

Логарифмическая функция, её свойства и график



Определение.

Логарифмом положительно числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

$$\log_a b = c, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1$$

$$a^c = b$$

$$\log_a a^c = c$$

$$a^{\log_a c} = c$$

$$\log_a 1 = 0$$

Работа устно:

№	1	2	3	4
a				
b				
c				
d				



Джон Непер John Napier



Дата рождения:

1550 год

Место рождения:

замок Мерчистон, в те годы
предместье Эдинбурга

Дата смерти:

4 апреля 1617

Место смерти:

Эдинбург

Научная сфера:

математика

Альма-матер:

Сент-Эндрюсский
университет

Известен как:

изобретатель логарифмов

Леонард Эйлер

нем. Leonhard Euler



Дата рождения:

4 (15) апреля 1707

Место рождения:

Базель, Швейцария

Дата смерти:

7 (18) сентября 1783 (76 лет)

Место смерти:

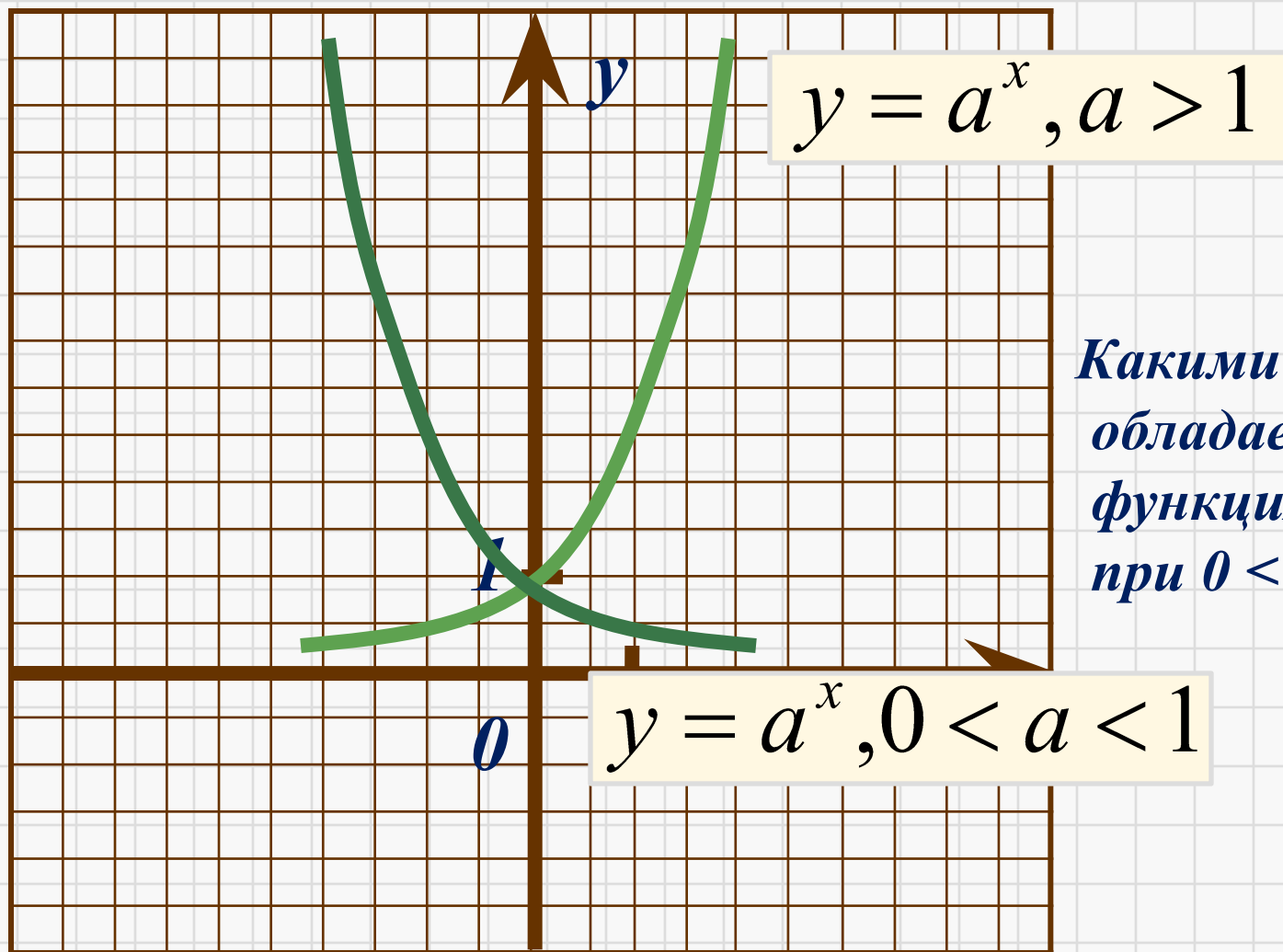
Санкт-Петербург,
Российская империя

Научная сфера:

Математика, механика,
физика, астрономия

Современное определение показательной, логарифмической и тригонометрических функций — заслуга Леонарда Эйлера, так же как и их символика.

Прочитайте и назовите график функции, изображённый на рисунке.



Какими свойствами обладает эта функция при $0 < a < 1$?

Теорема об обратных функциях

Если функция $f(x)$ определена и монотонна на некотором промежутке X , причем

$$D(f)=X, \quad E(f)=Y,$$

то существует обратная ей функция $g(x)$, определенная на Y , т.е.

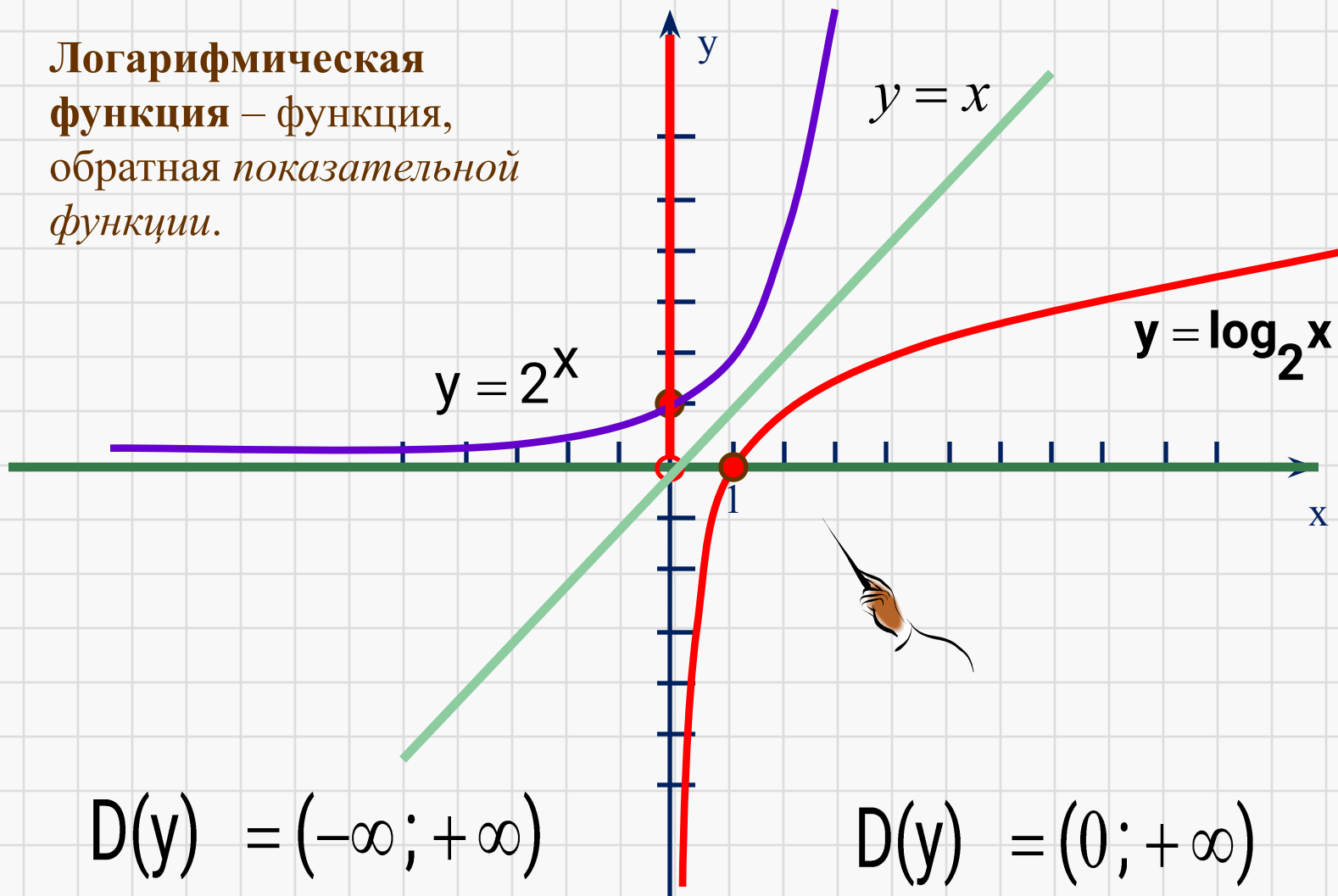
$$D(g)=Y, \quad E(g)=X,$$

причем, монотонность сохраняется.

Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

Построим график функции $y=2^x$

Логарифмическая функция – функция, обратная *показательной* функции.



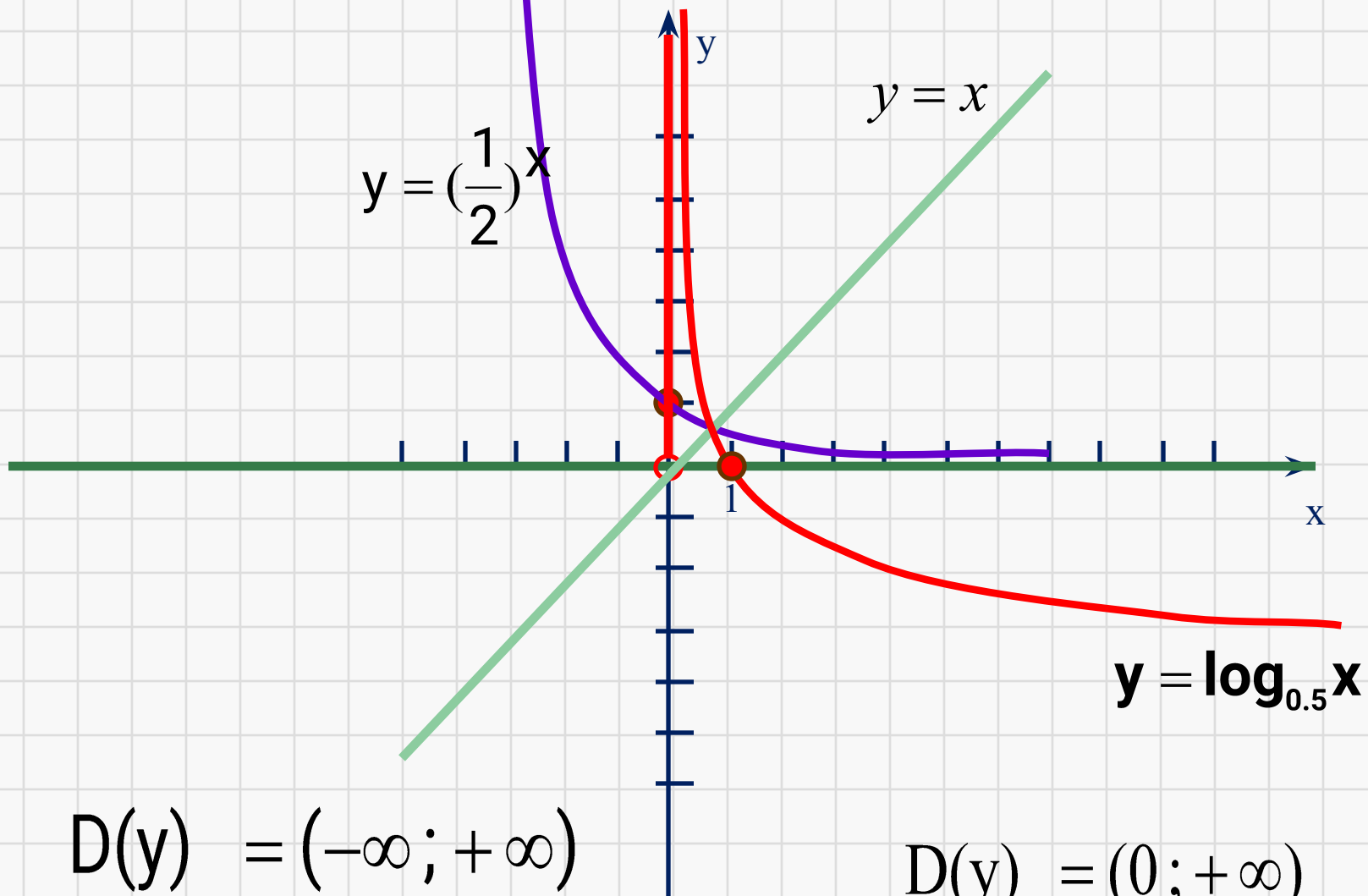
$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = (0; +\infty)$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

Построим график функции $y=(0,5)^x$



$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = (0; +\infty)$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

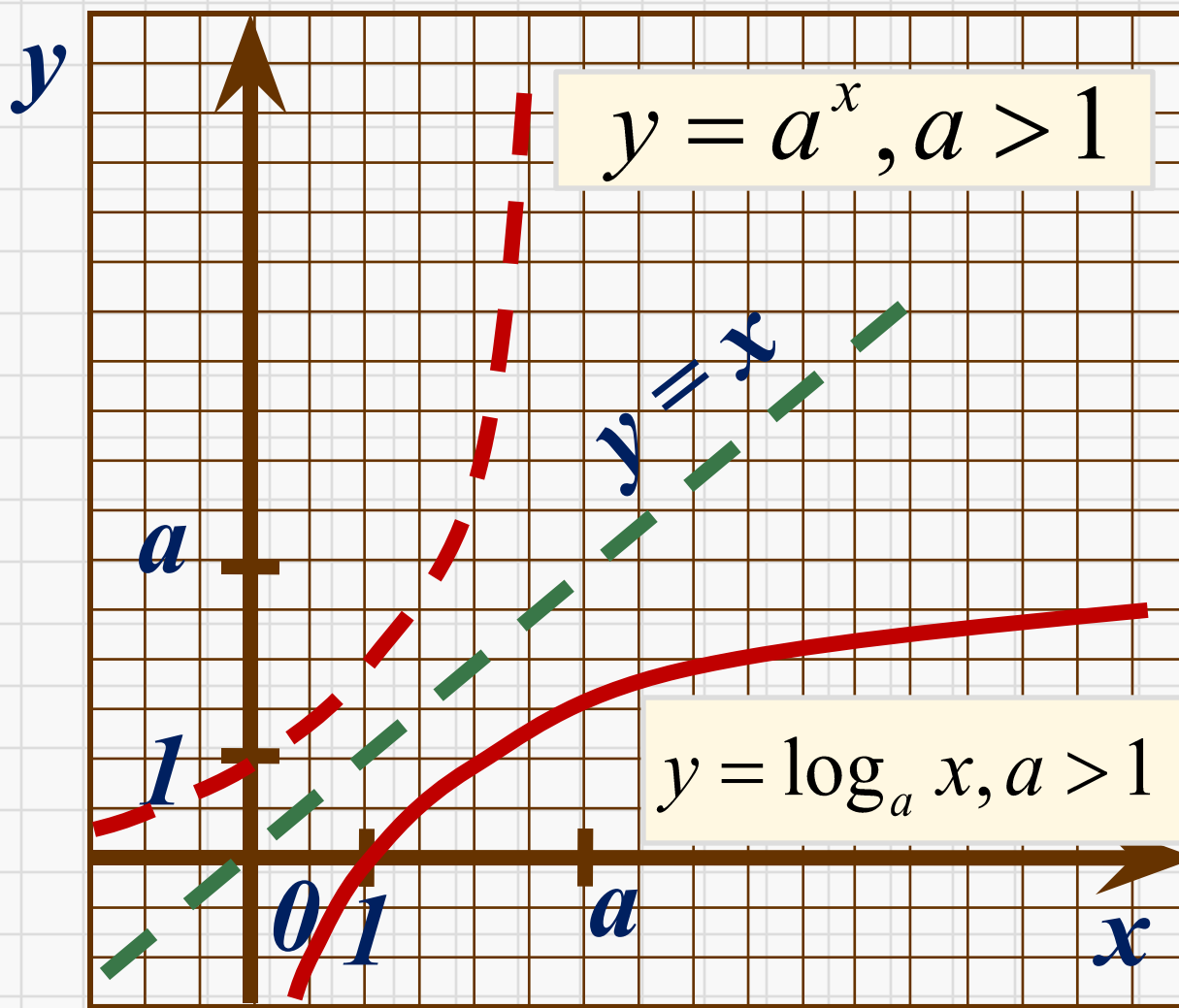
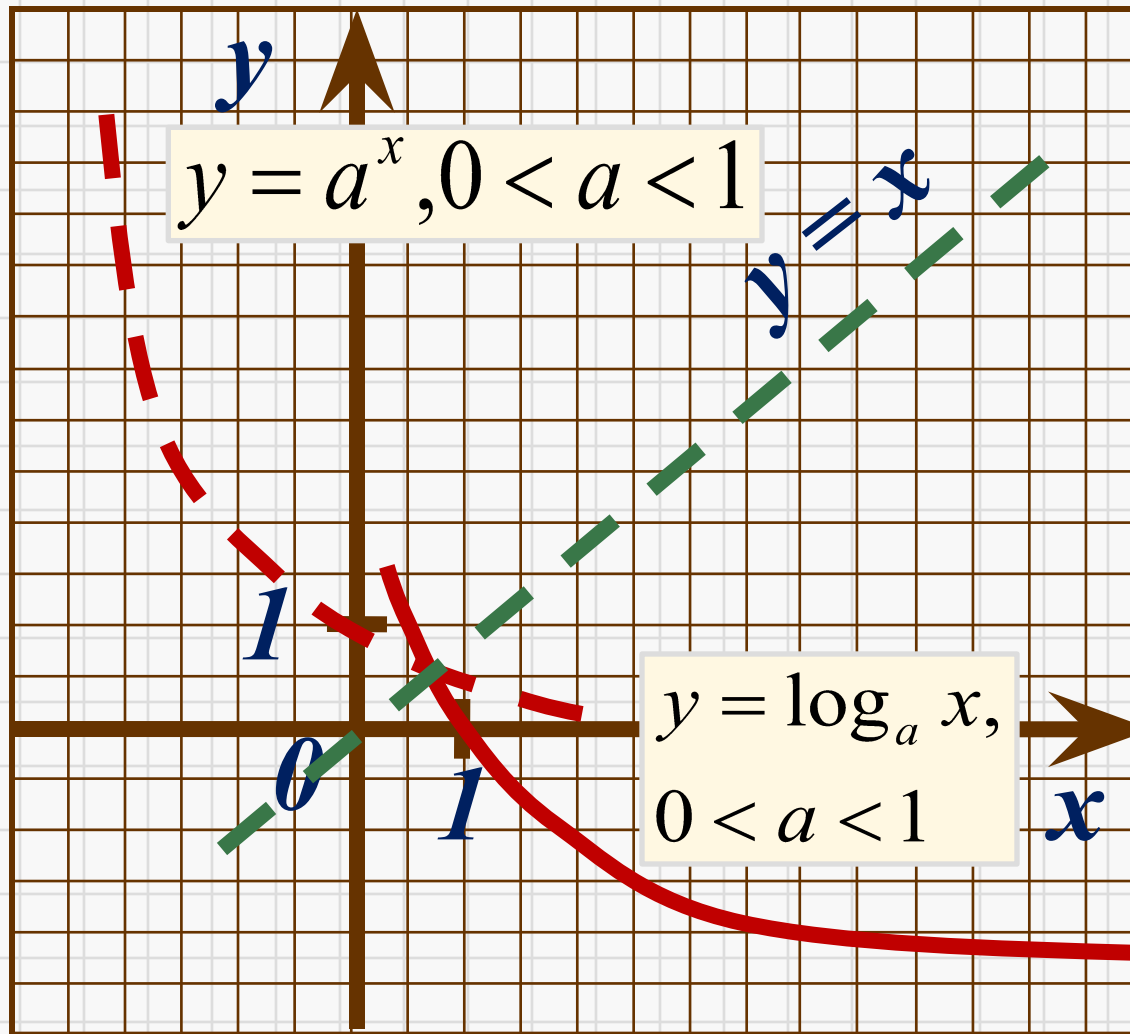


График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.



Функция вида $y = \log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) называется логарифмической.

1) $D(y) = (0; +\infty)$

Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x > 0$.

Устная работа

Найти $D(y)$, если известно, что
 $a > 0$, $a \neq 1$

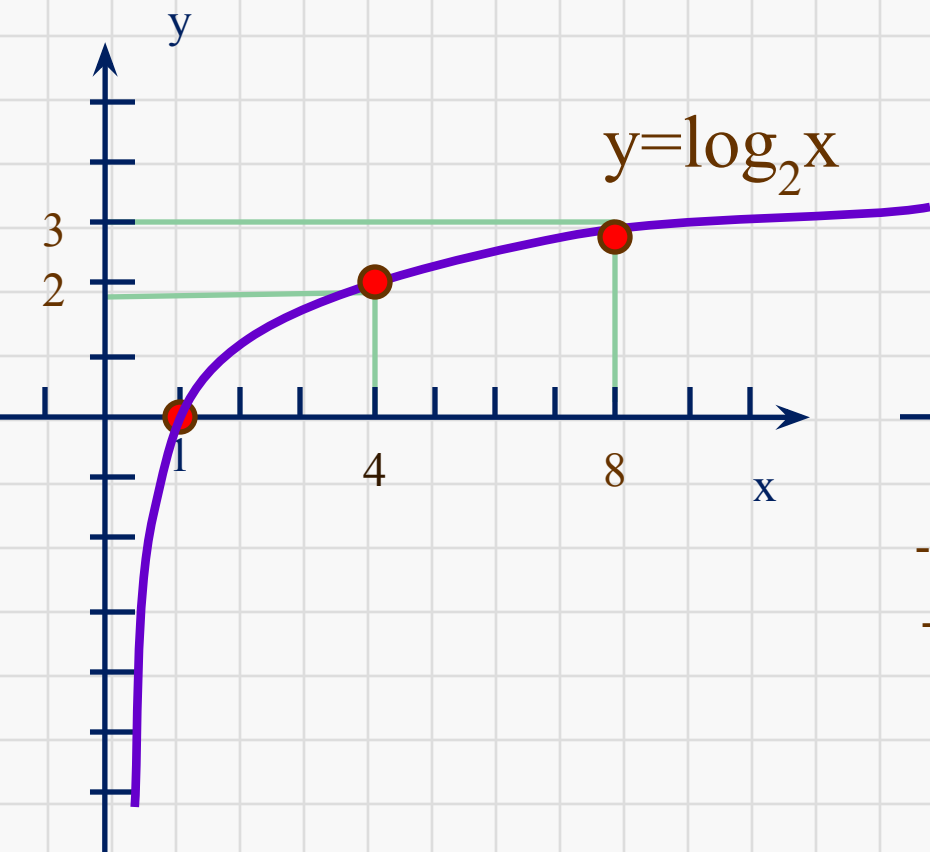
а) $y = \log_a x + 1$

б) $y = \log_a (x+1)$

в) $y = \log_a (1-x)$

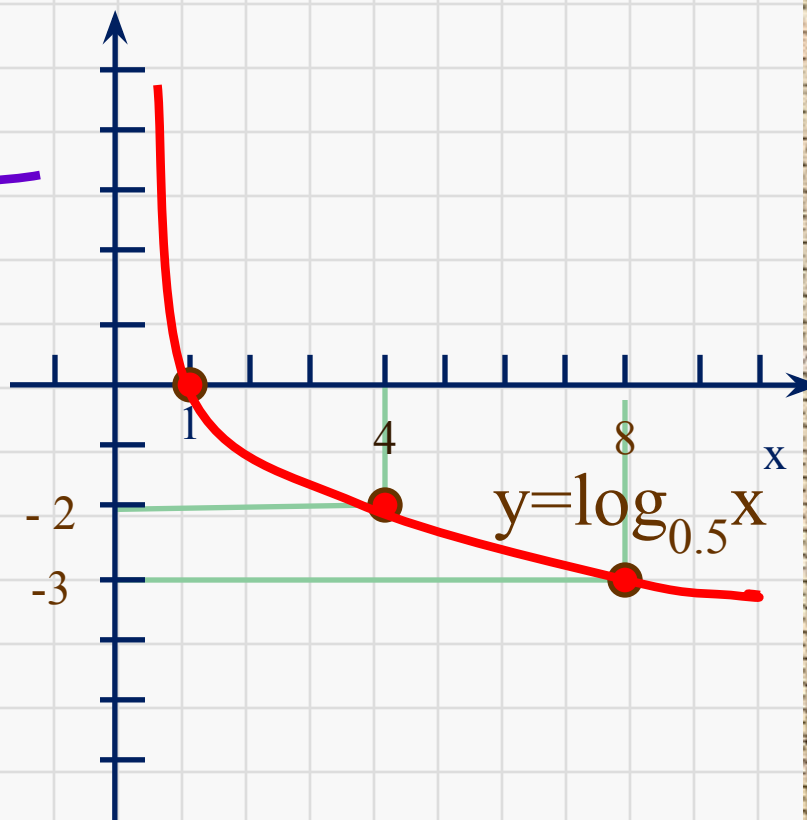
Построим график функции
 $y = \log_2 x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3



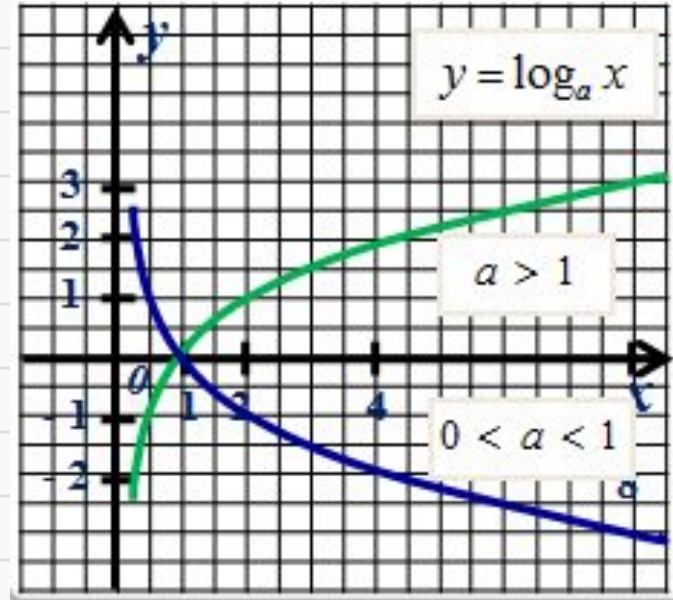
$y = \log_{0,5} x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	2	1	0	-1	-2	-3



Свойства функции

График логарифмической функции называют логарифмической кривой.



Свойства функции $y = \log_a x$, при $a > 1$

Свойства функции $y = \log_a x$, при $0 < a < 1$

1) $D(f) = (0; +\infty)$

2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$

3) Точки пересечения с осями координат:
с осью Оу график функции не пересекается; с осью Ох: А (1;0).

4) Промежутки знакопостоянства:

6) Точек экстремума $x_{\max}$, $x_{\min}$ нет.

7) Экстремумов $y_{\max}$, $y_{\min}$ нет.

8) Функция ни четная, ни нечетная, т.е. функция общего вида.

9) $f(x)$ не ограничена ни сверху, ни снизу; непрерывная.

10) $f(x)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

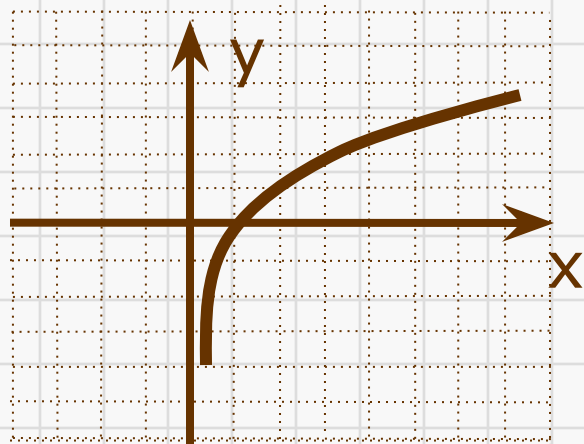
11) **выпукла вверх.**

11) **выпукла вниз.**

Задание №1

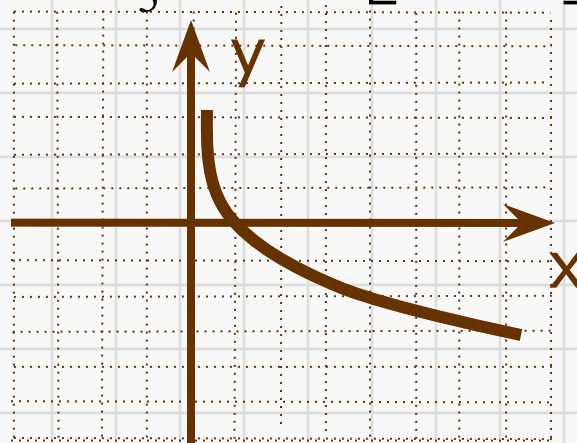
Найдите наибольшее и наименьшие значения функции на промежутке:

$$y = \lg x, x \in [1, 1000]$$



Функция возрастает,
значит: $y_{\text{наим.}} = \lg 1 = 0$
 $y_{\text{наиб.}} = \lg 1000 = \lg 10^3 = 3$

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x, x \in \left[\frac{1}{9}, 27\right]$$



Функция убывает,
значит: $y_{\text{наим.}} = -3$
 $y_{\text{наиб.}} = 2$

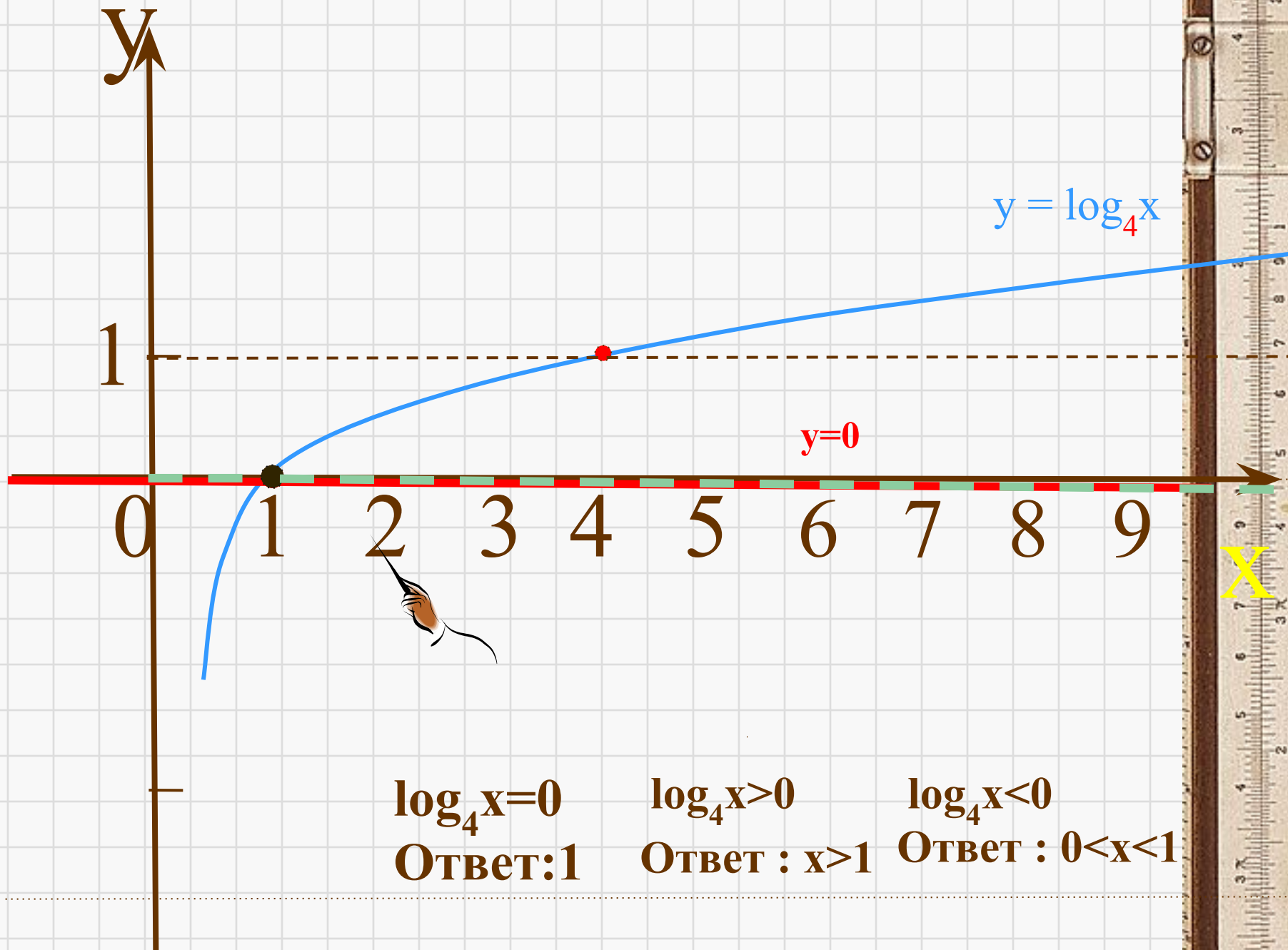
Задание № 2.

Решить уравнения и неравенства

а) $\log_4 x = 0$; б) $\log_4 x > 0$ в) $\log_4 x < 0$

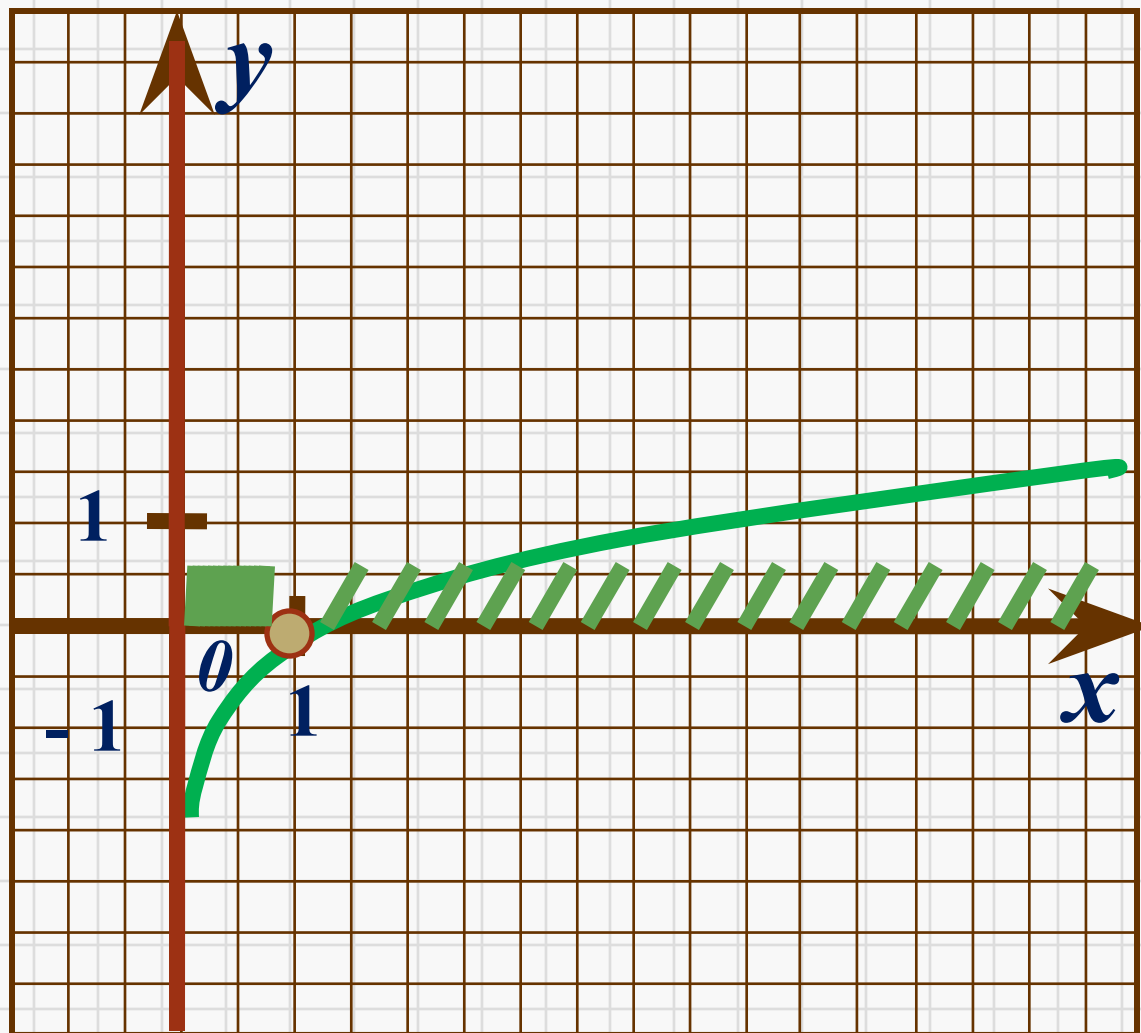
- Решаем графически.

