

Вычисление площадей *фигур* с помощью интеграла

11 класс

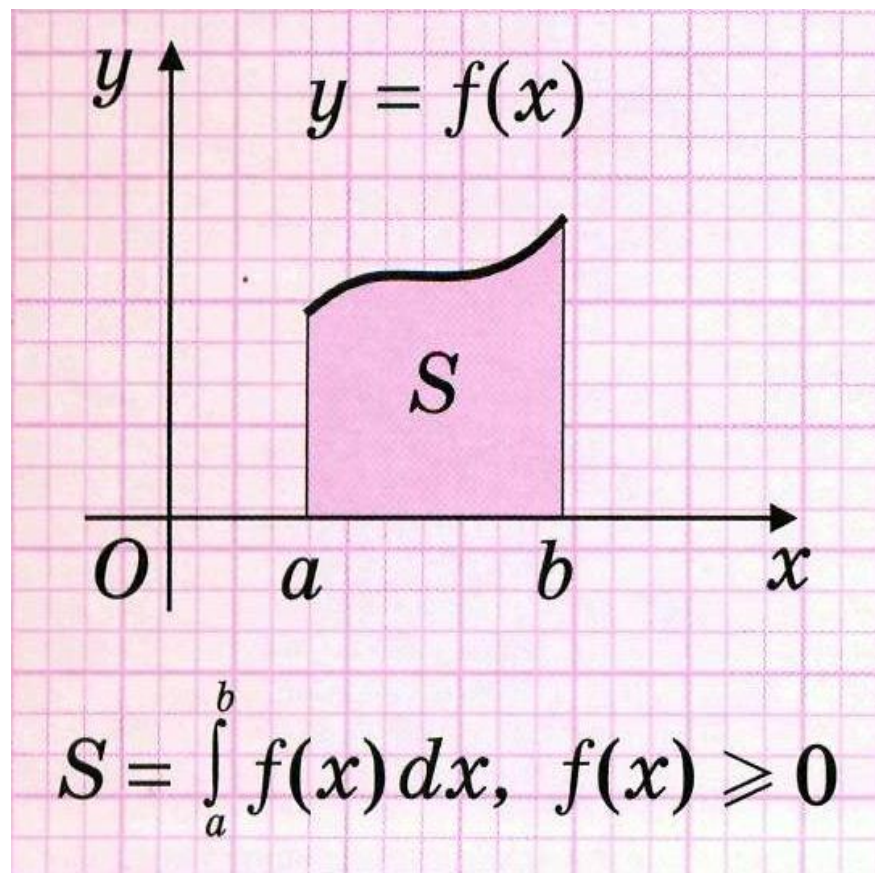
Криволинейной трапецией

называется фигура, ограниченная отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком непрерывной функции $y = f(x)$, такой, что $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$ и $f(x) > 0$ при $x \in (a; b)$.

Отрезок $[a; b]$ называется основанием трапеции.

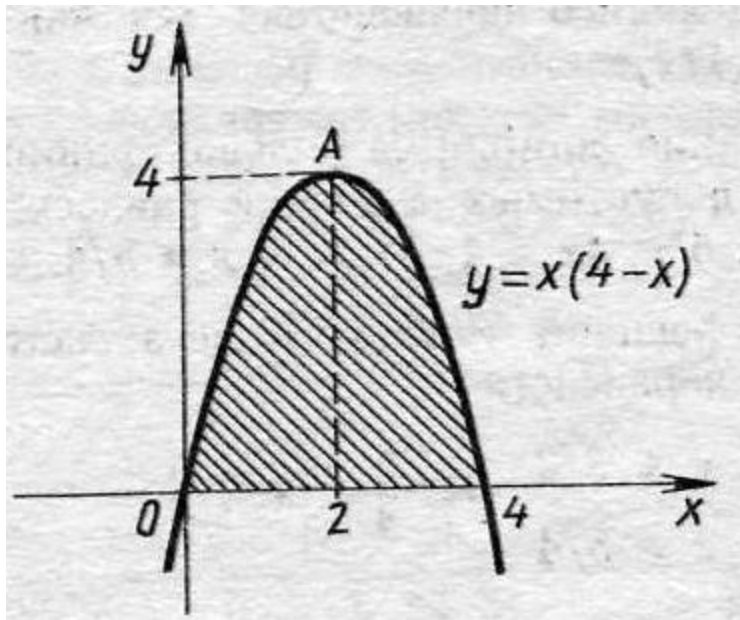
Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



