НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И Л. Н.О

Функциональный анализ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **Нормированное пространство, X – это упорядоченная пара <X, || . || >, где || . || - норма в л.п. X**

Норма, || . || - это ф**ункция** || . ||: $X \to [0, +\infty) \mid \forall$ $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$)

1° $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2° $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

3° $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$

ПРИМЕРЫ НОРМ

1. X=B[a, b] (X=C[a, b])

$$\forall x \in X : \|x\| = \sup_{t\in[a,b]} | x(t) |$$

2. X=L_1[a, b]

$$\forall x \in X : \|x\|_1 = \int_a^b | x(t) | dt$$

3. X=L_2[a, b]

$$\forall x \in X : \|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b | x(t) |^2 \, dt}$$

$$X = L_p[a,b], \; p \geq 1$$

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}$$

4. X=l_1

$$\forall x \in X : \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |$$

ПРИМЕРЫ НОРМ

5. X=l_2.

$$\forall x \in X: \ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$$

6. X=R^n; C^n.

$$\forall x \in X: \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \qquad \|x\|_{\sup} = \sup_{k=1,n} |x_k|$$

7. X- л.п. ограниченных последовательностей $\forall x \in X: \ \|x\| = \sup_{k=1,\infty} |x_k|$

ПРИМЕРЫ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ

1) $X = C[0,1]$

$x_0(t) = 2t^2 + t - 6$

$\|x_0\| = ?$ *Решение* : $\|x_0\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\, 2t^2 + t - 6 \,| = 6$

2) $X = C^3[0,1]$

$x_0(t) = 2t^2 + t - 6$

$\|x_0\| = ?$

Решение : $\|x_0\| = \sup\limits_{[0,1]} |\, x_0(t)\,| + \sup\limits_{[0,1]} |\, x_0{}'(t)\,| + \sup\limits_{[0,1]} |\, x_0{}''(t)\,| + \sup\limits_{[0,1]} |\, x_0{}^{(3)}(t)\,| =$

$= 6 + 5 + 4 + 0 = 15$

3) $X = L_2[0,\pi],\ x_0(t) = t\cdot\cos t$

$$\|x_0\| = \sqrt{\int_0^\pi |\, t\cos t\,|^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi t^2 \cos 2t\, dt} = \sqrt{\frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2}\int_0^\pi t \sin 2t dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}}$$

$$4)\ X = l_1;\ \ x_0 = \left\{ \frac{(2i)^{n-1}}{3^{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\|x_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} | x_k | = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{2^{-1}}{3^1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{3}$$

$$5)\ X = l_\infty - \text{мн.огранич. послед} - \text{тей};\ x_0 = \{(-i)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\|x_0\| = \sup_{n=1,\infty} | x_n | = \sup_{n=1,\infty} 1^n = 1$$

МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА Н.П.

Метрика в н.п.X – неотрицательная функция

$\mathbf{d}(x,y) = || x - y || : \mathbf{X \times X} \to \mathbf{[0, +\infty)}$ $\forall$ x,y,z $\in$ X

1° $\mathbf{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2° $\mathbf{d}(x,y) = \mathbf{d}(y,x)$

3° $\mathbf{d}(x,y) \le \mathbf{d}(x,z) + \mathbf{d}(z,y)$

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, \; x_0 \in X$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся*** к x_0: $x_n \to x_0$, если $\mathbf{d}(x_n , x) \to 0$, $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \|x_n - x_0\| \to 0, \; n \to \infty$$

ПРИМЕРЫ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к $x_0(t)\equiv 0$ в н.п. X ?

1. X=C[0,1], $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{t^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left\|t^n - 0\right\| = \sup\limits_{[0,1]} | t^n | = 1 \not\to 0,\ n \to \infty$

 не сходится

2. X=C[0; 0,7], $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{t^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

сходится

3. X=l_1; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n^2}; \ldots; \frac{1}{n^2}}_{n}; 0; \ldots 0; \ldots)$

сходится

4. X=$L_2[0,+\infty)$; $x_n(t) = e^{-nt}$

$$\left\|e^{-nt} - 0\right\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} | e^{-nt} - 0 |^2\, dt} = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2nt} dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0,\ n \to \infty$$

   сходится

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Последовательность $\{x_n\}$ называется ***фундаментальной***, если при
  $\forall\ n,m \to \infty \Rightarrow \mathbf{d}(x_n, x_m) \to 0$
- ***Полным*** пространством называется м.**п.**, в котором $\forall$ фундаментальная последовательность сходится (к некоторому $x_0 \in X$)
- Полное нормированное пространство называется ***банаховым***

ПРИМЕРЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пример 1. Пространство $C([a;b])$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)|$ является полным.

