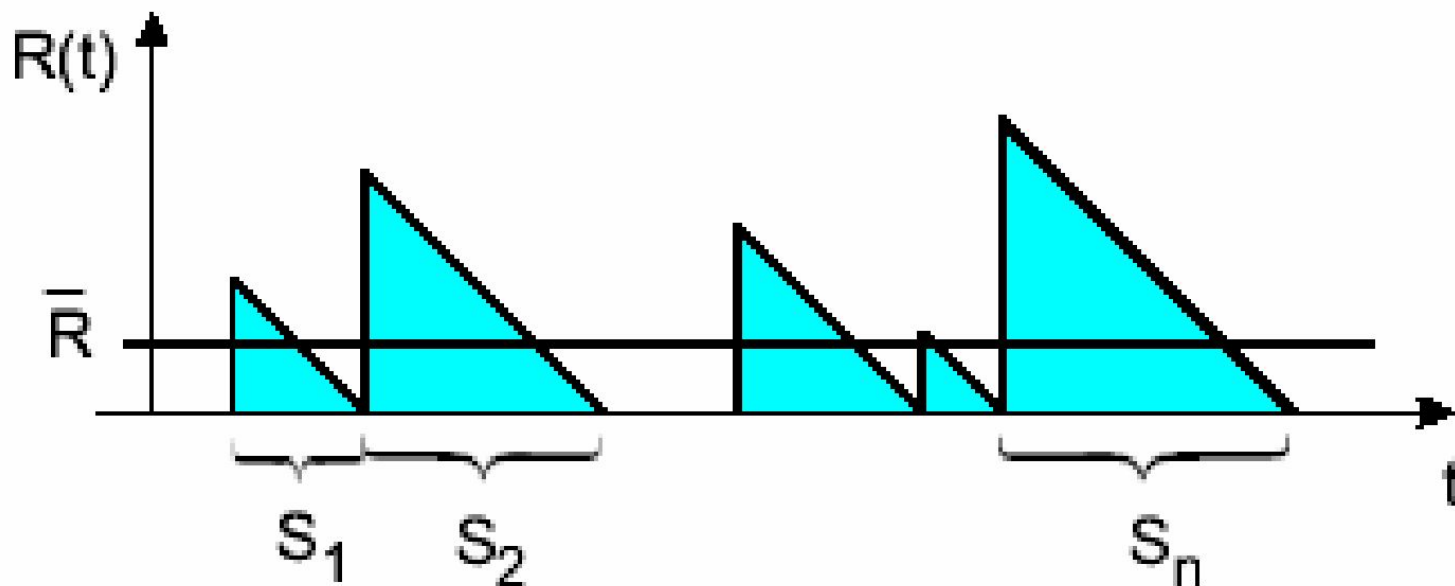
Друга формула Літтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*, связывающая среднее время пребывания заявки в очереди и среднее число заявок в очереди:

$$\bar{r} = \lambda \bar{\gamma}$$

Зміна незавершеної роботи

Незавершеною роботою $R(t)$ у момент часу t в теорії черг називається час, який має пройти до повного вивільнення системи від усіх заявок, якщо після моменту часу на її вхід не надходять нові заявки



$$\bar{R} = \frac{1}{t} \int_0^t R(t') dt' = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^2 = \frac{n}{t} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^2 \approx \lambda \bar{x}^2 / 2$$

Аналіз системи M/G/1

Вхідний потік: λ $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$

Час обслуговування: $p(x)$ $\int_0^{\infty} p(x)dx = 1$ $\bar{x} = \int_0^{\infty} x \cdot p(x)dx$

Інтенсивність навантаження: $y = \lambda \bar{x}$

Середній час очікування: $\bar{\gamma} = \bar{r}\bar{x} + \bar{R}$,

где $\bar{R}$ - середня незавершена робота

Середнє число заявок у черзі: $\bar{r} = \lambda \bar{\gamma}$
 $\bar{\gamma} = \bar{\gamma} \lambda \bar{x} + \bar{R}$
 $\bar{\gamma} = \frac{\bar{R}}{1 - y}$

Формула Полячека-Хінчина

Середній час очікування початку обслуговування $\bar{\gamma} = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-y)}$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\lambda} \frac{y^2}{2(1-y)} \left[1 + \left(\frac{\sigma(t)}{\bar{t}} \right)^2 \right] \quad (\text{Формула ПХ})$$