В одной системе координат строим график функции $y = \log_4 x$ и $y = 0$



Задание №3

Решите уравнение и неравенства:



$$\log_5 x = 0$$

Ответ: $x = 1$

$$\log_5 x > 0$$

Ответ: $x > 1$

$$\log_5 x < 0$$

Ответ: $0 < x < 1$

Задание 4.

Решите уравнение и неравенства:

$$\log_{\frac{2}{5}} x = 0$$

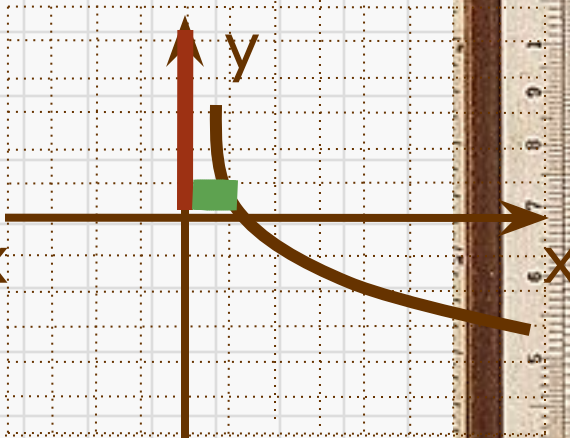
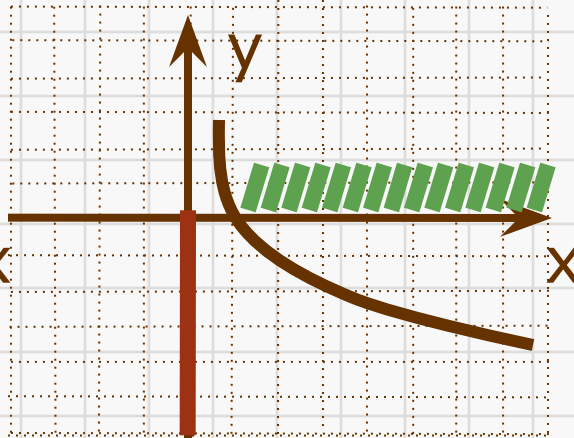
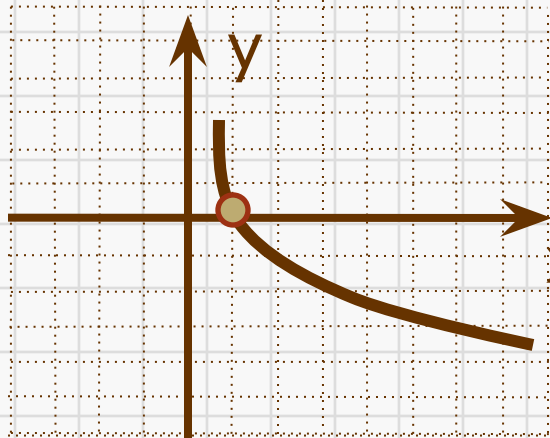
$$\log_{\frac{2}{5}} x < 0$$

$$\log_{\frac{2}{5}} x > 0$$

Ответ: $x = 1$

Ответ: $x > 1$

Ответ: $0 < x < 1$



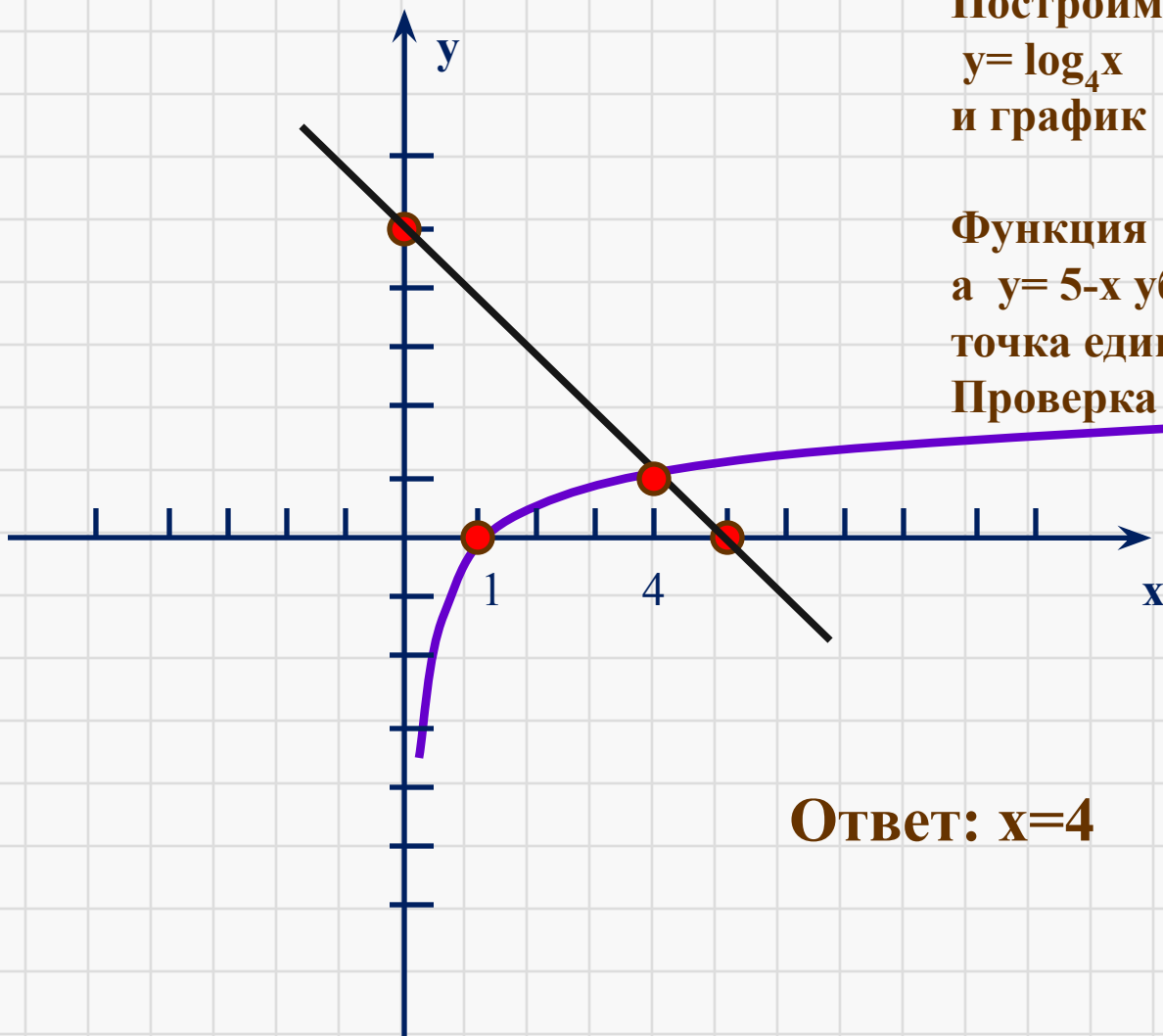
Задание № 5.