Доказательство Если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики , то при любом фиксированном $x \in [a;b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Очевидно $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ по метрике. Действительно, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n,m \geqslant N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in [a;b]$. Зафиксируем x и перейдём к пределу при $m \to \infty$, в пределе для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ получим неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. Ранее было доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a;b]$. Полнота пространства $C([a;b])$ доказана.

ПРИМЕР 2.

Пример 2. Пространство ограниченных на отрезке $[a;b]$ функций с sup-нормой является банаховым

Пример 3. Множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел является полным нормированным пространством с sup - нормой

Пример 4. В множестве функций, определённых и непрерывных на отрезке $[-1;1]$, введём норму по формуле:

$$\|f(x)\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx,\ x \in C[-1;1]$$

Покажем, что такое н.п. не является полным:

рассмотрим последовательность:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in \left[-1; -\frac{1}{n}\right], \\ nx, & \text{если } x \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right], \\ +1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$$

Очевидно, для любых n и p

$$\int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - \operatorname{sgn} x|\, dx + \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x - f_n(x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n},$$

и поэтому последовательность непрерывных функций фундаментальна относительно своей нормы

Покажем, что она сходится к разрывной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1; 1]$. И во множестве непрерывных функций предела нет.

Предположим противное: пусть последовательность сходится к непрерывной функции $g(x)$, $x \in [-1; 1]$.

Тогда

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = 0,$$

причём функция $F(x) = f(x) - g(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[-1; 1]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, $g(x) = f(x)$ для любого $x \neq 0$ из отрезка $[-1; 1]$, что противоречит предположению, что $g(x)$ непрерывна на $[-1; 1]$.

ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1) Согласованность линейной и метрической структуры в н.п.

1.1. Алгебраические операции в н.п. непрерывны: если $(x_n \to x,\ y_n \to y,\ \lambda_n \to \lambda) \Rightarrow$

а) $x_n + y_n \to x + y$

б) $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

1.2. Норма непрерывна: $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

1.3. Шар $B_{x0,R} = x_0 + R*B_{\theta,1}$.

$$B_{x_0,R} = \{x \in X : \|x - x_0\| < R\} - \textit{открытый шар}$$

$$\overline{B}_{x_0,R} = \{x \in X : \|x - x_0\| \le R\} - \textit{замкнутый шар}$$

НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА И МИНКОВСКОГО

- если ($p,q > 1$ & $1/p + 1/q = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$) тогда:

1) $||xy||_1 \le ||x||_p \, ||y||_q$.
2) $(p \ge 1) \Rightarrow ||x + y||_p \le ||x||_p + ||y||_p$.

КРИТЕРИЙ БАНАХОВОСТИ

$<X, || \, . \, ||_X>$ банахово (1) $\Leftrightarrow$
(X - замкнутое п/п в б.п. $<Y, || \, . \, ||_X>$) (2) $\Leftrightarrow$
($\forall$ абсолютно сходящийся ряд в X сходится)
(3)

<u>Доказательство:</u>

$\Leftarrow$(1)?

Y=X! (1)$\Rightarrow$? **X$\supset\{x_n\}$ фундаментальна** =(X$\subseteq$Y)$\Rightarrow$

Y$\supset\{x_n\}$ фундаментальна =(Y - б.п.)$\Rightarrow$

$x_n \to x \in Y$ =(X замкнуто, а X$\supset\{x_n\}$)$\Rightarrow$

$x_n \to x \in X$ =(определение б.п.)$\Rightarrow$ X б.п.!

(X – ЗАМКНУТОЕ П/П В Б.П. $\langle Y, \|\,.\,\|_Y \rangle$) $\Longrightarrow$ $\langle X, \|\,.\,\|_X \rangle$ БАНАХОВО

(2)$\Rightarrow$? Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится,

т.е. сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ из норм членов исходного ряда.

Рассмотрим $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$; при $m>n$ $s_m - s_n = x_{n+1} + \ldots + x_m$

=(неравенство треугольника)$\Rightarrow$ $\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \to 0 (m, n \to \infty)$

в силу критерия Коши для сходящегося числового ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ =(определение фундаментальной последовательности)$\Rightarrow$

$\{s_n\}$ фундаментальна =(X – б.п.)$\Rightarrow$ $s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$!

$\Leftarrow$(2)? Пусть **X$\supset$\{x$_n$\} фундаментальна**.

Выберем из $\{x_n\}$ «быстро сходящуюся» подпоследовательность $\{x_{n(k)}\}$:

(*) $\qquad \|x_{n(k+1)} - x_{n(k)}\| \le \dfrac{1}{2^k}$, k=1,2,… ,

(для $\dfrac{1}{2^k} > 0 \ \exists\ n_k |\ n,m \ge n_k \ \|x_n - x_m\| \le \dfrac{1}{2^k}$). Рассмотрим ряд

(**) $\qquad x_{n(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n(k+1)} - x_{n(k)})$,

последовательность частичных сумм которого

$s_N = x_{n(1)} + (x_{n(2)} - x_{n(1)}) + \ldots + (x_{n(N+1)} - x_{n(N)}) = x_{n(N+1)}$,

т.е. сходимость ряда (**) эквивалентна сходимости последовательности $\{x_{n(k)}\}$.

(*) =(мажорантный признак сходимости рядов с неотрицательными членами)$\Rightarrow$

ряд (**) абсолютно сходится =(условие теоремы)$\Rightarrow$

(**) сходится =(доказанная выше эквивалентность)$\Rightarrow$ $x_{n(k)} \to x \in X$.

$x_n \to x$? Фиксируем $\varepsilon>0$ =($\{x_n\}$ фундаментальна)$\Rightarrow$

$\exists\, n_\varepsilon \mid (n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2})$ =($n(k)$ строго возрастает & $x_{n(k)} \to x$)$\Rightarrow$

$\exists$ номер $k \mid n_k \geq n_\varepsilon$ & $\|x_{n(k)} - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ =(неравенство треугольника)$\Rightarrow$

$\|x_n - x\| = \|x_n - x_{n(k)}\| + \|x_{n(k)} - x\| \leq \varepsilon$ =(определение сходящейся последовательности)$\Rightarrow$

$\mathbf{x_n \to x \in X}$ **=(определение б.п.**.)$\Rightarrow$ X – б.п.♣

Теорема.

<B(T), || . ||$_{sup}$> - банахово пространство.

Доказательство:

$X = B(T)$ – *множество функций, ограниченных на компакте* $T \Rightarrow$

$\forall x \in B(T)\ \sup\limits_{t\in T} |x(t)| < +\infty;\ \|x\|_{\sup} = \sup\limits_{t\in T} |x(t)|$

Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$:

$\|x_n - x_m\| \to 0,\ n, m \to \infty;$

Фикс. $t_0 \in T$: *числовая последовательность* $\{x_n(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ – *фундам. послед.*

т.к. R – *банахово пр-во, то* $\{x_n(t_0)\}$ *сходится*: $x_n(t_0) \to a_0,\ |a_0| < +\infty.$

Тогда, $\forall t_0 \in T\ \ x_n(t_0) \to a_0,\ |a_0| < +\infty.$ *Следовательно,*

последовательность $\{x_n(t)\}$ *сххдится поточечно к* $x(t)$: $x_n(t) \to x(t),\ t \in T;$

где $x(t) = a_0,\ t = t_0 \in T;\ |x(t)| \le \sup\limits_{t_0\in T} |a_0| < +\infty \Rightarrow x(t) \in B(T);$

Докажем сходимость по норме:

$\forall t \in T:\ |x_n(t) - x(t)| \le \sup\limits_{t\in T} |x_n(t) - x(t)| = |x_n(t_0) - a_0| \to 0,\ n \to \infty$

переходя к sup *по* $t \in T$, *получим:*

$\|x_n - x\| \to 0,\ n \to \infty.$

Таким образом, фундам. посл-ть сходится $\Rightarrow B(T)$ – *банахово пр-во.*

СЛЕДСТВИЯ

1) l_∞ - б.п.;

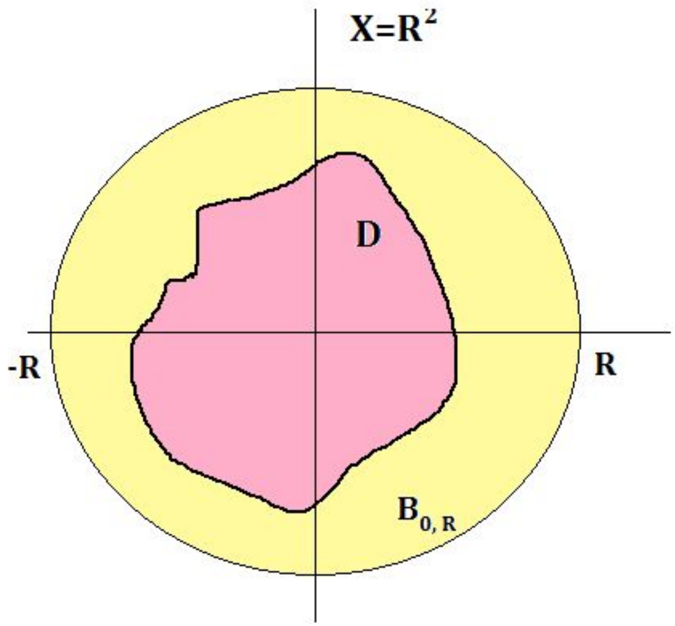
2) если T – компактное множество $\Rightarrow$ $<C(T), || . ||_{sup}>$ - б.п.;

3) C[a, b] – сепарабельное *(в нем существует счетное, всюду плотное множество)*, бесконечномерное б.п.

Лемма Рисса о почти перпендикуляре.

(Пусть X н.п., X ≠ Y-замкнутое п/п в X, ε>0), тогда (∃ p∈X | ||p|| = 1 & dist(p,Y) ≥ 1-ε).

Определение. Множество $D \subseteq X$ является ограниченным, если содержится в шаре конечного радиуса:



$$\exists R > 0 : D \subset B_{x_0, R} \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < R$$

ПРИМЕРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

$$1)\ X = C[0,1];$$

$$D = \{x \in X : x(t) = C_1 + C_2 t^2, \,|C_1| \le 2;\, |C_2| \le 1\} \subset Sp(1, t^2)$$

Проверим ограниченность:

$$\forall x \in D : \|x - \theta\| = \|x\| = \|C_1 + C_2 t^2\| \le |C_1| + |C_2| \cdot \|t^2\| =$$

$$= (\|t^2\| = \sup_{[0,1]} |t^2| = 1) = |C_1| + |C_2| \le 2 + 1 = 3 \Rightarrow$$

$$x \in \overline{B}_{\theta,3} \Rightarrow D \subset \overline{B}_{\theta,3} \Rightarrow D - \text{ограничено в } X$$

$$2)\ X = L_1[0,1];\ D = \{x \in X : |x(t)| < 2\}$$

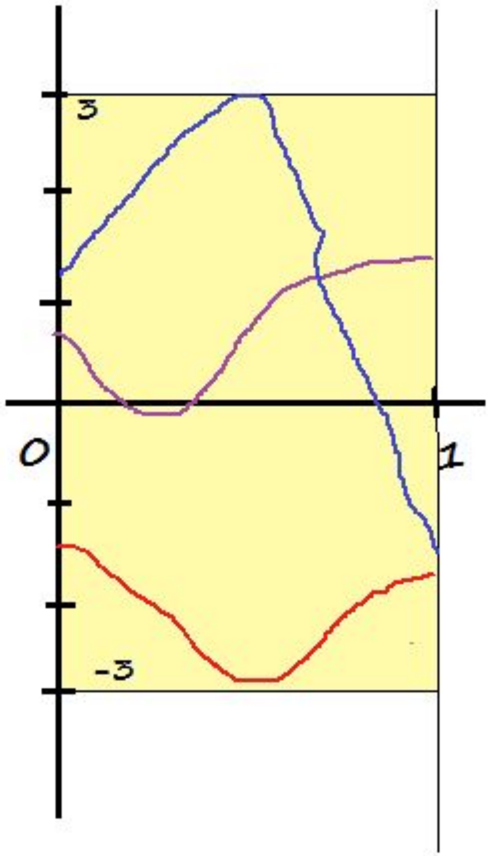
$$\forall x \in D : \|x - \theta\|_1 = \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\,dt < 2 \cdot \int_0^1 dt = 2 \Rightarrow$$

$$x \in B_{\theta,2} \Rightarrow D \subset B_{\theta,2} \Rightarrow D - \text{ограничено в } X$$