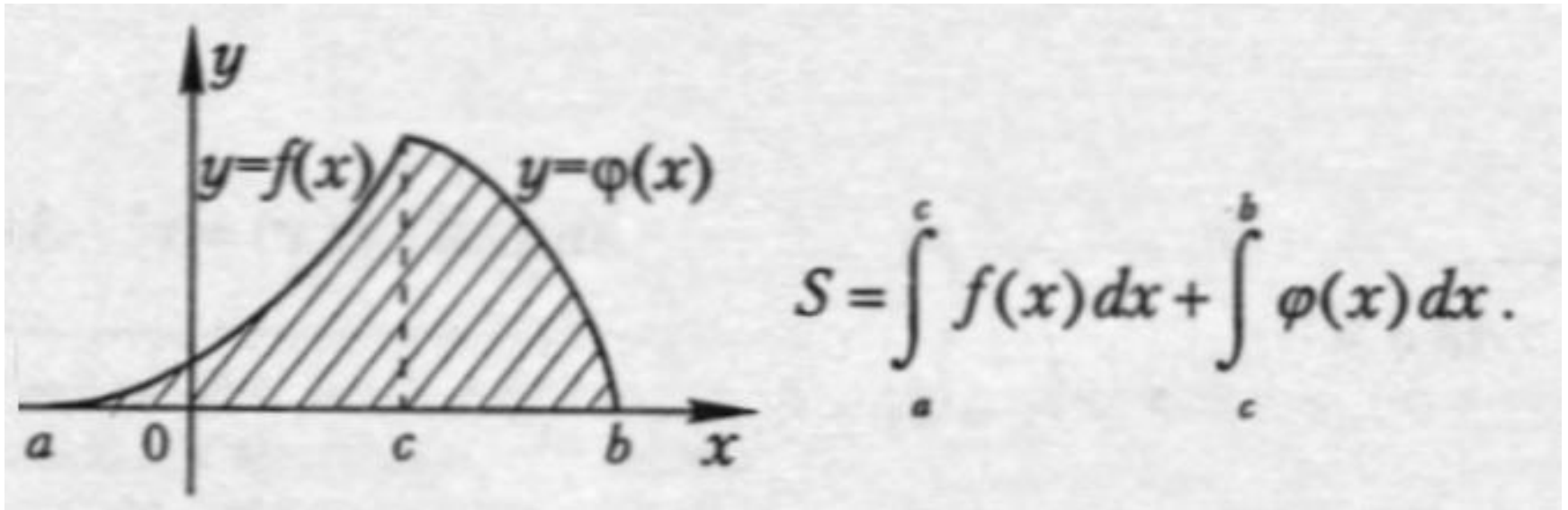
Площадь
криволинейн
ой трапеции

Вычислить *площадь* криволинейной трапеции

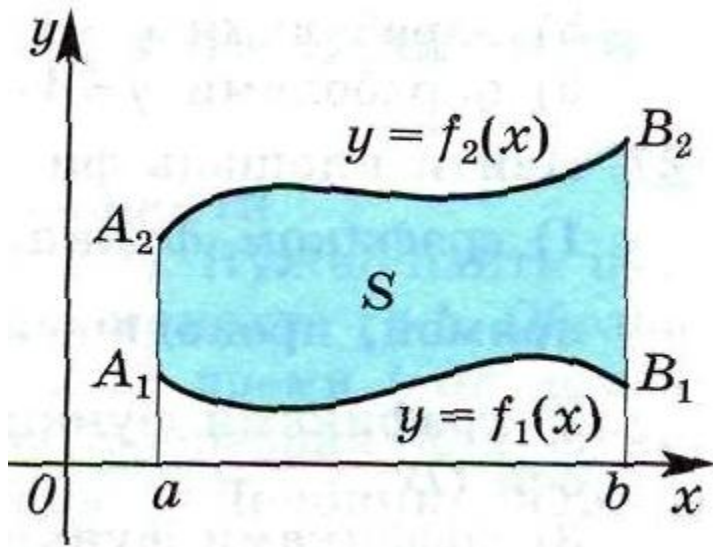


$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 10\frac{2}{3}$$

Площадь фигуры равна
сумме площадей
криволинейных трапеций



Площадь фигуры равна
разности площадей
криволинейных трапеций

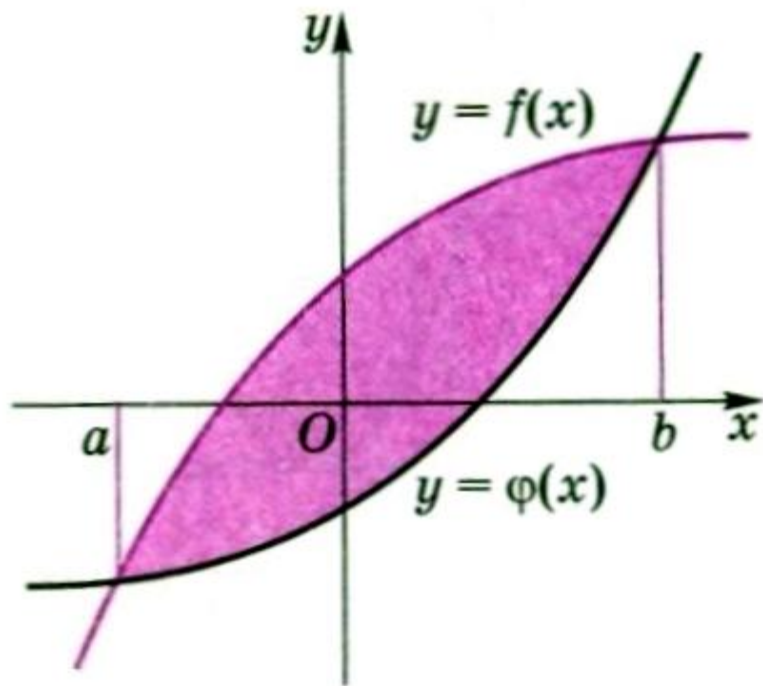


$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

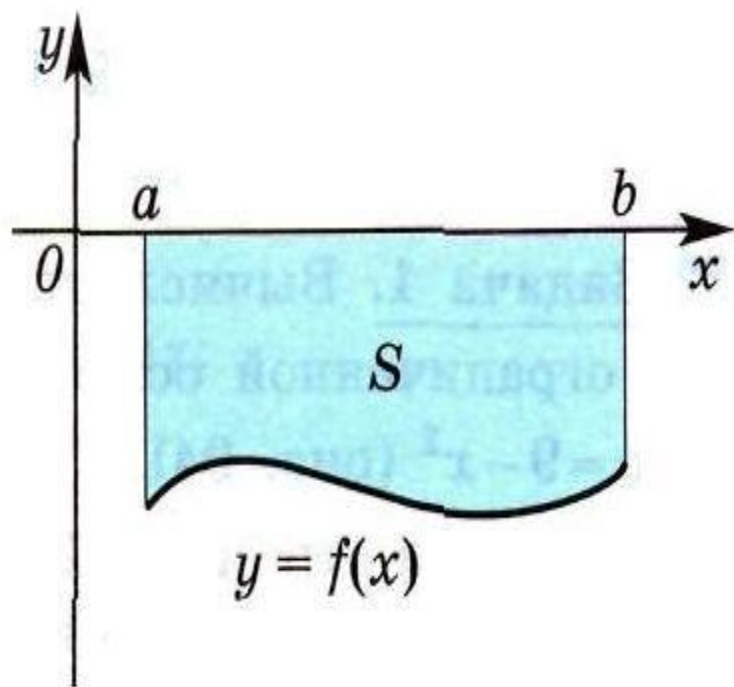
Площадь фигуры вычисляется как **разность** площадей криволинейных трапеций на отрезке $[a;b]$

Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и $f(x) > \varphi(x)$ на $(a;b)$, то

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$



Искомая площадь фигуры равна площади фигуры, *симметричной* данной относительно оси Ox

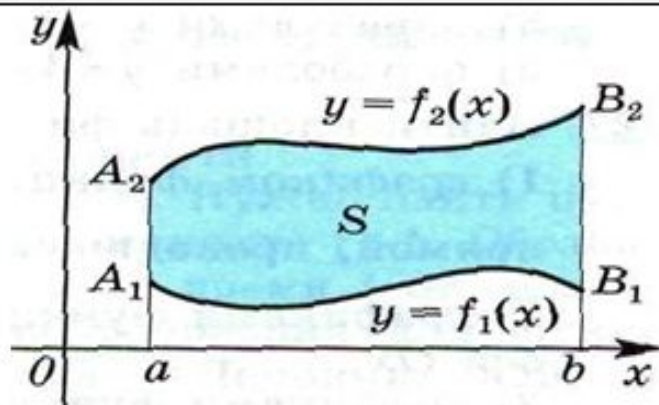
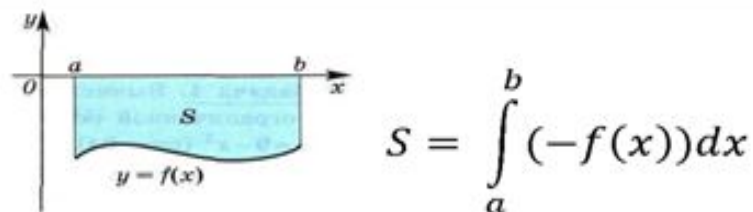
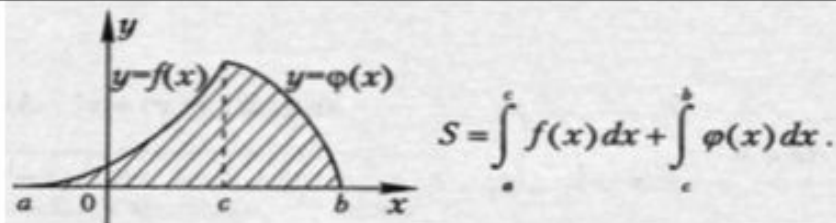


Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a; b]$, то площадь

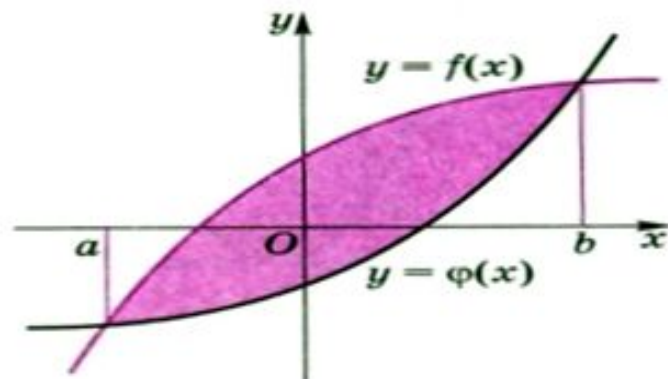
криволинейной трапеции равна

$$S = \int_a^b (-f(x)) dx$$

Нахождение площади фигуры, через площадь криволинейной трапеции

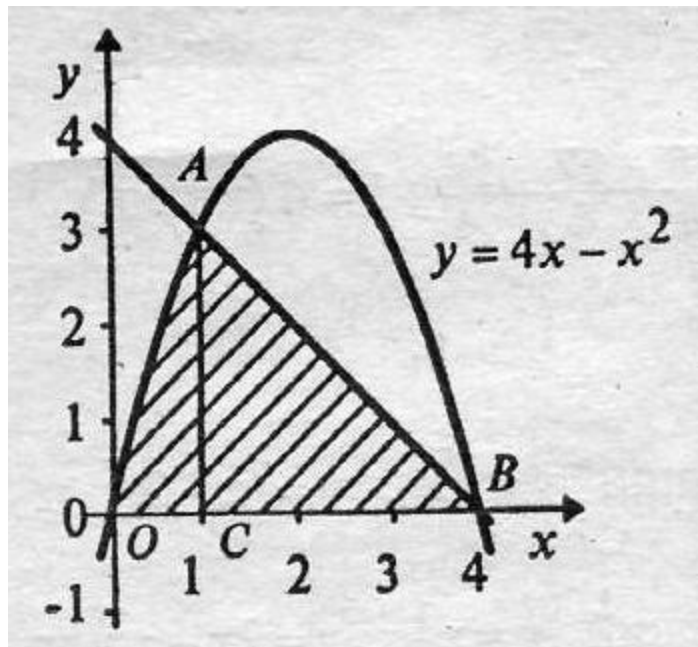


$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки $(4;0)$ и $(1;3)$.



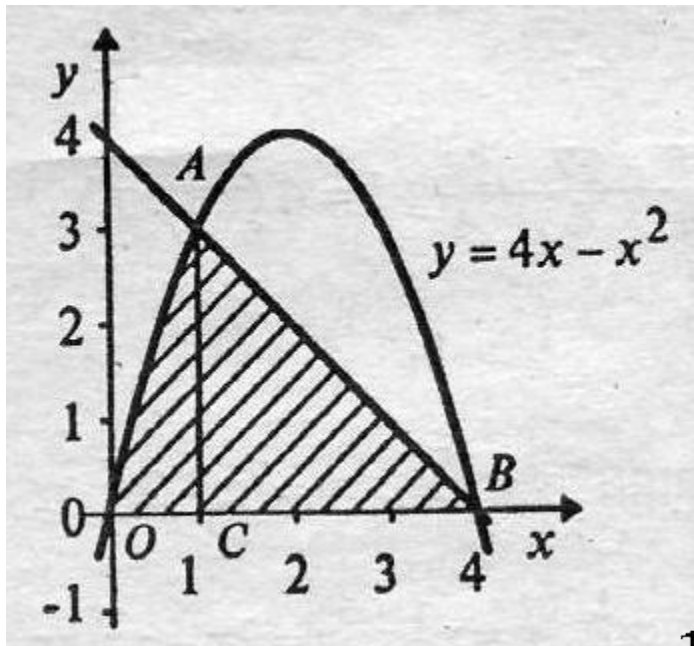
Решение.

Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{\triangle ACB}$$

$$S_{OAB} = \int_0^1 (4x - x^2) dx + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 6\frac{1}{6}$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки $(4;0)$ и $(1;3)$.



Решение. Подставив в уравнение прямой $y = kx + b$ координаты заданных точек, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 3 = k \cdot 1 + b. \end{cases}$$

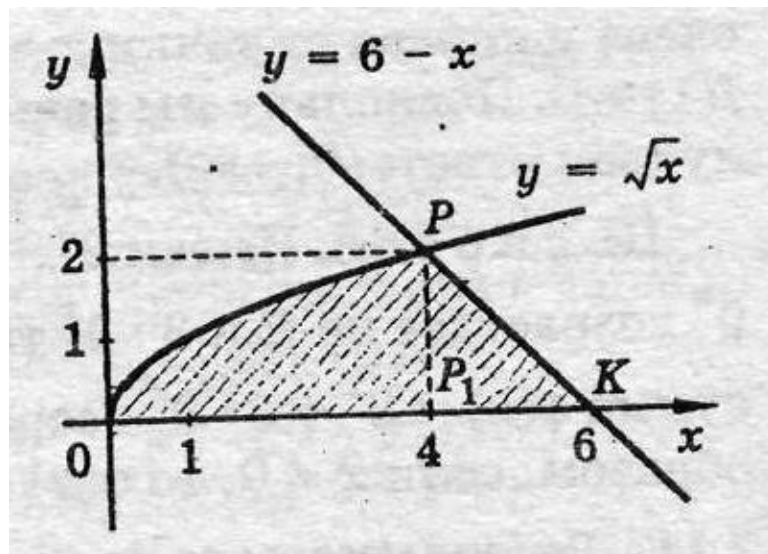
откуда найдём $k = -1$, $b = 4$.

Уравнение прямой AB : $y = 4 - x$.

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{\Delta ACB}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^1 (4x - x^2) dx + \int_1^4 (4 - x) dx = 6 \frac{1}{6}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, $y = 0$



Решение. Точки пересечения заданных линий: $O(0;0)$, $K(6;0)$, $P(4;2)$

Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OPR_1} + S_{\triangle PPR_1K}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 7\frac{1}{3}$$

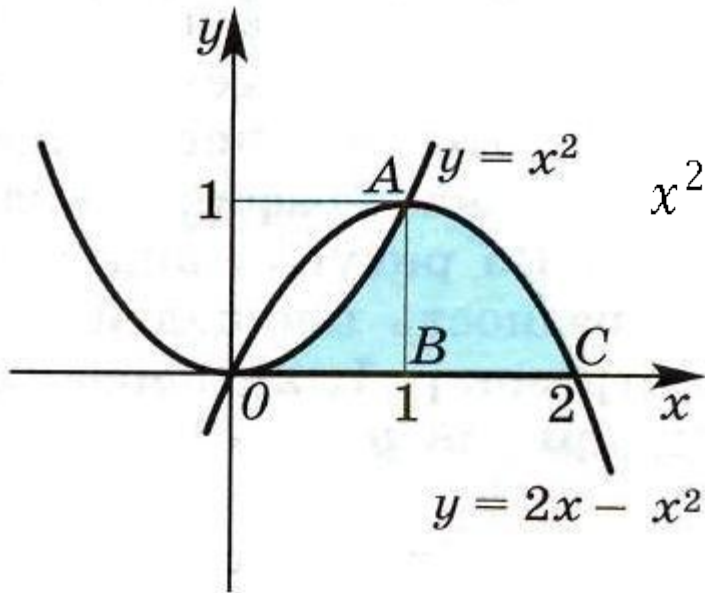
Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox .

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

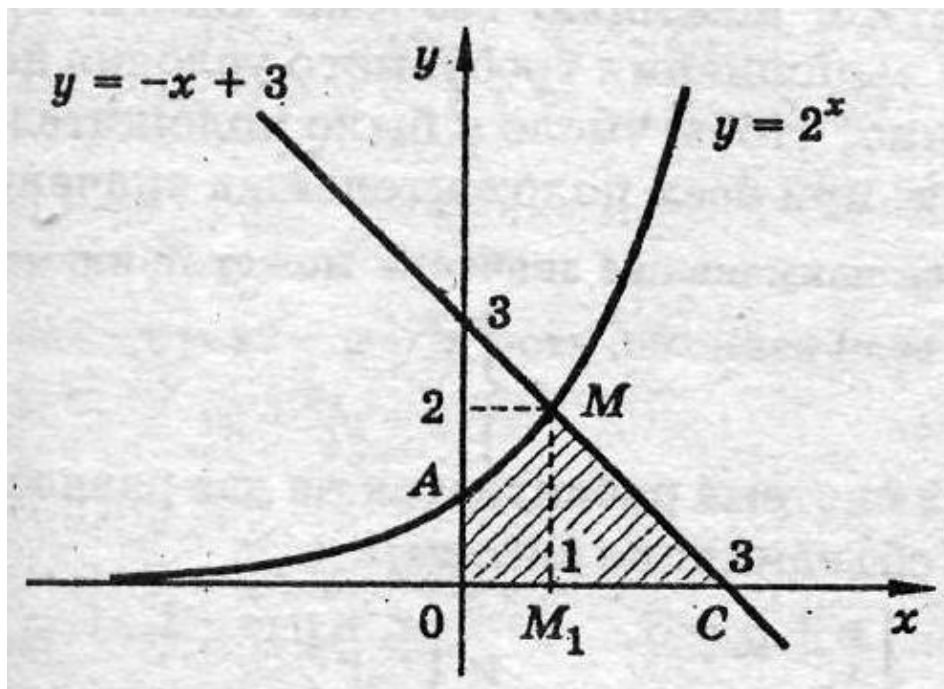
$$x^2 = 2x - x^2 \text{ корни которого } x_1 = 0, x_2 = 1$$

Искомая площадь равна сумме площадей криволинейных трапеций

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = 1$$



Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций , $y = 2^x$; $y = -x + 3$ осями абсцисс и ординат.



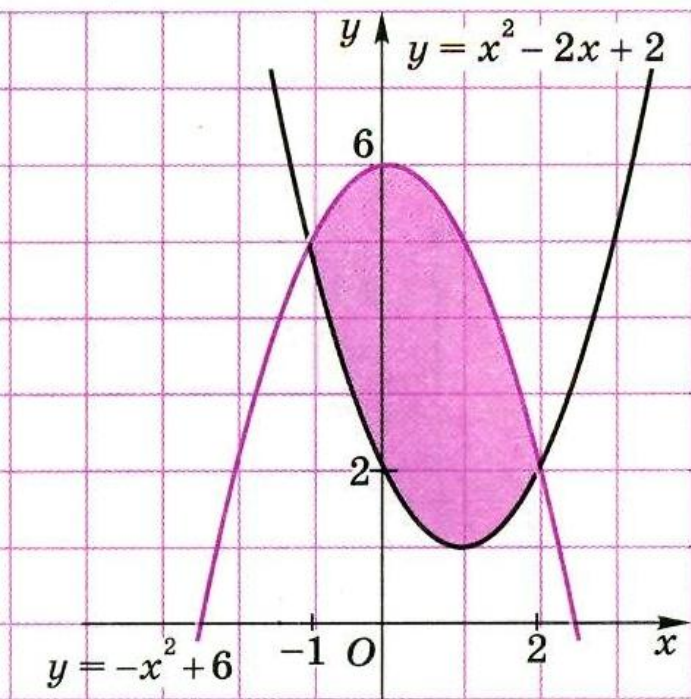
Решение. Функция $y = 2^x$ возрастает, а $y = -x + 3$ убывает на $\mathbf{R}$, поэтому их графики имеют только одну **общую** точку.

Это точка $M(1;2)$

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OAMM_1} + S_{\Delta MM_1C}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^1 2^x dx + \frac{1}{2} MM_1 \cdot M_1C = \log_2 e + 2$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = -x^2 + 6$



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$$-x^2 + 6 = x^2 - 2x + 2$$

корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

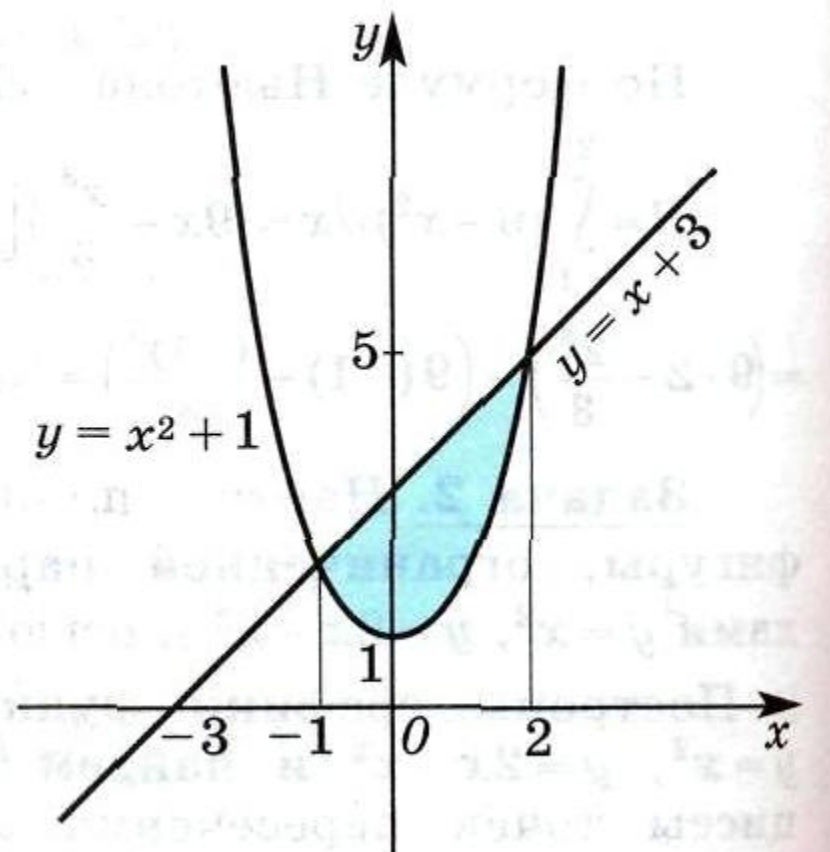
Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 ((-x^2 + 6) - (x^2 - 2x + 2)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = 15 - 6 = 9(\text{кв. ед}).$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

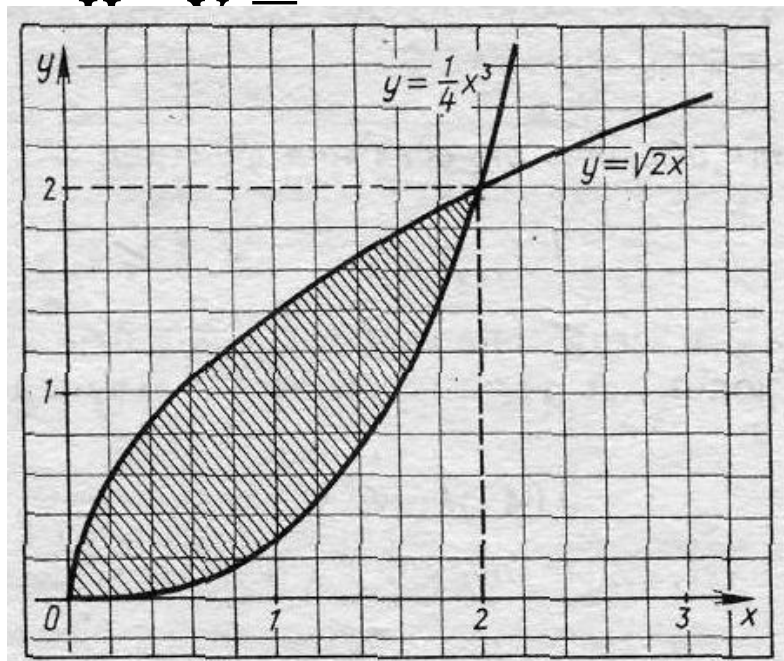
$$x^2 + 1 = x + 3$$

корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Искомая площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$.

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 ((x + 3) - (x^2 + 1)) dx = 4,5 (\text{кв. ед})$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{4}x^3$ и $y = \sqrt{2x}$.



Решение. Найдём точки пересечения этих графиков. Их координаты удовлетворяют системе уравнений:
$$\begin{cases} y = \sqrt{2x}, \\ \frac{1}{4}x^3 = \sqrt{2x} \end{cases}$$

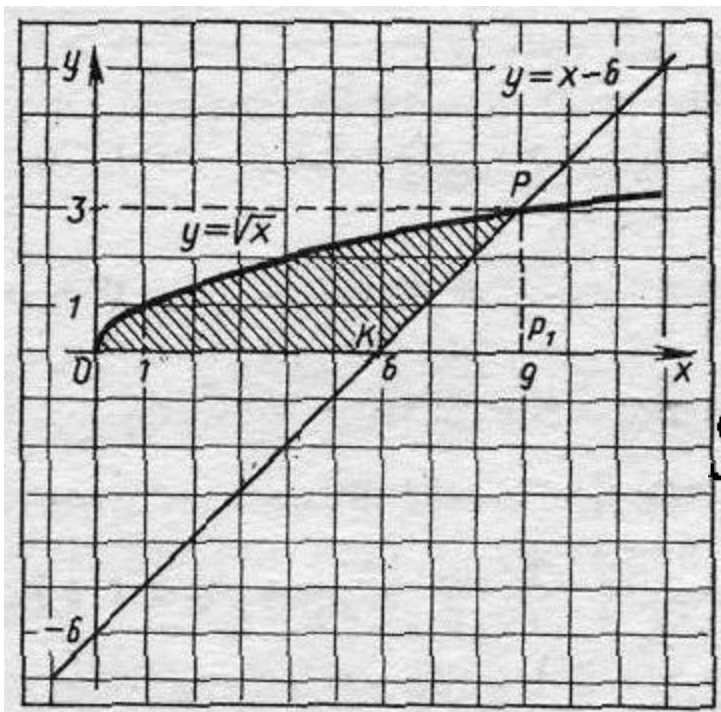
Откуда находим пределы интегрирования, а затем площадь фигуры по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^3}{4} \right) dx = 1 \frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной ,
 линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x - 6$, $y = 0$.

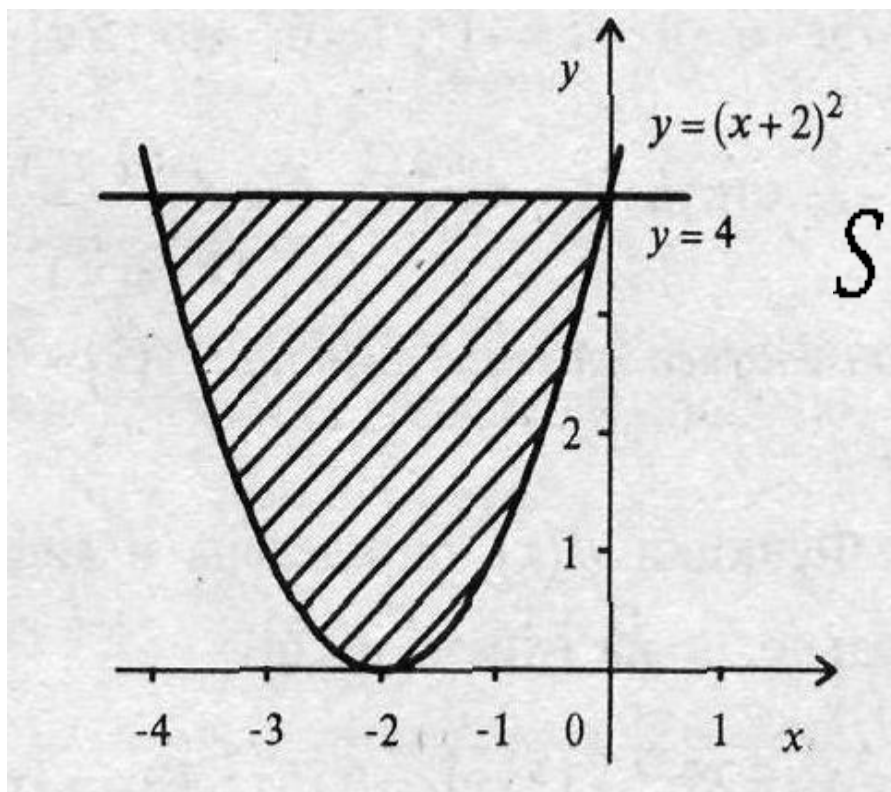
Решение.



$$S_{\text{фигуры}} = S_{OP P_1} - S_{\Delta K P P_1}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^9 \sqrt{x} dx - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 13,5$$

Задача. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 2)^2$ и $y = 4$



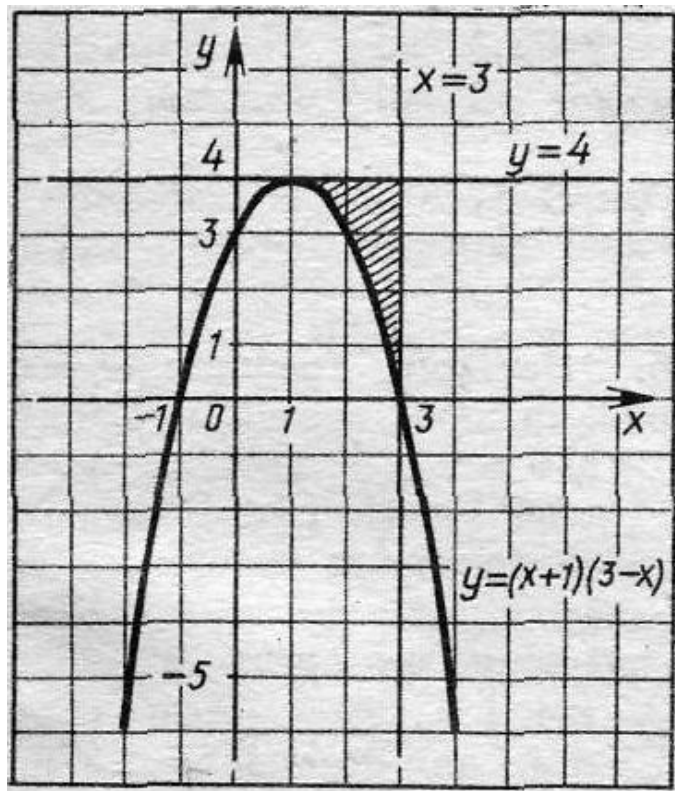
Решение.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$S = \int_{-4}^0 (4 - (x + 2)^2) dx = 10\frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 3)(3 - x)$, $y = 4$ и $x = 3$

Решение.



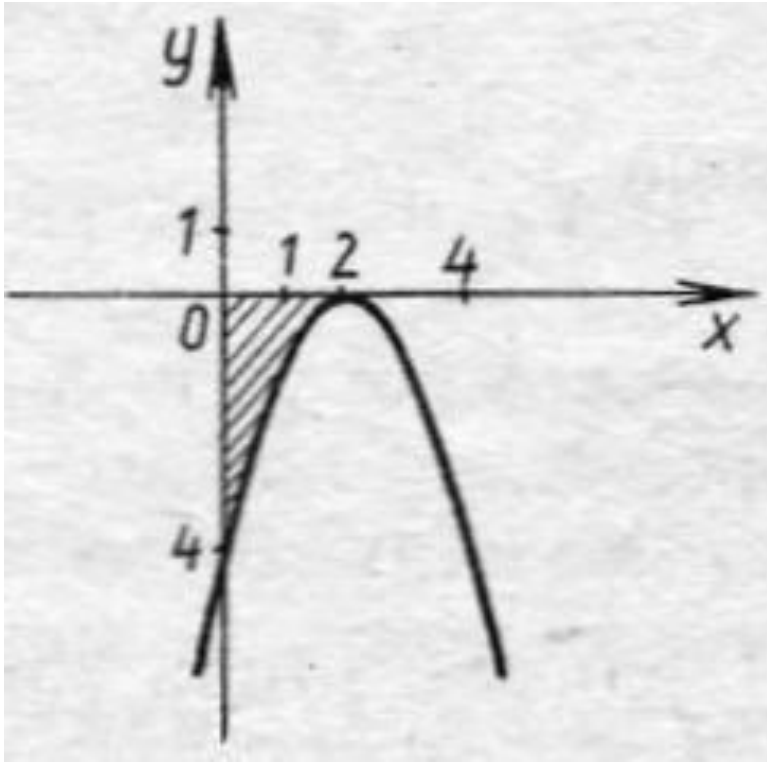
*График функции $y = (x + 3)(3 - x)$
или $y = -x^2 + 2x + 3$*

*Координаты вершины параболы
 $B(1; 4)$*

*Искомая площадь равна разности
площадей криволинейных трапеций*

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^3 (4 - (-x^2 + 2x + 3)) dx = 2\frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -x^2 + 4x - 4$ и осями координат



Решение.

Заданная фигура представляет собой криволинейную трапецию, лежащую «ниже» оси Oх.

$$S = \int_a^b (-f(x)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^2 (-(-x^2 + 4x - 4)) dx = 2\frac{2}{3}$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через точки $(4;0)$ и $(0;4)$.

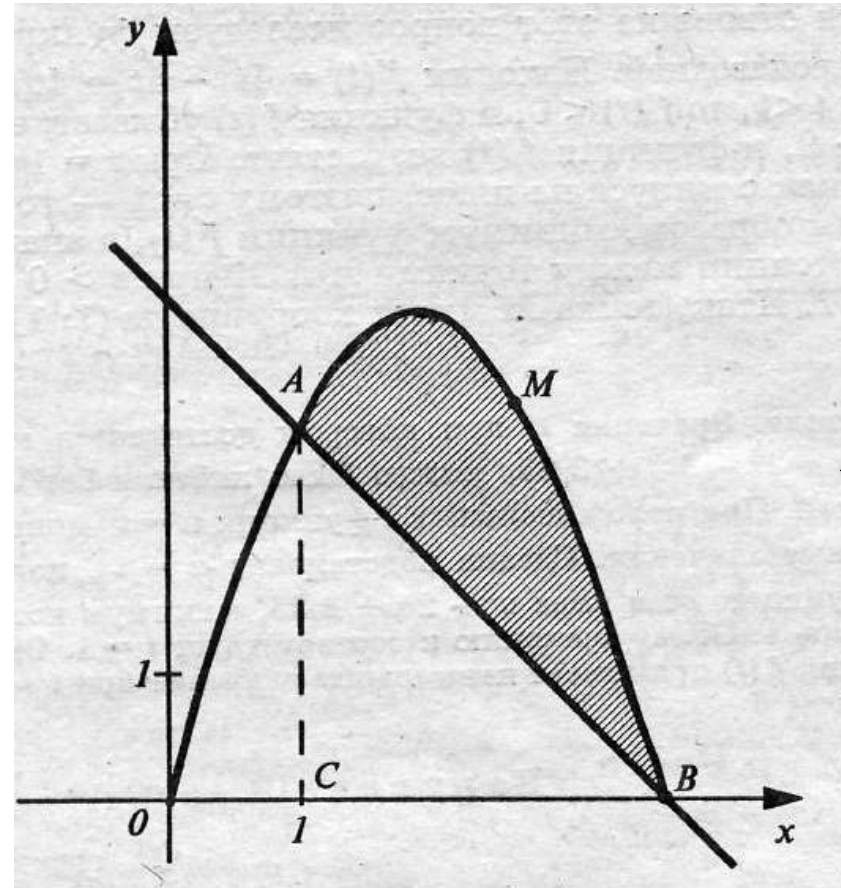
Решение. Первый способ.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{AMBC} - S_{\triangle ABC}$$

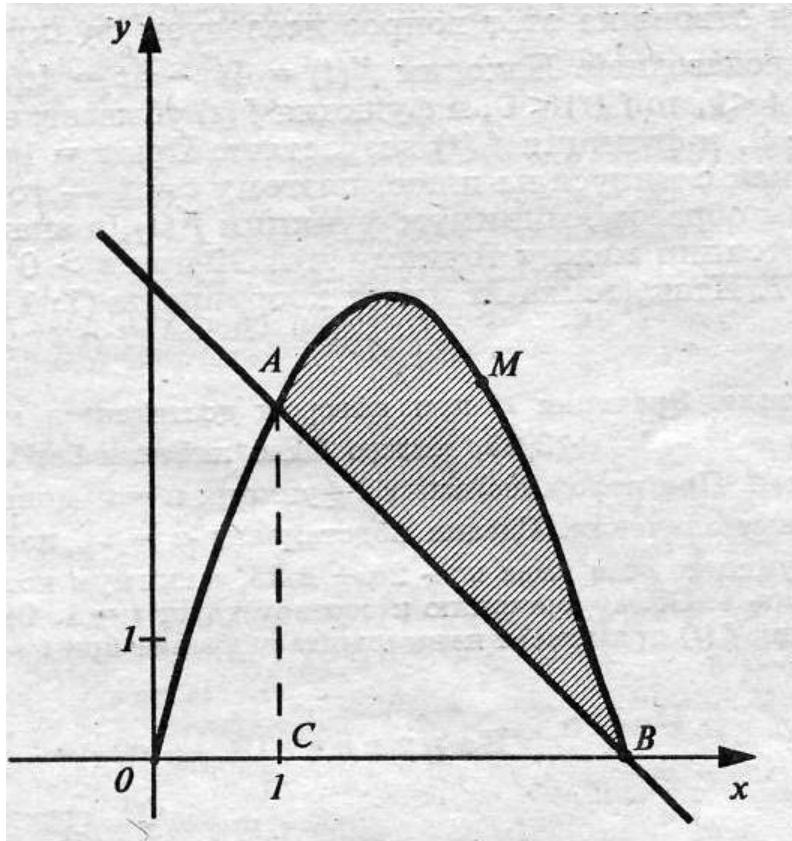
$$S_{AMBC} = \int_1^4 (4x - x^2) dx = 9$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 4,5$$

$$S_{\text{фигуры}} = 9 - 4,5 = 4,5$$



Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через точки $(4;0)$ и $(0;4)$.



Решение. 2 способ.