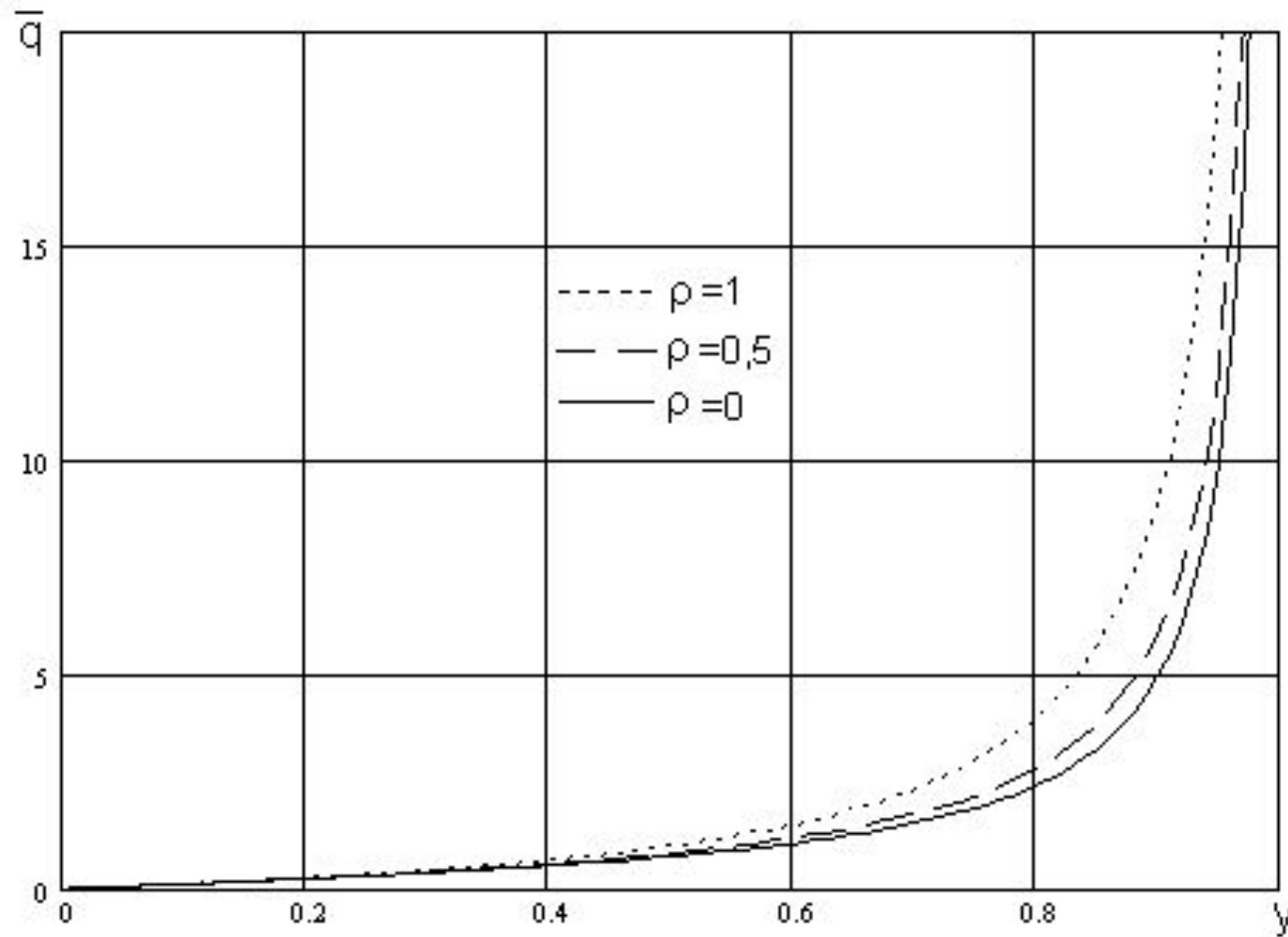
Наслідок 1. $\bar{r} = \frac{y^2}{2(1-y)} \left[1 + \left(\frac{\sigma(t)}{\bar{t}} \right)^2 \right]$

Наслідок 2. $\bar{q} = y + \frac{y^2}{2(1-y)} \left[1 + \left(\frac{\sigma(t)}{\bar{t}} \right)^2 \right]$

Наслідок 3. Для моделі M/M/1 $\bar{\gamma} = \frac{1}{\mu} \frac{y}{(1-y)}$

Наслідок 4. Для моделі M/D/1 $\bar{\gamma} = \frac{1}{2\mu} \frac{y}{(1-y)}$

Залежність середнього числа заявок у системі M/G/1/W від інтенсивності вхідного навантаження



$$\rho = \frac{\sigma(t)}{\bar{t}}$$

Система M/D/v/W

- Постановка задачі у даному випадку така сама, як для систем з явними втратами.

