НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА)

НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА РАСПРЕДЕЛЕНА ПО НОРМАЛЬНОМУ *ЗАКОНУ,*

ЕСЛИ ЕЕ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ИМЕЕТ
СЛЕДУЮЩИЙ ВИД:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Здесь

- $\mu = M(X)$ - математическое ожидание,
- $\sigma^2 = D(X)$ - дисперсия,
- $\sigma = \sigma(X)$ – среднеквадратическое отклонение X.

НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ВЕЛИЧИНА

ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ СВОИМИ

μ и σ^2.

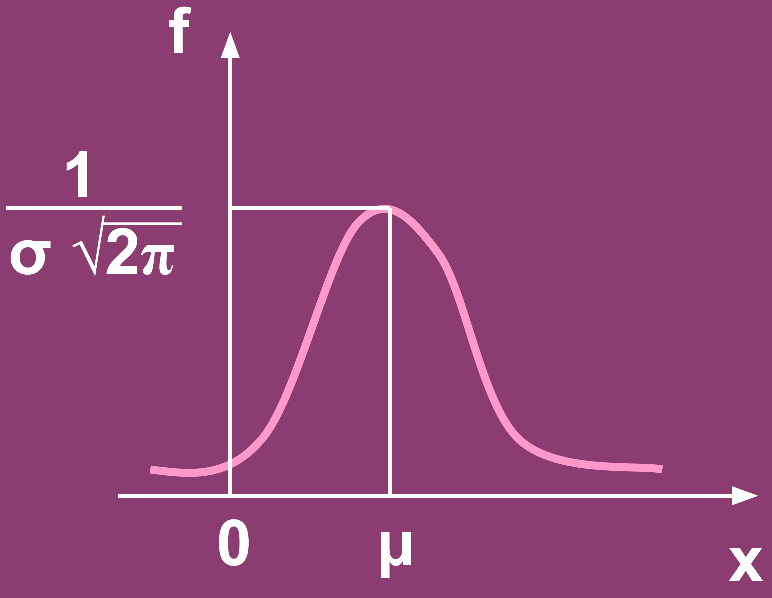
Кривая Гаусса

График плотности вероятности

нормально распределенной величины

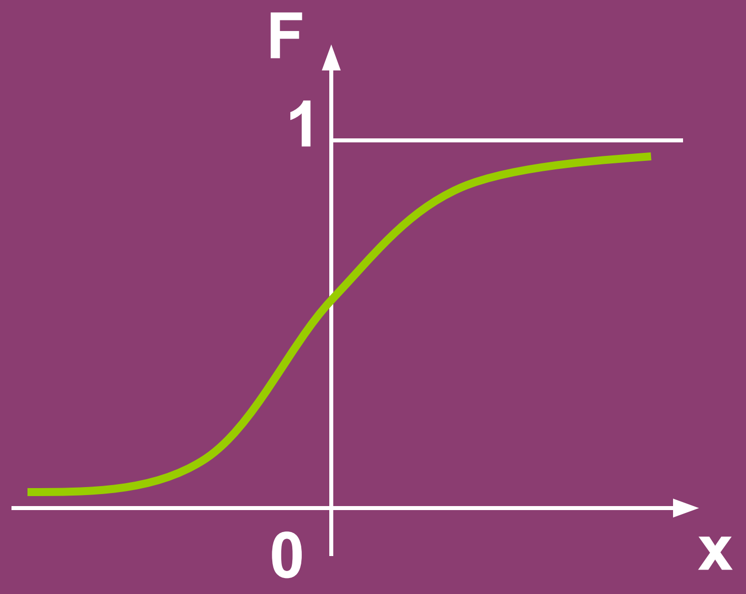
носит название

<u>кривой Гаусса</u>:



Интегральная кривая Гаусса

График ее функции распределения – интегральная кривая Гаусса:



Введение нормированной нормальной величины

Для определения вероятности попадания нормальной СВ в некоторый интервал

требуется вычисление интеграла от $f(x)$,

а этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях.

Поэтому из бесконечного множества нормальных величин

с разными μ и σ выделяют одну,

у которой

$$\mu = 0, \sigma = 1.$$

НОРМИРОВАННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА

Такая нормальная величина называется **нормированной** и обозначается **T**.

Свойства Ф (t)

$Ф(-\infty) = 0, Ф(\infty) = 1$

$Ф(0) = 0{,}5$

*) $Ф(-t) = 1 - Ф(t)$

Плотность вероятности нормированной нормальной величины

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Функция распределения нормированной нормальной величины

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ Ф (t)

- Приближенные значения Ф (t) для значений аргумента $t \geq 0$ вычислены и указаны в специальной таблице

("*табулированы*").

- Для $t < 0$ значения Ф определяются, исходя из указанного выше свойства *).

Так, Ф (-1) = 1 – Ф (1);

Ф (1) находим по таблице и подставляем в формулу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ F(X)

Значения функции распределения F(x) произвольной нормальной величины можно определить через нормированную путем

<u>СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ</u>:

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Вероятность попадания значений нормальной величины в произвольный интервал

Для любой нормальной величины формула имеет следующий вид:

$$P(a<X<b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Значения Ф находятся по таблице нормального распределения.

ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Вероятность того,

что значения нормальной величины

распределятся в окрестности ε
(« эпсилон »)

ее математического ожидания,

вычисляется по формуле:

$$P\left(\mu-\varepsilon<X<\mu+\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1$$

$\varepsilon = \sigma$

Чем больше окрестность
ε,
тем выше вероятность попадания в нее
значений
величины X.

Найдем эту вероятность при значениях ε, кратных σ.

1) Пусть $\varepsilon = \sigma$.

Тогда в правой части формулы получим:

$$2\,Ф(1) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0,8413 - 1 =$$
$$= 0,6826$$

(или 68, 26%).

$\varepsilon = 2\sigma$, $\varepsilon = 3\sigma$

2) $\varepsilon = 2\sigma$.

Аналогичный расчет дает вероятность

0,9544

(или 95,44%).

3) $\varepsilon = 3\sigma$.

Искомая вероятность -

0,9972

(или 99,72%) –

близка к 100%).

ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

ПРАКТИЧЕСКИ ДОСТОВЕРНО,

ЧТО ВСЕ ЗНАЧЕНИЯ

НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ОКАЖУТСЯ В ОКРЕСТНОСТИ « 3σ »

ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ.