6.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами выражается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА

Если функция α(x) -бесконечно малая величина при

$x \to x_0$ **или при** $x \to \infty$

то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$

есть величина бесконечно большая при

$x \to x_0$ **или при** $x \to \infty$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Проведем доказательство для случая $x \to x_0$

По условию, $\alpha(x)$ **-бесконечно малая величина при**

$x \to x_0$ **, следовательно**

для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$**, найдется такое число** $\delta>0$**, что при всех** x**, таких что** $|x-x_0|<\delta$**, выполняется неравенство:**

$$|\alpha(x)| < \varepsilon$$

Это равносильно неравенству: $$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Следовательно, $\left|f(x)\right| > M$, где

$$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \qquad M = \frac{1}{\varepsilon}$$

Это означает, что $f(x)$

является бесконечно большой величиной

при $x \to x_0$

Справедлива и обратная теорема:

ТЕОРЕМА

Если функция α(x) -бесконечно большая величина при

$x \to x_0$ **или при** $x \to \infty$

то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$

есть величина бесконечно малая при

$x \to x_0$ **или при** $x \to \infty$

ПРИМЕР.

Функция $y = \cos x$

является бесконечно малой величиной при $x \to \frac{\pi}{2}$

Тогда функция $y = \frac{1}{\cos x}$

является бесконечно большой величиной при $x \to \frac{\pi}{2}$