Проверка статистических гипотез

Статистическая гипотеза -- это предположение о генеральной совокупности, высказанное на основании статистических выборочных данных.

Статистическая проверка гипотез -- это процедура обоснованного сопоставления высказанной гипотезы с имеющимися выборочными данными.

Например: исследуем влияние нового лекарственного препарата на снижение артериального давления.

$\mathbf{X\{x_1, x_2, \ldots x_{n1}\}}$ -- контрольная группа (выборка, объёмом n_1)

$\mathbf{Y\{y_1, y_2, \ldots y_{n2}\}}$ -- опытная группа (выборка объёмом n_2)

Высказываются две альтернативные гипотез

H_0: -- различия между выборками статистически не значимы (т.е. носят случайный характер).

H_1: -- различия между выборками статистически значимы (т.е., например, препарат эффективен)

Чтобы принять или опровергнуть эти предположения, используют статистические критерии.

Статистический критерий -- это случайная величина, закон распределения которой известен, т.е. каждому значению критерия поставлена в соответствие вероятность, с которой он эти значения принимает.

Для каждого критерия существует таблица, в которой содержатся критические значения критерия. Каждое критическое значение соответствует определённому уровню значимости α и числу степеней свободы V *(или к)*

V = n - a

где a -- число наложенных связей или ограничений.

$\alpha = 1 - P_{Д}$ -- это вероятность ошибочно отклонить нулевую гипотезу (ошибка первого рода).

Сравнение значения критерия, вычисленного по выборке, с табличным (критическим) значением критерия, позволяет сделать вывод о правомерности выдвигаемой гипотезы для данного уровня значимости.

<u>Например:</u>

Хотим доказать статистическую значимость различия между выборками

$X\{x_1, x_2, \dots x_{n1}\}$ и $Y\{y_1, y_2, \dots y_{n2}\}$ с $P_Д$=0,95

(это значит, что влияние препарата достоверно (эффективно) на 95%).

Если в результате проверки выяснилось, что вычисленному значению критерия соответствует вероятность бОльшая, чем заданный уровень значимости (α=1-0,95=0,05), то нулевая гипотеза принимается.

Основные этапы проверки статистических гипотез.

1) Выдвигается гипотеза $H_{0.}$
2) Подсчитывается экспериментальное значение критерия по имеющимся выборкам (для каждого критерия существует формула или алгоритм для определения значения критерия).
3) Выбирается величина уровня значимости α ($\alpha = 1 - P_Д$).
4) По заданному α и числу степеней свободы v (или к) в таблице находим критическое (табличное) значение критерия.
5) Сравнить экспериментальное и критическое значения критерия и сделать вывод о правомерности гипотезы H_0.

Критерии значимости подразделяются на параметрические и непараметрические

Параметрические критерии для вычисления экспериментального значения используют статистические параметры: $\bar{x}, S_n^2, S_n \; S_{\bar{x}}$

Они могут использоваться для выборочных совокупностей, распределённых по закону близкому к нормальному (Гаусса).

Непараметрические критерии не требуют вычисления выборочных параметров, указанных выше. Они менее точны, но их можно применять к выборкам, закон распределения которых неизвестен (не обязательно нормальное распределение). Если исследуемые выборки распределены нормально, то выводы параметрических и

1. Критерии согласованности с нормальным распределением

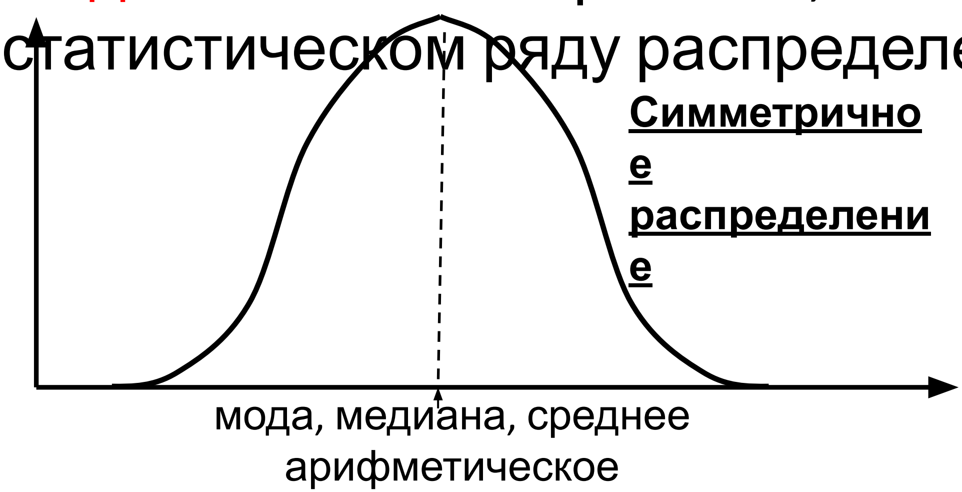
Асимметрия и эксцесс – основные показатели, наиболее чувствительные к отклонению от нормальности.

1.1.Коэффициент асимметрии

Кроме среднего арифметического, существуют такие статистические характеристики совокупности как медиана и мода.

Медиана разделяет ранжированный ряд на две равные части. Если ряд содержит четное значение, берется среднее арифметическое между средними значениями в ряду.

Мода — значение признака, имеющее наибольшую частоту в статистическом ряду распределения.



В симметричном распределении среднее арифметическое, медиана и мода совпадают

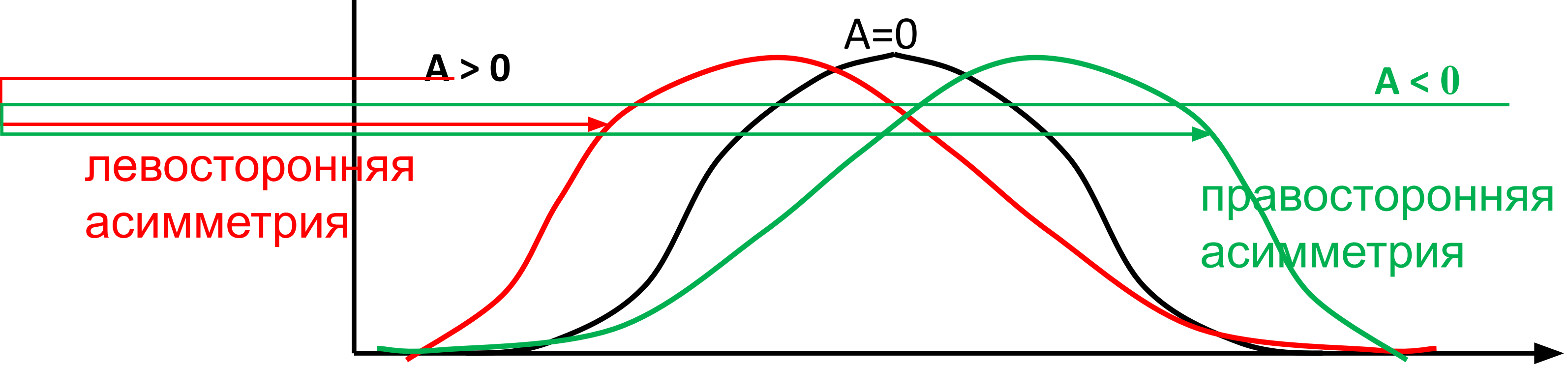
Если же наблюдается асимметрия, то среднее арифметическое и мода смещаются относительно медианы.

Асимметрию оценивают по формуле:

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{n\cdot\sigma^3}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^3\cdot p_i}{\sigma^3}$$

где К – количество интервалов

Знак при коэффициенте асимметрии указывает
на направление асимметрии.



H_0: Отличие коэффициента асимметрии от нуля статистически не значимо, то есть распределение нормально по асимметрии.

Вычисляем коэффициент асимметрии по экспериментальным данным по формуле:

$$\text{Аэксп} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n{S_x}^3}$$

где К – количество интервалов

Сравниваем $A_{\text{эксп}}$ с табличным (критическим) значением, которое находим в таблице критерия асимметрии для заданного уровня значимости ά.

Таблица значений асимметрии

N	*α=0,05*	*α=0,01*
10	1,13	1,49
20	0,92	1,21
30	0,79	1,05
40	0,71	0,93
50	0,63	0,84
60	0,59	0,78
80	0,52	0,68
100	0,47	0,62

Если $\left|A_{эксп}\right| \leq A_{крит} \Rightarrow$ H_0 принимаем.

Вывод: экспериментальное распределение соответствует нормальному по асимметрии.

Если $\left|A_{эксп}\right| > A_{крит} \Rightarrow$ H_0 отвергаем.

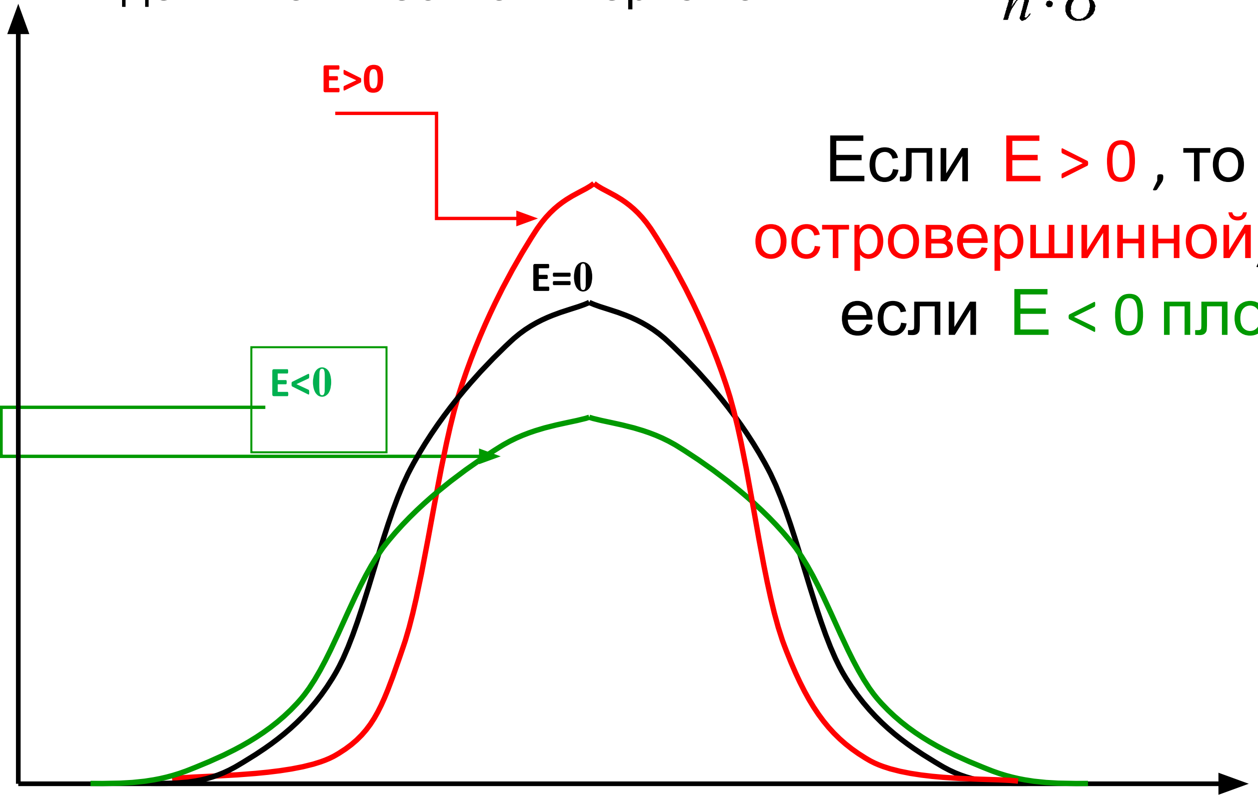
Вывод: экспериментальное распределение не соответствует нормальному по асимметрии.

1.2 Эксцесс.

Иногда этот показатель называют крутостью кривой. Эксцесс вычисляется по формуле:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{n \cdot \sigma^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^4 \cdot p_i}{\sigma^4} - 3$$

где К – количество интервалов



Если $E > 0$, то кривая называется островершинной,

если $E < 0$ плосковершинной.

H_0: Отличие эксцесса от нуля носит случайный характер, то есть распределение нормально по эксцессу.

Вычисляем ***эксцесс*** по экспериментальным данным по формуле:

$$E_{эксп} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{nS_x{}^4} - 3$$

где K – количество интервалов

Сравниваем $E_{эксп}$ с табличным (критическим) значением, которое находим в таблице критерия эксцесса для заданного уровня значимости ά.

Таблица значений эксцесса

N	***α=0,05***	***α=0,01***
10	1,43	
20	1,41	1,95
30	1,31	1,78
40	1,19	1,62
50	1,11	1,50
60	1,05	1,42
80	0,94	1,25
100	0,85	1,14

Если $\left|E_{эксп}\right| \le E_{крит} \Rightarrow$ H_0 принимаем.

Вывод: экспериментальное распределение соответствует нормальному по эксцессу.

Если $\left|E_{эксп}\right| > E_{крит} \Rightarrow$ H_0 отвергаем.

Вывод: экспериментальное распределение не соответствует нормальному по эксцессу.

Проверка гипотез о законе распределения

Проверку гипотезы о законе распределения (то есть, соответствует ли выборочная совокупность какому либо определённому распределению) проводят с помощью критерия соответствия (предложен К.Пирсоном в 1900г.).

Критерий χ^2 Пирсона

H_0 заключается в том, что различие между наблюдаемыми экспериментальными частотами m_i попадания вариант выборки в интервалы вариационного ряда от вычисленных теоретических частот $m_{i\ теор}=n\cdot P_{i\ теор}$ статистически не значимо (т.е. носит случайный характер). Другими словами:

H_0: экспериментальные данные соответствуют предложенному теоретическому закону распределения.

Экспериментальное значение критерия вычисляется по формуле:

$$x^2_{эксп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_{iэксп} - m_{iтеор})^2}{m_{iтеор}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_{iэксп} - n \cdot P_{iтеор})^2}{n \cdot P_{iтеор}}$$

где $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ -- объём выборки, **к** -- количество интервалов,

$P_{iтеор}$ -- вероятность попадания в интервал для теоретического распределения.

Затем, по таблице критерия Пирсона для ***заданного уровня значимости α и числа степеней свободы***

v= k - a

где a -- ***число наложенных связей***, находим $x^2_{крит} = x^2_{табл}$

если теоретическое распределение *произвольное*, то а=1,

v= k - 1

если теоретическое распределение *распределено по нормальному закону Гаусса,* то а=3 -- числу наложенных связей, необходимых для вычисления вероятности: n,M[X],и σ [X],. **v=k - 3**

Если $\chi^2_{эксп} \le \chi^2_{крит} \Rightarrow$

H₀ принимаем.

Вывод: экспериментальное распределение соответствует теоретическому.

Если $\chi^2_{эксп} > \chi^2_{крит} \Rightarrow$

H₀ отвергаем.

Вывод: экспериментальное распределение не соответствует теоретическому.

<u>Пример:</u> Изучался рост 50 человек. В таблице приведены экспериментальные частоты попадания в интервал $\mathbf{m_i}$ и теоретические частоты, рассчитанные из вероятностей попадания в интервал для распределения Гаусса. К=5 , n=50. v=5-3=2

№ интервала	1	2	3	4	5
$\mathbf{m_i}$ практические	5	9	22	8	6
$\mathbf{m_i}$ теоретические	5	10	20	10	5
	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

H_0: Экспериментальное (практическое) распределение соответствует распределению Гаусса.

Из таблицы для ν=5-3=2 и α=0,05 находим

$$x^2_{эксп}=\frac{(5-5)^2}{5}+\frac{(9-10)^2}{10}+\frac{(22-20)^2}{20}+\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(6-5)^2}{5}=0+\frac{1}{10}+\frac{4}{20}+\frac{4}{10}+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1+2+4+2}{10}=0,9$$

Т.к. $x^2_{эксп} < x^2_{крит} \Rightarrow$ H_0 принимаем.

Вывод: исследуемое выборочное распределение соответствует
распределению Гаусса.

Значения критерия Пирсона (критерия χ^2)

Число степеней свободы, ν	***α=0,05***	***α=0,01***
1	3,84	6,63
2	5,99	9,21
3	7,81	11,3
4	9,49	13,3
5	11,1	15,1
6	12,6	16,8
7	14,1	18,5
8	15,5	20,1
9	16,9	21,7
10	18,3	23,2

Параметрические критерии. Критерий Фишера

Этот параметрический критерий служит для проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий нормально распределенных генеральных совокупностей.

$$H_0: D[X] = D[Y] \text{ (или } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Экспериментальное значение критерия вычисляется по формуле:

$$F_{эксп} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, F \geq 1, \nu_1 = (n_1 - 1), \nu_2 = (n_2 - 1)$$

где n_1, n_2 − объемы выборок,

ν_1, ν_2 − числа степеней свободы для этих выборок.

Сравниваем $F_{эксп}$ с табличным (критическим) значением, которое находим в таблице критерия Фишера для заданного уровня значимости ά и числа степеней свободы v_1 и v_2.

При пользовании таблицами следует обратить внимание, что число степеней свободы для выборки с большей по величине дисперсией выбирается как номер столбца таблицы, а для меньшей по величине дисперсии как номер строки таблицы

Если $F_{эксп} \le F_{крит} \Rightarrow$ H_0 принимаем.

Вывод: *дисперсии двух генеральных совокупностей можно считать равными.*

Если $F_{эксп} > F_{крит} \Rightarrow$ H_0 отвергаем.

Вывод: *дисперсии двух генеральных совокупностей не равны.*

Пример. Изучали влияние пищевых добавок на массу тела лабораторных животных. Опыт проводился на двух группах животных: опытной и контрольной. В опытной группе животные получали пищевую добавку к рациону. За время опыта прибавки в весе составили в граммах:

X: Опыт	Y: Контроль
580	500
690	560
700	420
619	621
703	580
560	530
	450

$$H_0 : D[X] = D[Y] \qquad \overline{X} = 642, \overline{Y} = 523$$

$$\sigma^2_{X\,\text{эксп}} = S^2_X = 4097, \sigma^2_Y = S^2_Y = 5143, F = \frac{\sigma^2_y}{\sigma^2_x} = \frac{5123}{4097} = 1,25$$

для $\alpha = 0,05, \nu_1 = 7-1 = 6, \nu_2 = 6-1 = 5, F_{крит} = 4,95$

Так как $F_{эксп} < F_{крит} \Rightarrow H_0$ принимаем

Вывод: дисперсии двух генеральных совокупностей можно считать равными.

Таблица критерия Фишера (*α=0,05*)

v_2	Число степеней свободы v_1									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18,51	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,6	19,4	19,4	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35

Контрольные вопросы.

1.Что такое статистическая гипотеза и критерии проверки статистических гипотез?

2. Основные этапы проверки статистических гипотез.

3. Критерий Асимметрии.

4. Критерий Эксцесса.

5. Критерий Пирсона .

6. Критерий Фишера.

- Данные
  - Метрические
    - Согл-е с НЗР
      - параметрические
        - зависимые
          - Неразб-о
        - независимые
          - Неразб-о
            - Неразб-о
    - Несог-е с НЗР
      - непараметрические
        - зависимые
          - 2 выб
            - Неразб-о
          - > 2 выб
            - Кр. Фридмана
        - независимые
          - 2 выб
            - Кр.Манна-Уитни
          - > 2 выб
            - Кр.Крускела-Уоллиса
  - Неметрические
    - порядковые
    - номинативные
      - зависимые
      - независимые
        - Кр.Фишера (2 выб)
          - Кр.Пирсона (> 2 выб)