Решить уравнение

$$\log_4 x = 5 - x$$

Построим график функции
 $y = \log_4 x$
и график $y = 5 - x$

Функция $y = \log_4 x$ возрастает,
а $y = 5 - x$ убывает. То есть
точка единственная.
Проверка $\log_4 4 = 5 - 4$



Ответ: $x=4$



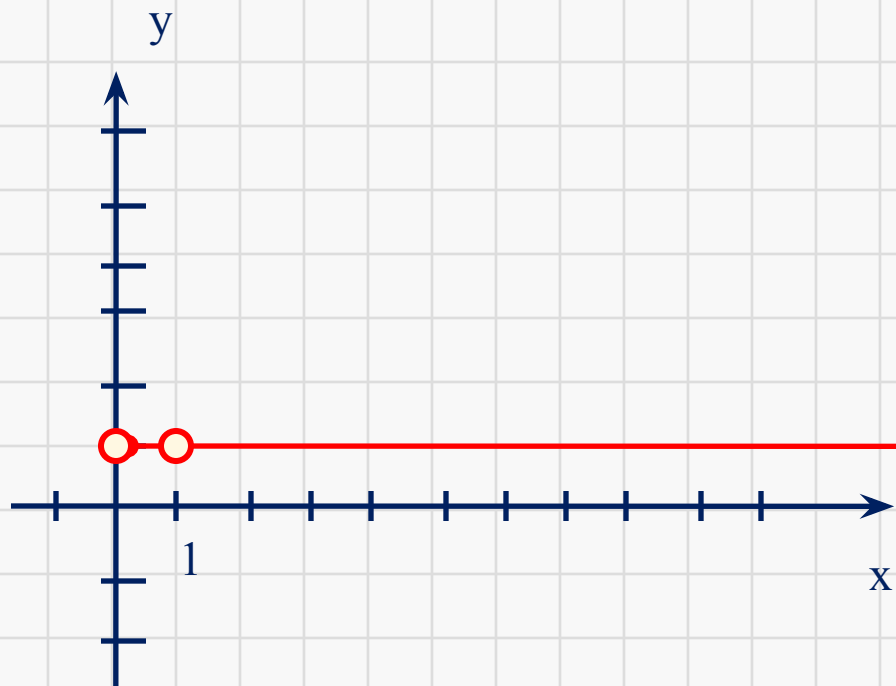
Задание № 6.

Построить графики функции

A) $y = \log_x x$

$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$

учитывая, что $\log_a a = 1$, строим график $y=1$

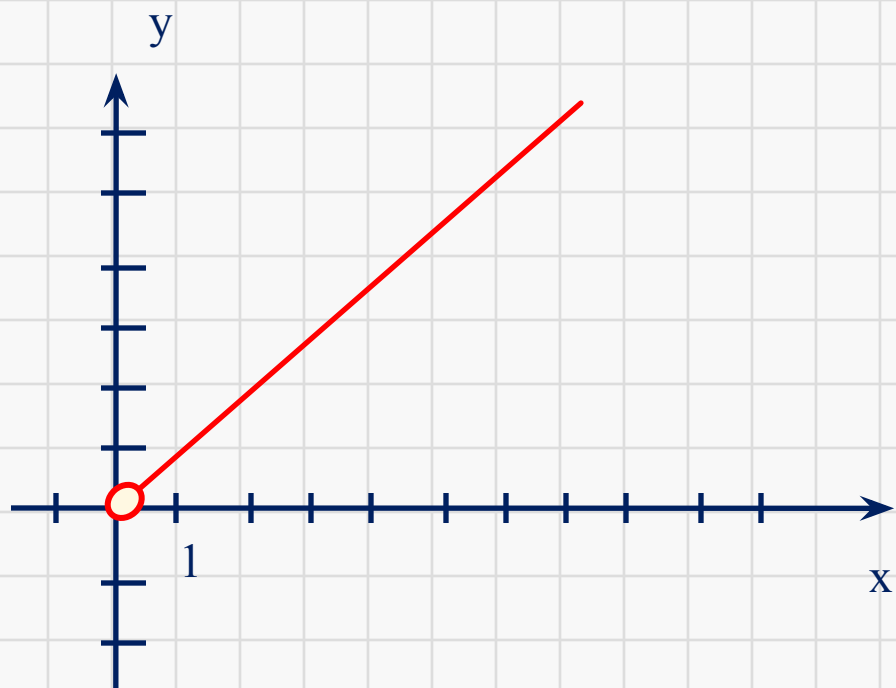


Построить графики функции

Б) $y = 2^{\log_2 x}$

$D(y) = (0; +\infty)$

учитывая, что $a^{\log_a c} = c$, строим график $y = x$

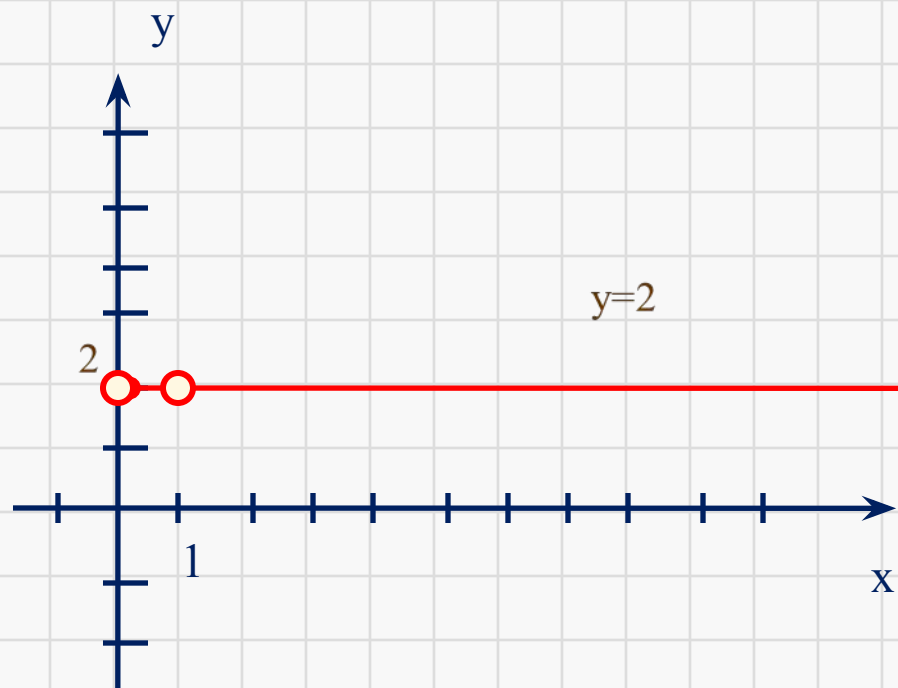


Построить графики функции

$$\text{В)} y = x^{\log_x 2}$$

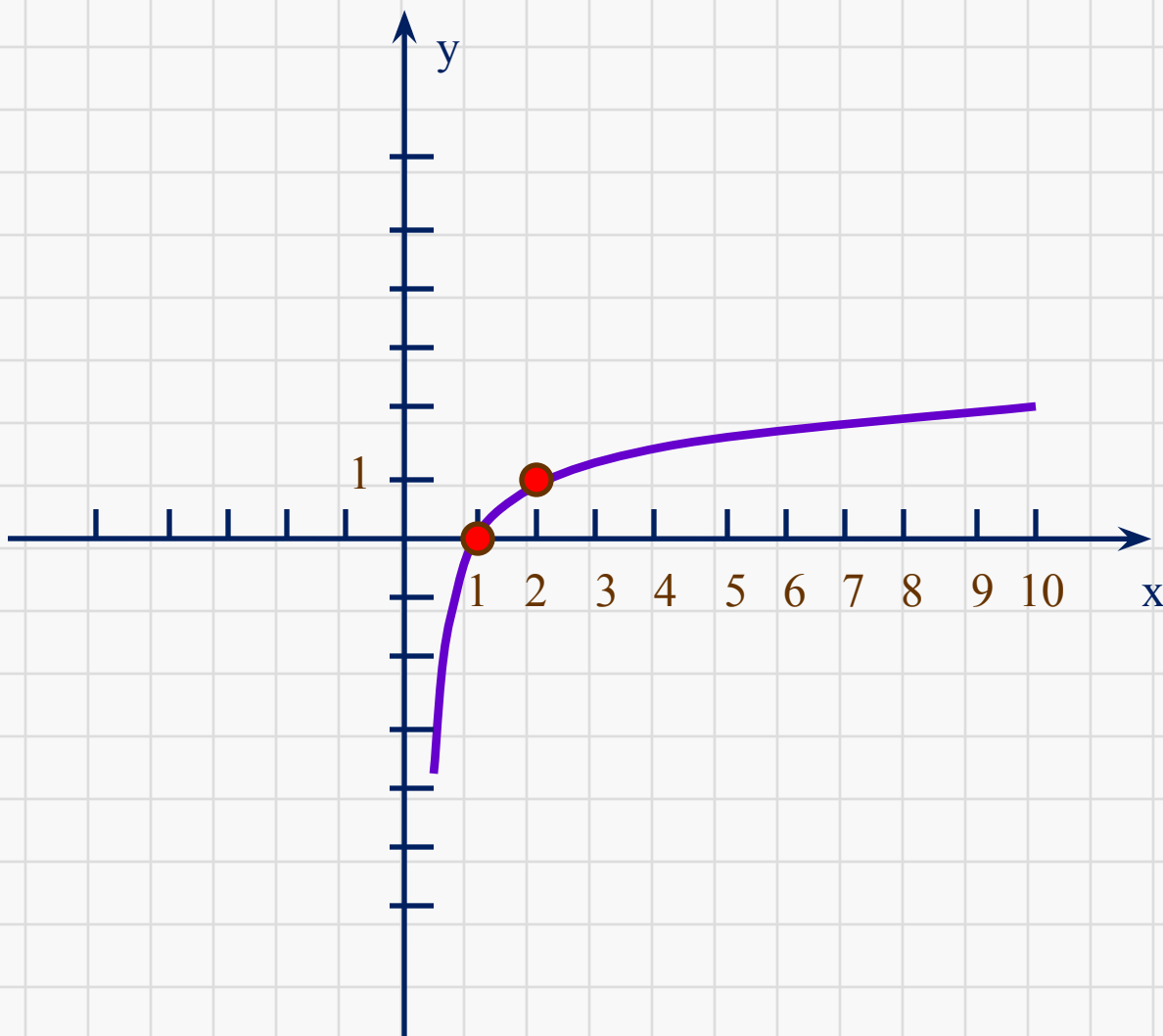
$$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

учитывая, что $a^{\log_a c} = c$, строим график $y=2$



Задание № 7-А.

Преобразование графиков функции



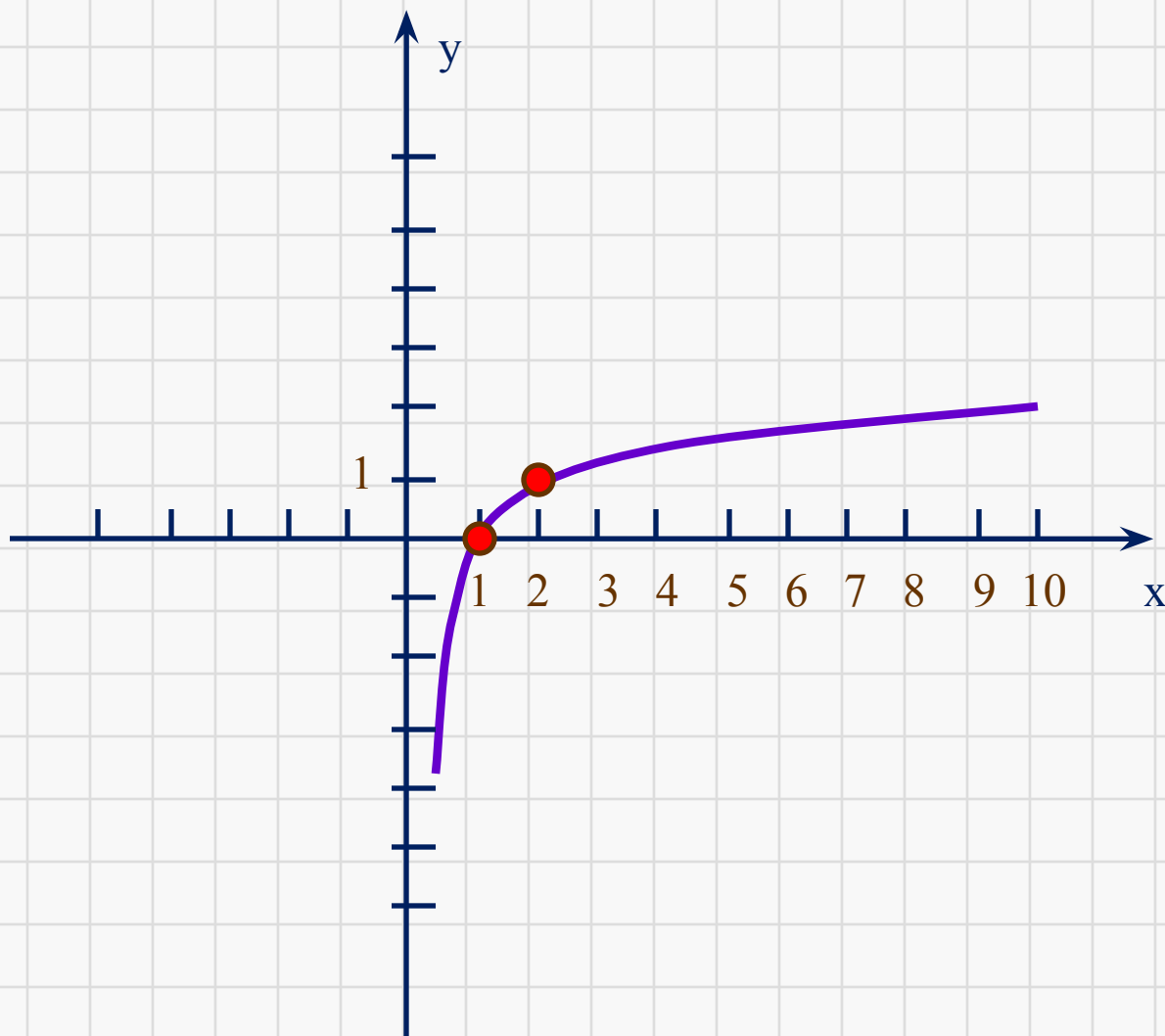
$$y = \log_2 x + 2$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

Задание № 7-Б.

Преобразование графиков функции



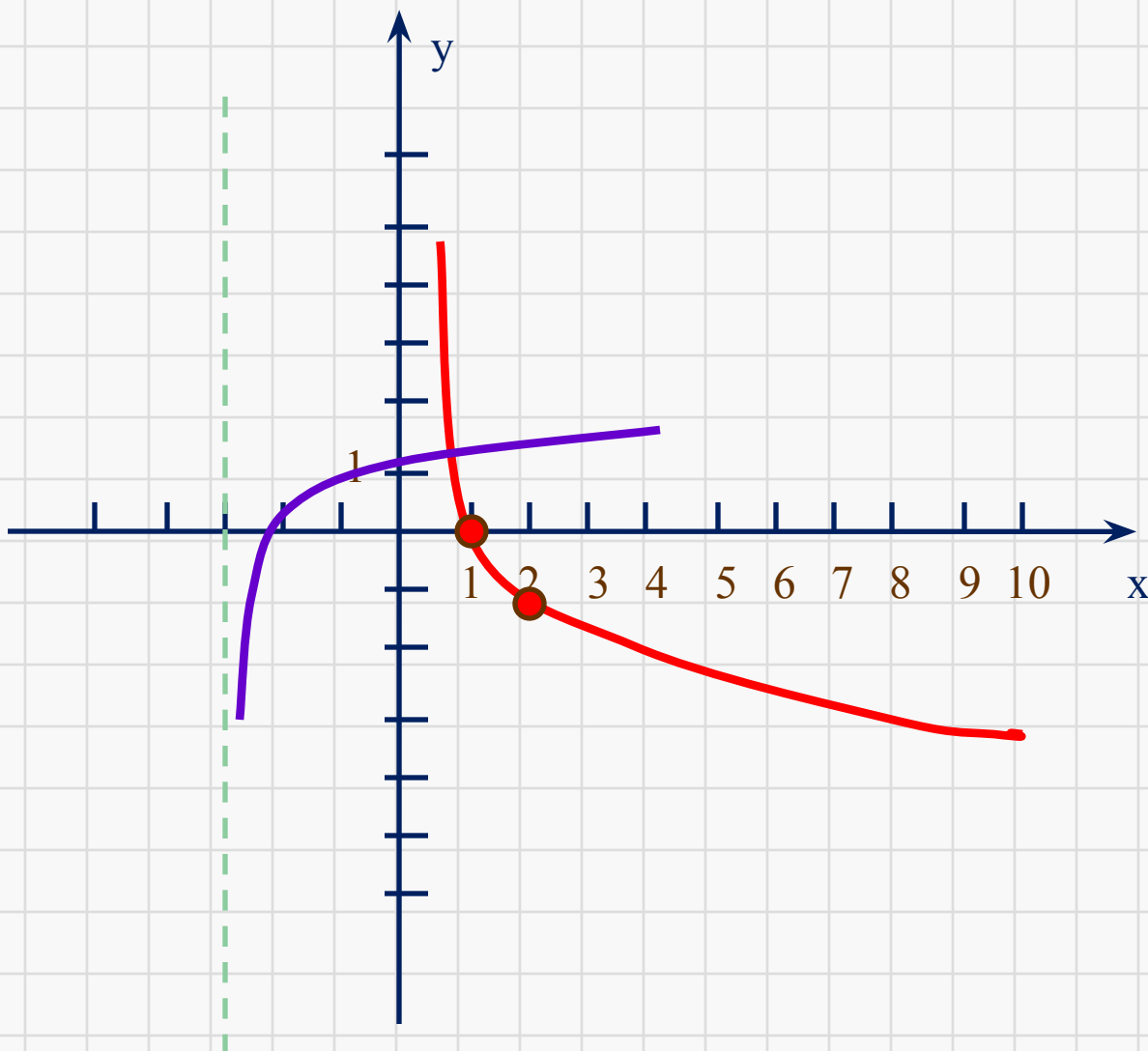
$$y = \log_2(x+2)$$

$$D(y) = (-2; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

Задание № 7-В.

Преобразование графиков функции



$$y = \log_{0.5}(x+3)$$

$$D(y): (-3; +\infty)$$

$$E(y): (-\infty; +\infty)$$

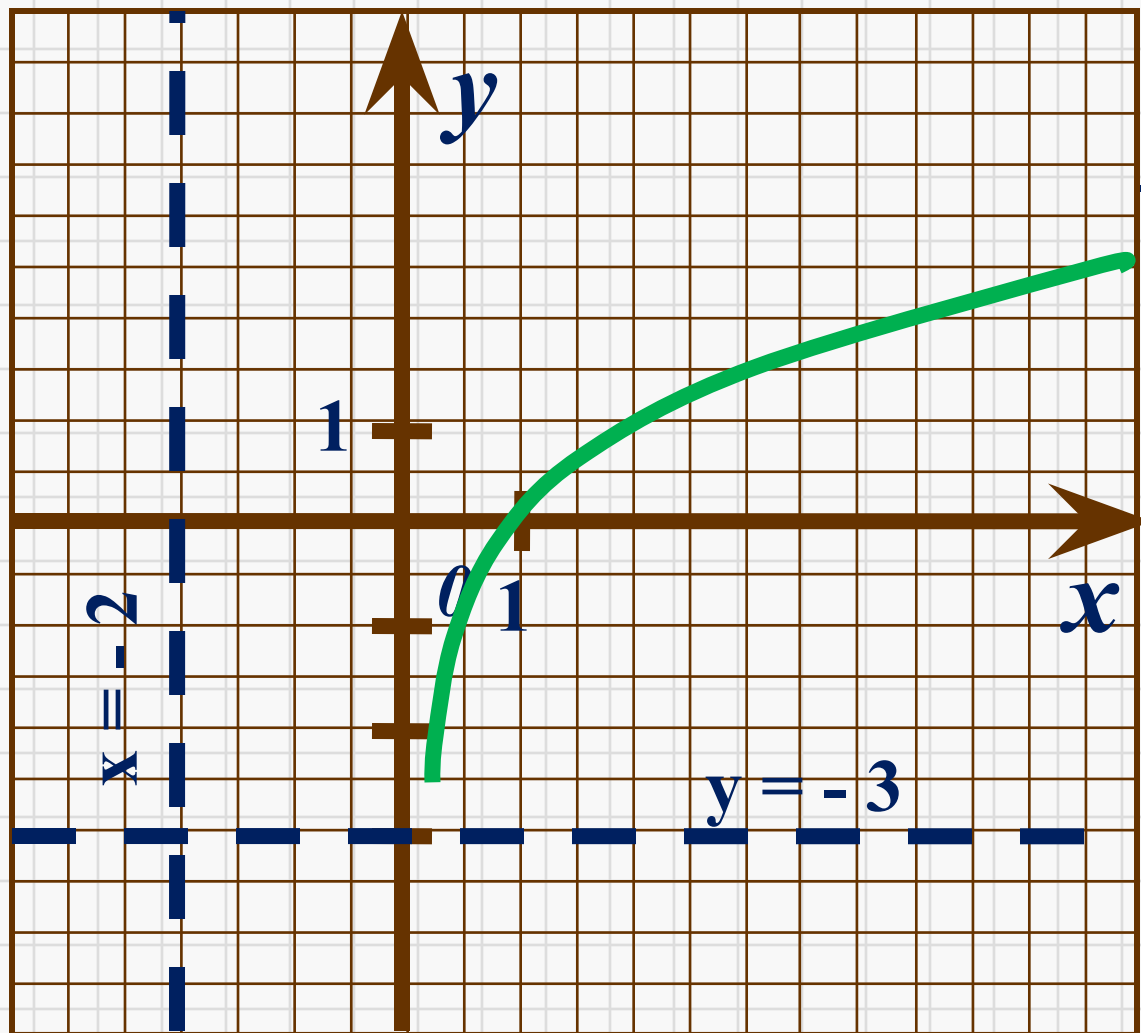
$$y = -\log_{0.5}(x+3)$$

$$D(y) = (-3; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

Задание № 8. Постройте графики функций:

$$y = \log_2(x + 2) - 3$$



Самостоятельно.

$$y = \log_2(-x)$$

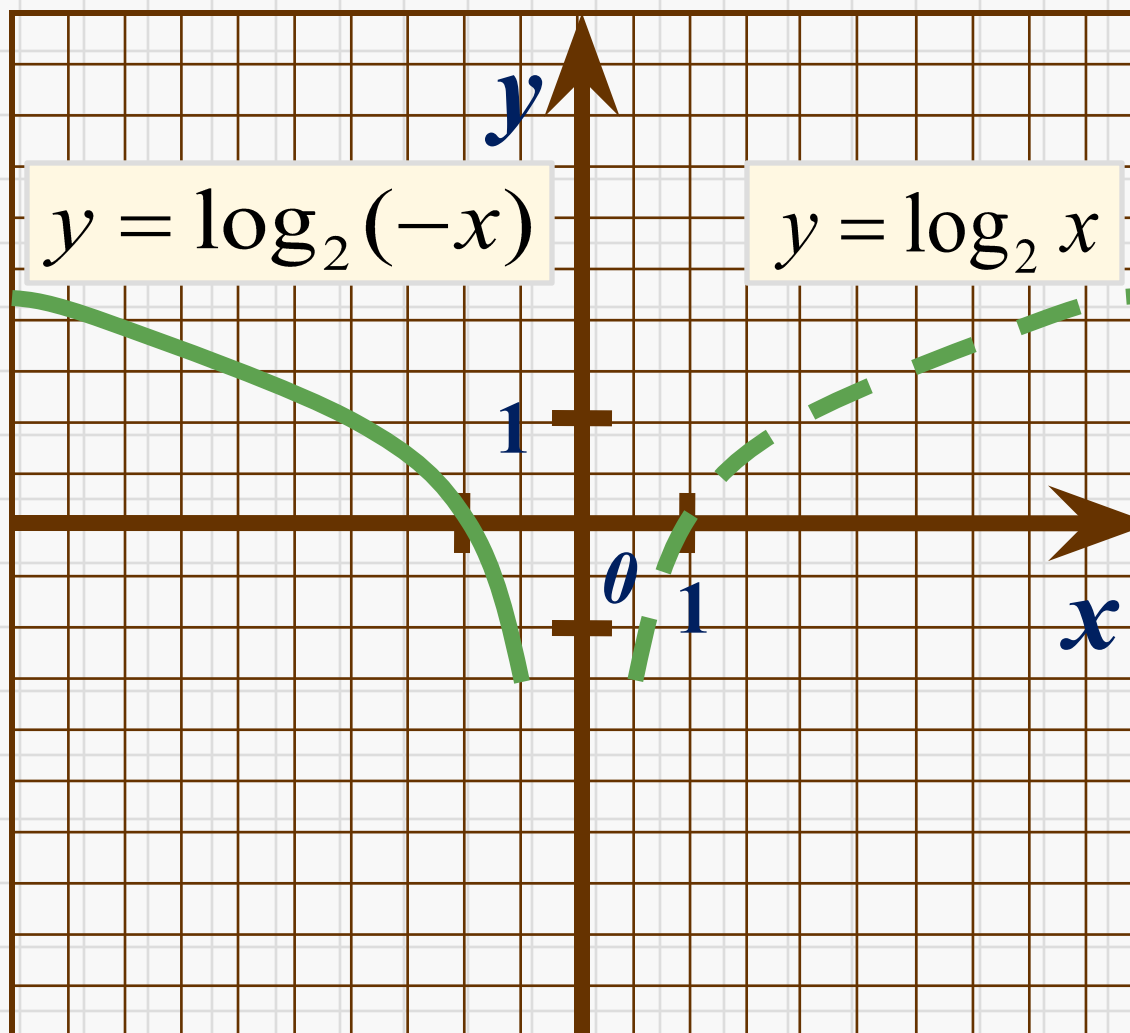
Проверить!

$$y = -3 \log_2 \frac{x}{2}$$

Проверить!

Проверка:

$$y = \log_2(-x)$$





Блиц - опрос.
Отвечать только «да» или «нет»

- ✓ **Ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции.**
- ✓ **Графики показательной и логарифмической функций симметричны относительно прямой $y = x$.**
- ✓ **Область определения логарифмической функции – вся числовая прямая, а область значений этой функции – промежуток $(0, +\infty)$.**
- ✓ **Монотонность логарифмической функции зависит от основания логарифма.**
- ✓ **Не каждый график логарифмической функции проходит через точку с координатами $(1;0)$.**



Блиц - опрос.
Отвечать только «да» или «нет»

- ✓ **Логарифмическая кривая это та же экспонента, только по - другому расположенная в координатной плоскости.**
- ✓ **Выпуклость логарифмической функции не зависит от основания логарифма.**
- ✓ **Логарифмическая функция не является ни чётной, ни нечётной.**
- ✓ **Логарифмическая функция имеет наибольшее значение и не имеет наименьшего значения при $a > 1$ и наоборот при $0 < a < 1$.**

Проверка: Да, да, нет, да, нет, да, нет, да, нет