Відмінність полягає лише в законі розподілу тривалості обслуговування: замість випадкового закону розподілу тривалість обслуговування кожної заявки вважається постійною величиною, рівною h . Цей випадок вперше у 1932 р. дослідив Кроммелін.

- Розглянемо підхід, що використовується у теорії Кроммеліна.
- Без обмеження загальності припустимо, що $h=1$.

Введемо такі позначення:

p_k – імовірність того, що при стаціонарному стані в системі (у черзі і на обслуговуванні) перебуває k заявок;

$a_k = \sum_{i=0}^k p_i$ – імовірність того, що в системі перебуває не більше, ніж k

заявок.

Система M/D/v/W

Для інтервалу часу, рівного $h = 1$, маємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = a_v \cdot e^{-\lambda} \\ p_1 = a_v \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} + p_{v+1} \cdot e^{-\lambda} \\ \dots \\ p_i = a_v \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} + p_{v+1} \cdot \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \cdot e^{-\lambda} + \dots + p_{v+i} \cdot e^{-\lambda} \\ \dots \end{array} \right.$$

Перше рівняння описує випадок, коли черга відсутня, за умови, що на початку інтервалу на обслуговуванні перебувало не більше v заявок і протягом інтервалу часу заявки не надходили.

Друге рівняння описує такі випадки: 1) якщо на початку інтервалу на обслуговуванні перебувало не більше v заявок і за інтервал часу надходить ще одна; 2) на початку інтервалу в системі перебувало $v+1$ заявок, а потім не надійшло жодної заявки й тощо.

Система M/D/v/W

Система рівнянь вирішується методом похідних функцій. При $v = 1$ її рішенням будуть такі ймовірності

$$p_0 = 1 - y;$$

$$p_1 = (1 - y) \cdot (e^y - 1);$$

...

$$p_i = (1 - y) \cdot \sum_{k=1}^i (-1)^{i-k} \cdot e^{ky} \left[\frac{(ky)^{i-k}}{(i-k)!} + \frac{(ky)^{i-k-1}}{(i-k-1)!} \right], \quad i \geq 2.$$

Визначимо ймовірність $P(\gamma \leq t)$ того, що заявка, яка надійшла в деякий момент часу t_0 , потрапить на обслуговування протягом часу, не більшого t . Для того, щоб виконалася подія $\gamma \leq t$, необхідне виконання умови для стану СРІ $k \leq [t] \cdot v + v - 1$. Тому

$$P(\gamma \leq t) = \sum_{k=0}^{[t]v+v-1} p_k.$$

Система M/D/v/W

Знаючи ймовірності станів p_k , $k = 0, 1, \dots$ можна знайти ймовірність $P(\gamma \leq t)$.

У випадку $v = 1$

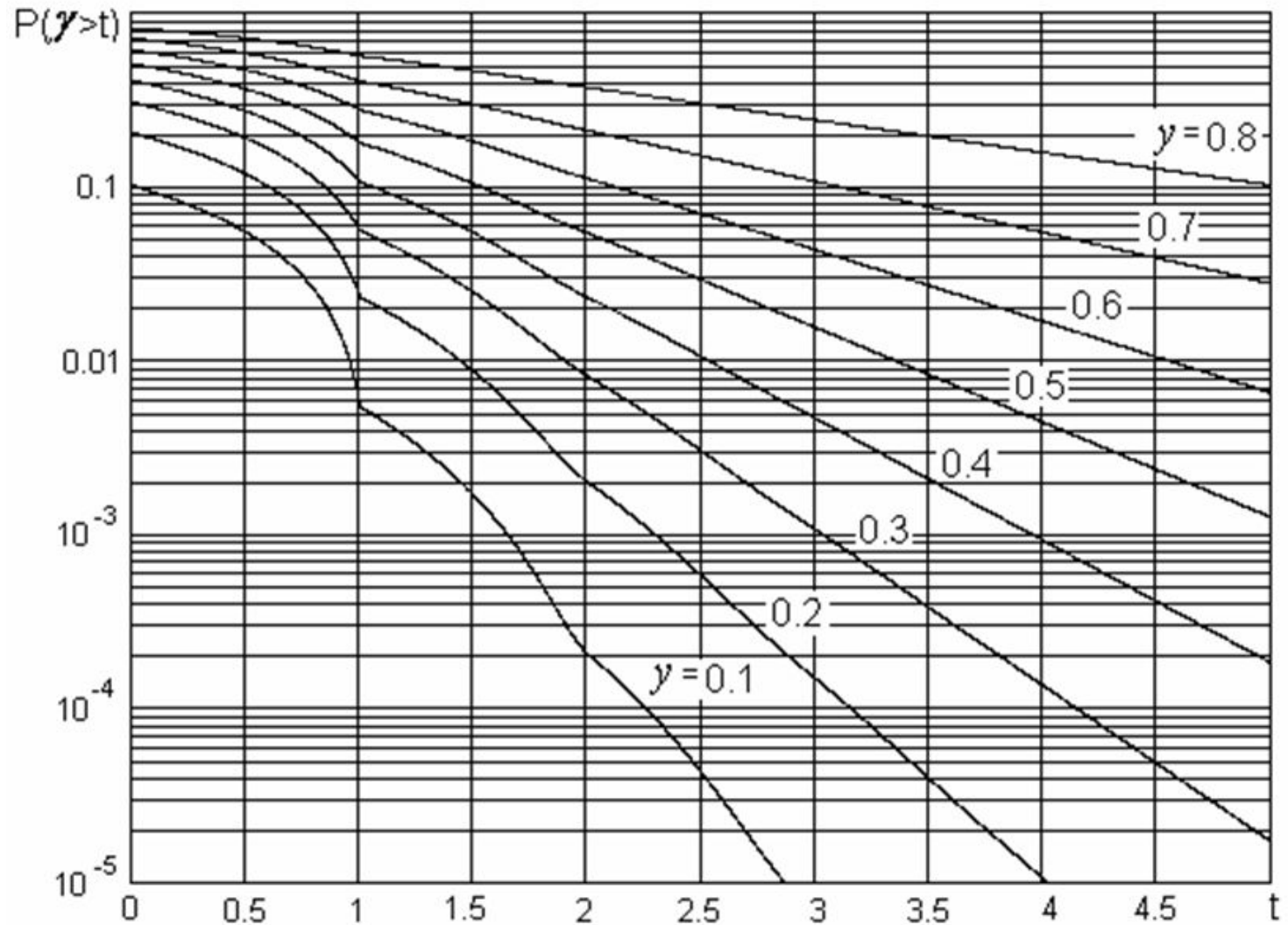
$$P(\gamma \leq t) = (1 - y) \cdot \sum_{i=0}^{[t]} e^{y(t-i)} \frac{[-y(t-i)]^i}{i!}, \quad (1)$$

Якщо $h \neq 1$, то вираз (1) набуде вигляд

$$P(\gamma \leq t) = (1 - y) \cdot \sum_{i=0}^{[t/h]} e^{y(t/h-i)} \frac{[-y(t/h-i)]^i}{i!}.$$

З останнього виразу випливає, що $P(\gamma = 0) = 1 - y$ й $P(\gamma > 0) = y$.

Криві Кроммеліна для $V=1$



Дисципліни вибору з черги

- Практичний інтерес являють дві основні дисципліни вибору заявок з черги: у порядку надходження (FIFO) і у випадковому порядку (SP). Дисципліна вибору не впливає на середній час перебування в черзі, а впливає тільки на момент більш високого порядку: при переході від упорядкованого вибору в порядку надходження до випадкового різко зростають імовірності довгого очікування. На практиці ж часто дисципліна вибору є чимось середнім між цими двома дисциплінами.

Дисципліни вибору з черги

Далі на рисунку подані залежності ймовірності $P(\gamma > t)$ від параметра t при різних інтенсивностях навантаження γ для двох дисциплін вибору з черги: у порядку надходження (криві Кроммеліна) і у випадковому порядку (криві Берке). Із аналізу кривих видно, як при випадковому виборі зростає ймовірність довгого очікування. Проте в області малих тривалостей очікувань t випадковий порядок вибору з черги приводить до менших значень ймовірностей очікувань $P(\gamma > t)$. Тому при обслуговуванні викликів пристроями керування в системах комутації (координатних, квазіелектронних і електронних) часто використовується дисципліна черги SP.

Розподіл часу очікування в системі M/D/1 при виборі з черги у випадковому порядку (суцільні криві) і в порядку надходження (пунктир)