Подставив в уравнение прямой $y = kx + b$ координаты заданных точек, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 4 = k \cdot 0 + b \end{cases}$$

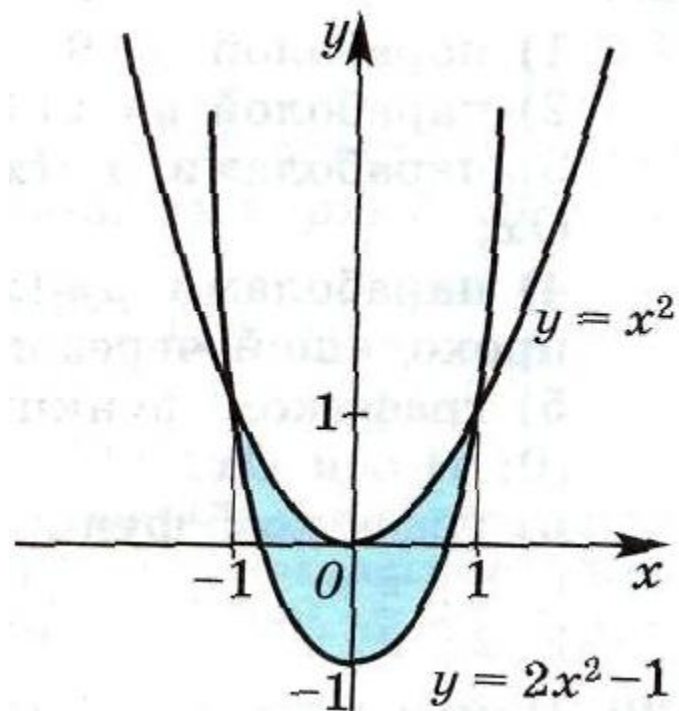
откуда найдём $k = -1$, $b = 4$.

Уравнение прямой AB : $y = -x + 4$.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{AMBC} - S_{\triangle ABC}$$

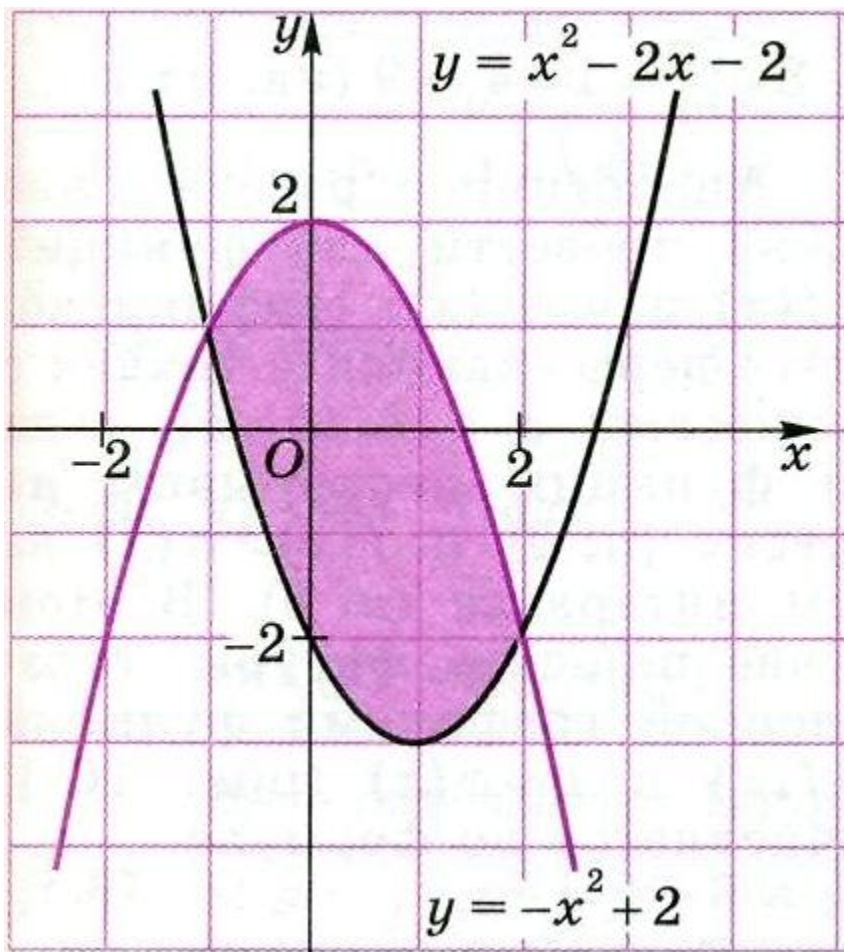
$$S_{\text{фигуры}} = \int_1^4 ((4x - x^2) - (-x + 4)) dx = 9 - 4,5 = 4,5 \text{ (кв. ед).}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной параболом $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$



$$S = \int_{-1}^1 (x^2 - (2x^2 - 1)) dx = \frac{4}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 2$ и $y = x^2 - 2x - 2$



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$$-x^2 + 2 = x^2 - 2x - 2$$

корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 ((x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)) dx$$
$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9 \text{ (кв.ед)}$$

По рисункам 31 – 36 назвать из каких фигур состоит фигура, площадь которой вычисляется, и указать пределы интегрирования.

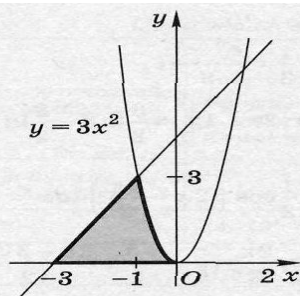


Рис. 31

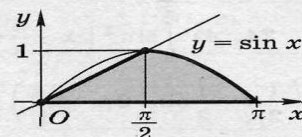


Рис. 32

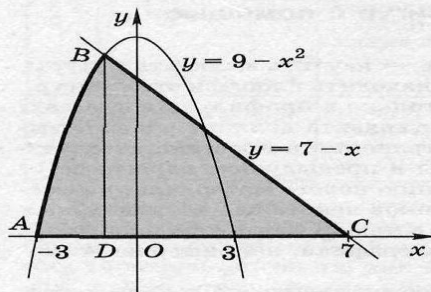


Рис. 33

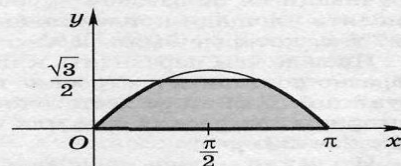


Рис. 34

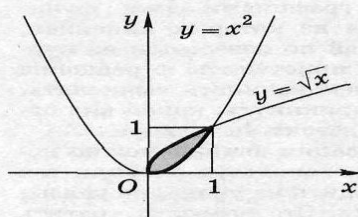


Рис. 35

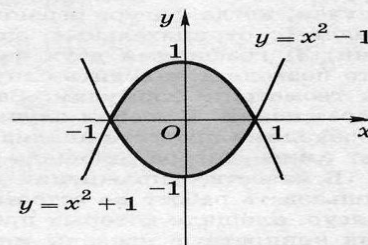


Рис. 36

Литература

- *1. Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, и др. Под редакцией Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровень.*
- *2. Программы по математике для общеобразовательных учреждений 2008 год.*