12.7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим интегралы, у которых один или оба предела интегрирования бесконечны, или когда функция не ограничена на отрезке интегрирования.

Такие интегралы называются несобственными.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)

Пусть функция *y=f(x)* определена и интегрируема на произвольном отрезке [*a*,*t*].

Т.е. для *t>a* определена функция

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$$

Несобственным интегралом

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

от функции y=f(x) на полуинтервале $[a,+\infty)$

называется предел функции Ф(t) при $t \to \infty$

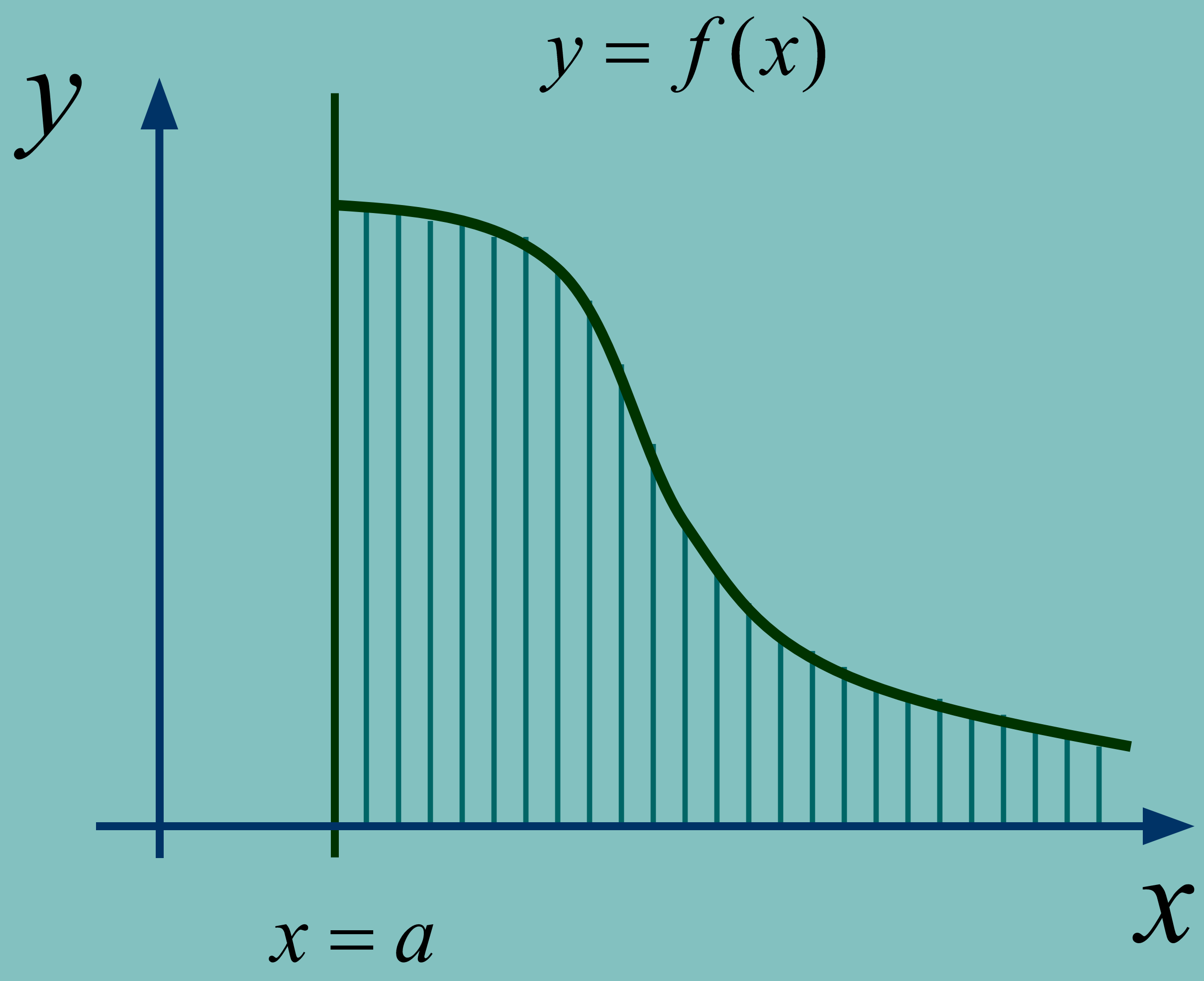
$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx}$$

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся к данному пределу.

Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла основан на геометрической интерпретации определенного интеграла на отрезке [a,t].

Это площадь бесконечной области, ограниченной сверху неотрицательной функцией $f(x)$, снизу – осью x, слева – прямой $x=a$.


$y = f(x)$
y
x
$x = a$

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Решение.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^t\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$$

Аналогично можно определить несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, b]$

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx}$$

Рассмотрим несобственный интеграл на интервале $(-\infty, +\infty)$

Пусть для некоторого числа a **несобственные интегралы**

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad и \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

- сходятся. Тогда положим

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **тоже сходится.**

Если хотя бы один из интегралов в левой части расходится, то будет расходится и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$

Решение.

Исследуем на сходимость интегралы

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx \quad и \quad \int_{0}^{+\infty} e^x dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left(e^0 - e^t\right) = 1$$ **- сходится.**

$$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} e^x dx = \lim_{t\to\infty}\left(e^t - 1\right) = +\infty$$ **- расходится.**

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$ **- расходится.**

В рассмотренных примерах сначала с помощью первообразной вычислялся интеграл по конечному промежутку, а затем осуществлялся переход к пределу.

Если для функции y=f(x) существует первообразная F(x) на всем промежутке интегрирования

$$[a,+\infty)$$

то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a) = F(x)\Big|_a^t$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл существует только в том случае, если существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty)$$

И тогда можно записать:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a)}$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty)$$

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

Решение.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{2}^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \ln\sqrt{3}$$

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (2 рода)

Пусть функция *y=f(x)* непрерывна, но неограничена на полуинтервале [*a,b)*. Для определенности положим, что она ограничена и интегрируема на любом отрезке

$$[a, b-\delta]$$

$$0 < \delta < b-a$$

но неограничена в любой окрестности точки b или на промежутке $[b-\delta, b]$

Несобственным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx$$

от функции y=f(x) на полуинтервале $[a,b)$

называется предел

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

где $\delta > 0$

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся.

Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Точка b называется особой точкой.

Аналогично можно ввести понятие несобственного интеграла от функции *y=f(x)* непрерывной но неограниченой на полуинтервале (*a,b*]:

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx}$$

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Решение.

Особая точка *x=0*.

$$\int_{\delta}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\delta}^{1} = 2(1-\sqrt{\delta}\,)$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\delta\to 0} 2(1-\sqrt{\delta}\,) = 2$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.

Если функция y=f(x) неограничена при x=C, где

$$C \in (a,b)$$

то интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

тоже называется несобственным:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.

Если a и b – особые точки, т.е. функция y=f(x) неограничена и интегрируема на интервале

$$(a,b)$$

то несобственный интеграл определяется как

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

Где C – произвольная точка на (a,b).

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Решение.

Особые точки: ***x=-1, x=1*.**

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{-1+\delta}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{0}^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\delta}^{0} + \lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1+\delta} =$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}\arcsin(-1+\delta) + \lim_{\delta\to 0}\arcsin(1-\delta) =$$

$$= -\arcsin(-1) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Пусть функция y=f(x) интегрируема на всем промежутке [a,b], причем b – особая точка. Если существует первообразная F(x), имеющая предел в особой точке x=b или непрерывная на отрезке [a,b], то для вычисления несобственного интеграла имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx$$

Решение.

Особая точка *x=0*, однако первообразная функции

$$3x^{\frac{1}{3}}$$

непрерывна в этой точке, поэтому данный интеграл существует:

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{1} = 3(1-(-1)) = 6$$