ПРИМЕРЫ ШАРОВ

шар $\overline{B}_{0,3}$

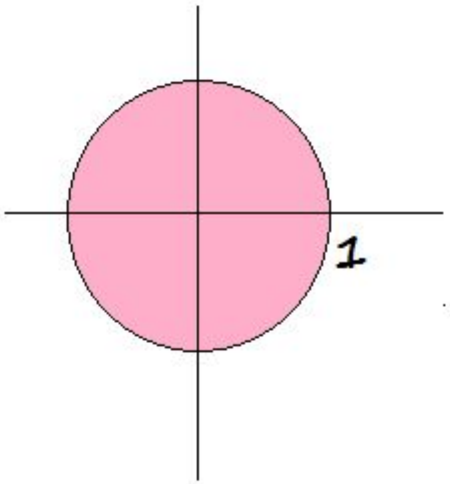
в $C[0,1]$



шар $\overline{B}_{0,1}$ в R^2

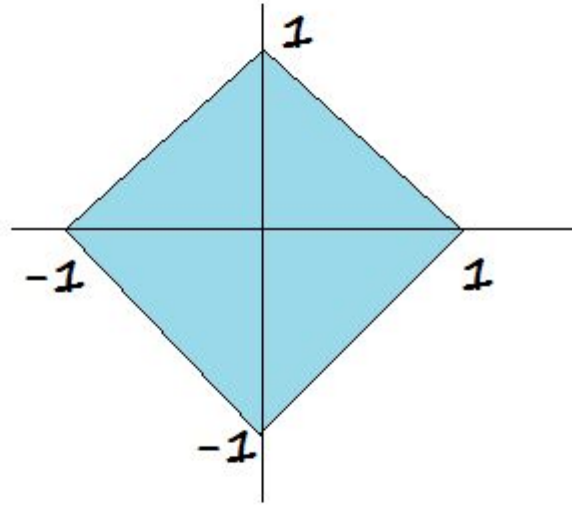
1. $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$

$\|x\| \le 1$



2. $\|x\| = |x_1| + |x_2|$

$\|x\| \le 1$



ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X,Y-н.п.А: X→Y – линейный оператор

Определение. Оператор А называется ограниченным, если он всякое ограниченное множество переводит в ограниченное:

$$D \subseteq B_{\theta_X, r} \Rightarrow A(D) \subseteq B_{\theta_Y, R}$$

Определение.

Оператор А называется непрерывным, если

$$(\forall \{x_n\}: x_n \to x_0,\ n \to \infty) \Rightarrow (A(x_n) \to A(x_0),\ n \to \infty)$$

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1) $X = Y = C[0,1];$

$(Ax)(t) = a(t) \cdot x(t),\ t \in [0,1]$

$a(t) \in C[0,1]$

2) $X = Y = L_1[0,1]$

$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t,s) \cdot x(s)\, ds,\ k(t,s) \in L_1[0,1]^2$

3) $X = Y = C(-\infty;+\infty)$

$(Ax)(t) = x(t+h),\ h \in R$

4) $X = Y = l_2;$

$Ax = (0, 0, x_1, x_2, \ldots., x_n, \ldots)$

КРИТЕРИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть A:**$\langle X, \|\cdot\|_X\rangle \to \langle Y, \|\cdot\|_Y\rangle$ - л.о., тогда**

(А непрерывен)$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$(А непрерывен в т. θ)$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

(А ограничен)$\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$ $(\exists M > 0 : \|Ax\| \overset{(4)}{\le} M \cdot \|x\|, \forall x \in X)$

<u>Доказательство:</u>

$1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$? $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$? - Очевидно!

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$? $\mathbf{x_n \to x}$ =(непрерывность алгебраических операций в X)$\Rightarrow$ $x_n - x \to \theta_X$ =(2°)$\Rightarrow$ $A(x_n - x) \to A\theta_X = \theta_Y$ =(А - л.о.)$\Rightarrow$

$Ax_n - Ax \to \theta_Y$ =(непрерывность алгебраических операций в Y)$\Rightarrow$

$\mathbf{Ax_n \to Ax}$ **$\Leftarrow$(определение н.о.)$\Rightarrow$** 1°!

- $2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 2^\circ$?
- $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$? Предположим противное:

[$X \supset D$ - ограниченное, но $A(D)$ не ограничено] =(определение ограниченного множества)$\Rightarrow$

$A(D) \not\subset B_{\theta,n}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ =(определение $\subseteq$)$\Rightarrow$ $A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n}) \neq \varnothing$ $\forall n \in \mathbf{N}$ =(аксиома выбора)$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $y_n \in A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n})$ =(определение образа $A(D)$)$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $x_n \in D$ | $y_n = Ax_n \in A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n})$ =(определение дополнения $Y \setminus B_{\theta,n}$) $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $x_n \in D$ | $\|Ax_n\| \geq n$ =(т.к. $\{x_n\} \subseteq D$ - ограничено)$\Rightarrow$ $z_n = x_n/n \to \theta$ при $n \to \infty$, но $\|Az_n\|$ =($z_n = x_n/n$)= $\|A(x_n/n)\|$ =(линейность о. A и полуоднородность нормы)= $\|Ax_n\| / n \geq$($\|Ax_n\| \geq n$)≥ 1, т.е. Az_n не сходится к θ_Y - противоречит 2° =(не $3^\circ \Rightarrow$ не 2° эквивалентно $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$)$\Rightarrow$ 3° !

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$? Предположим противное: не 4°, т. е. $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ x_n \neq \theta$ (?) | $\|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|$ =(невырожденность и полуоднородность нормы и линейность о. A)$\Rightarrow$ $\left\|A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| > n \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = n$ =($\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ - ограничена, но $A\left(\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}\right)$ не ограничена)$\Rightarrow$ противоречит 3° =(не 4° $\Rightarrow$ не 3° эквивалентно $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$)$\Rightarrow$ 4° !

$4^\circ \Rightarrow 2^\circ$? $\mathbf{x_n} \to \boldsymbol{\theta}_\mathbf{X}$ $\Leftarrow$(определение сходящейся послед -ти)$\Rightarrow$ $\|x_n\|_X \to 0$ $=(\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X)\Rightarrow$

$0 \le \|Ax_n\|_Y \le M\|x_n\|_X \to 0$

=(лемма о зажатой посл-ти)$\Rightarrow$ $\|Ax_n\|_Y \to 0$

$\Leftarrow$(определение сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $\mathbf{Ax_n} \to \boldsymbol{\theta}_\mathbf{Y}$ $\Leftarrow$

(определение непрерывного в θ о.)$\Rightarrow 2^\circ$

ЧТД

НОРМА Л.Н.О.

A:X→Y- л.н.о.

Для линейных операторов <u>непрерывность</u> эквивалентна его <u>ограниченности</u>

Оператор А – ограничен

$\Leftrightarrow \exists \text{константа ограниченности } M:$

$\forall x \in X : \|Ax\| \le M \cdot \|x\|$

Наименьшей из всех констант ограниченности называется <u>нормой</u> оператора А $(\|A\|)$

$$\Rightarrow \forall x \in X \ \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМЫ А

- **Теорема** *Формулы для вычисления нормы л.н. о.* $A \in \mathbf{N}(X,Y)$:

$\|A\| =$ (α) $\sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \le 1\} =$

(β) $\sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\} =$

(γ) $\sup\{\|Ax\|_Y / \|x\|_X : x \ne \theta\}$.

Примеры: Вычислить норму оператора

1) $X = Y = C[a,b]$

$$(Ax)(t) = a(t)\cdot x(t),\ a(t) \in X$$

2) $X = Y = C[a,b]$;

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА

$X = Y = C[a, b]; (Ax)(t) = a(t)\cdot x(t),\ t\in[a,b]$

1) $\exists M > 0 : \| Ax \| \le M \| x \|,\ \forall x\in X$

$\forall t\in[a,b] : |(Ax)(t)| = |a(t)\cdot x(t)| = |a(t)|\cdot|x(t)| \le |a(t)|\cdot \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = |a(t)|\cdot\| x \|$

переходя к $\sup$ *по* $t\in[a,b]$, *получим*:

$\| Ax \| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|\cdot\| x \| \Rightarrow\ M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)| \Rightarrow \| A \| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$

2) $\| Ax \| \le \| A \|\cdot\| x \|,\ \forall x\in X$

задача: *показать, что* $\| A \| \ge \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$

возьмём $x_0(t) : \| Ax_0 \| = M;\ \| x_0 \| = 1$

$x_0(t) \equiv 1;\ (Ax_0)(t) = a(t) \Rightarrow \| x_0 \| = 1;\ \| Ax_0 \| = M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)| \Rightarrow$

$\sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)| \le \| A \|$

Исходя из 1) *и* 2), *получим*: $\| A \| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$.

$$1.1.\quad X = Y = C[0,1];\ \left(Ax\right)(t) = \left(2t^2 + 1 - 6\right) \cdot x(t);$$

$$a(t) = 2t^2 + t - 6;\ \| a \| = \sup_{t\in[0,1]} | 2t^2 + t - 6 | = 6 \Rightarrow \| A \| = \| a \| = 6$$

$$1.2.\quad X = Y = C[0,1];\ \left(Ax\right)(t) = \frac{t^2}{t^2+1} \cdot x(1);\ \| A \| = ?$$

$$1)\ \forall t \in [0,1]\ | \left(Ax\right)(t) | = \left| \frac{t^2}{t^2+1} \cdot x(1) \right| = \left| \frac{t^2}{t^2+1} \right| \cdot | x(1) | \le \frac{1}{2} \cdot \sup_{t\in[0,1]} | x(t) | = 0,5 \cdot \| x \|$$

переходя к $\sup$ *по* $t \in [0,1]$, *получим* :

$$\| Ax \| \le 0,5 \cdot \| x \| \Rightarrow \| A \| \le 0,5;$$

$$2)\ \forall x \in X :\ \| Ax \| \le \| A \| \cdot \| x \|$$

$$x_0(t) = 1 : \| x_0 \| = 1;\ \| Ax_0 \| = 0,5; \Rightarrow \| A \| \ge 0,5$$

Из п. 1) *и* 2) *следует* : $\| A \| = 0,5.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА

$$X = Y = C[0,1]$$

$$(Ax)(t) = (3t^2 + t - 2) \cdot x(t)$$

$$\|A\| = \|3t^2 + t - 2\|_{C[0,1]} = \sup_{[0,1]} |3t^2 + t - 2| = 2$$

$$X = Y = C[0,1]$$

$$(Ax)(t) = \frac{t^2}{t^2+1} \cdot x(t)$$

$$\|A\| = \sup_{[0,1]} \left| \frac{t^2}{t^2+1} \right| = 0,5$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА

$X = Y = C[a,b]$

$(Ax)(t) = \int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds$

$1.\forall t \in [a,b] : |(Ax)(t)| = \left|\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds\right| \le \int_a^b |k(t,s)| \cdot |x(s)|\,ds \le \int_a^b |k(t,s)|\,ds \cdot \|x\|$

переходя к $\sup$ *по* $t \in [a,b]$, *получим*:

$\|Ax\| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds = M$

$2.\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \ \forall x \in X \Rightarrow \exists x_0 \in X :$

$\|x_0\| = 1 \wedge \|Ax_0\| = M$, *в качестве* $x_0(t)$ *можно выбрать функцию* $x_0(t) \equiv 1$

$(Ax_0)(t) = \int_a^b k(t,s)\,ds \Rightarrow \|Ax_0\| = \sup\limits_{[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds = M \Rightarrow$

$\|Ax_0\| \le \|A\| \cdot \|x_0\|$, *т.е.* $M \le \|A\|$

*Из п.*1 *и п.*2 $\Rightarrow \|A\| = M = \int_a^b |k(t,s)|\,ds$

пример: $X = Y = C[-1,1],\ (Ax)(t) = \int_{-1}^1 t^2 s^3\,x(s)\,ds$

$\|A\| = \sup\limits_{t\in[-1,1]} \int_{-1}^1 |t^2 s^3|\,ds = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |t^2| \cdot \int_{-1}^1 |s^3|\,ds = 2\int_0^1 |s^3|\,ds = 0{,}5$

СВОЙСТВА Л.Н.О.

Множество всех л.н.о. , действующих из X в Y, обозначим **N(X,Y).**

1)N(X,Y) нормированное пространство с $\|A\|$,

1.1. N(X,Y) – линейное пространство

1.2. N(X,Y) – метрическое пространство

1.3. $\|A\|$ удовл. аксиомам нормы

2) Если Y-б.п., то N(X,Y)-б.п.

3) A, B - л.н.о. $\Rightarrow$ BA - л.н.о. & $\|BA\| \le \|B\|\cdot\|A\|$.

4) $A \in \mathbf{N}(X) \Rightarrow A^n \in \mathbf{N}(X)\ \forall\ n \in \mathbf{N}$ & $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

5) Умножение л.н.о. *непрерывно*:
$(A_n \to A$ & $B_n \to B) \Rightarrow B_n A_n \to BA$.

6) Дистрибутивный закон для операторных рядов:
$(A_k, B, \sum A_k \in \mathbf{N}(X)) \Rightarrow B \sum A_k = \sum B A_k$.

Свойства к/м н.п.

Теорема. В конечномерном н.п.

1) $\forall$ две нормы эквивалентны;

2) сходимость по любой норме - покоординатная сходимость (в любом базисе);

3) к/м н.п. полно и сепарабельно;

4)к/м п/п в н.п. всегда замкнуто;

5) к/м н.п. локально компактно;

6)любой л.о. в к/м н.п. непрерывен;

7) к/м н.п. одинаковой размерности изоморфны в категории **N**.

ТЕОРЕМЫ ОБ ОПЕРАТОРАХ В Б.П.

- Теорема о продолжении по непрерывности.

  (X - н.п., Y - б.п., D_A - н.п/п в X, $A:D_A \subset X \to Y$ - л. н.о.) , тогда

  $\exists$ единственный л.н.о. $\square A: \square D_A \subset X \to Y$, продолжающий A на замыкание $\square D_A$ (т.е. $\square A|D_A = A$) & $\|\square A\| = \|A\|$).

- Теорема Банаха-Штейнгауза - критерий ограниченности в **N**(X,Y).

  (**N**(X - б.п., Y) $\supset M$ - ограничено) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in X$ числовое м. $\{\|Ax\|_Y : A \in M\}$ ограничено).

- Теорема об открытом отображении.

  Пусть $A \in \mathbf{N}$(X - б.п., Y - б.п.); тогда
  (A - открытое отображение
  (т.е. образ $\forall$ открытого м. открыт)) $\Leftrightarrow$
  A сюръективен.

- Теорема Банаха об обратном операторе.

  ($\mathbf{N}$(X - б.п., Y - б.п.) $\ni$ A - биективен) $\Leftrightarrow$
  ($A^{-1} \in \mathbf{N}$(Y - б.п., X - б.п.), т.е. A - изоморфизм в $\mathbf{N}$)

- Следствия.
- Об эквивалентности норм.

$(\langle X, \|\,.\,\|_\alpha\rangle$ - б.п., $\langle X, \|\,.\,\|_\beta\rangle$ - б.п. &
$\exists\ c>0 \mid \|\,.\,\|_\alpha \le c\|\,.\,\|_\beta) \Rightarrow \|\,.\,\|_\alpha \sim \|\,.\,\|_\beta$.

- Теорема о замкнутом графике.

(X, Y - б.п., $A{:}X\to Y$ - л.о.) $\Rightarrow$
(A непрерывен $\Leftrightarrow$
график $Gr(A) = \{\langle x, Ax\rangle: x\in X\}$ - замкнутое
л. п/п в б.п.
$\langle X\times Y, \|\langle x,y\rangle\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y\rangle$).

$$f : R \to R; \quad y = f(x) = 5x;$$

$$f - \text{линейный} \left(f(ax_1 + bx_2) = 5(ax_1 + bx_2) = a * 5x_1 + b * 5x_2 = af(x_1) + bf(x_2) \right);$$

$$\text{непрерывный оператор} : \| f \| = 5$$

График замкнут.

$$Gr(f) = \{(x, 5x),\ x \in R\}$$