

Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: *Сходимость знакоположительных рядов*

§15. Сходимость знакоположительных рядов

ЛЕММА 1 (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного ряда).

Знакоположительный ряд сходится $\Leftrightarrow$ последовательность его частичных сумм ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2 (первый признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ и $\sum v_n$ – знакоположительные ряды, причем

$$u_n \leq v_n, \quad \forall n \geq N \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Тогда

- 1) если ряд $\sum v_n$ сходится, то и ряд $\sum u_n$ тоже сходится;
- 2) если ряд $\sum u_n$ расходится, то и ряд $\sum v_n$ тоже расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 3 (второй признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ и $\sum v_n$ – знакоположительные ряды.

Если при $n \rightarrow \infty$ существует **конечный и отличный от нуля** предел отношения их общих членов, т.е.

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут себя одинаково по отношению к сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ЭТАЛОННЫЕ РЯДЫ, которые используются в признаках сравнения:

а) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

б) обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } \alpha > 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

в) ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } |q| < 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } |q| \geq 1. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4 (признак Даламбера).

Пусть $\sum u_n$ – знакоположительный ряд и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

Тогда

- а) если $\ell < 1$, то ряд сходится;
- б) если $\ell > 1$, то ряд расходится;
- в) если $\ell = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 5 (признак Коши).

Пусть $\sum u_n$ – знакоположительный ряд и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

Тогда

- а) если $\ell < 1$, то ряд сходится;
- б) если $\ell > 1$, то ряд расходится;
- в) если $\ell = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечания.

- 1) В обеих теоремах 4 и 5 случай $\ell = \infty$ включается в $\ell > 1$.
- 2) В ходе доказательства теорем 4 и 5 показывается, что если $\ell > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$$

ТЕОРЕМА 6 (интегральный признак Коши).

Пусть $\sum u_n$ – знакоположительный ряд,

$f(x)$ – непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая на $[c; +\infty)$ (где $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$) функция такая, что

$$f(n) = u_n \quad (\text{для любого } n = 1, 2, 3 \dots).$$

Тогда несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ и ряд $\sum_{n=c}^{\infty} u_n$ ведут себя одинаково относительно сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО