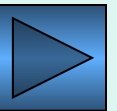
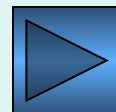
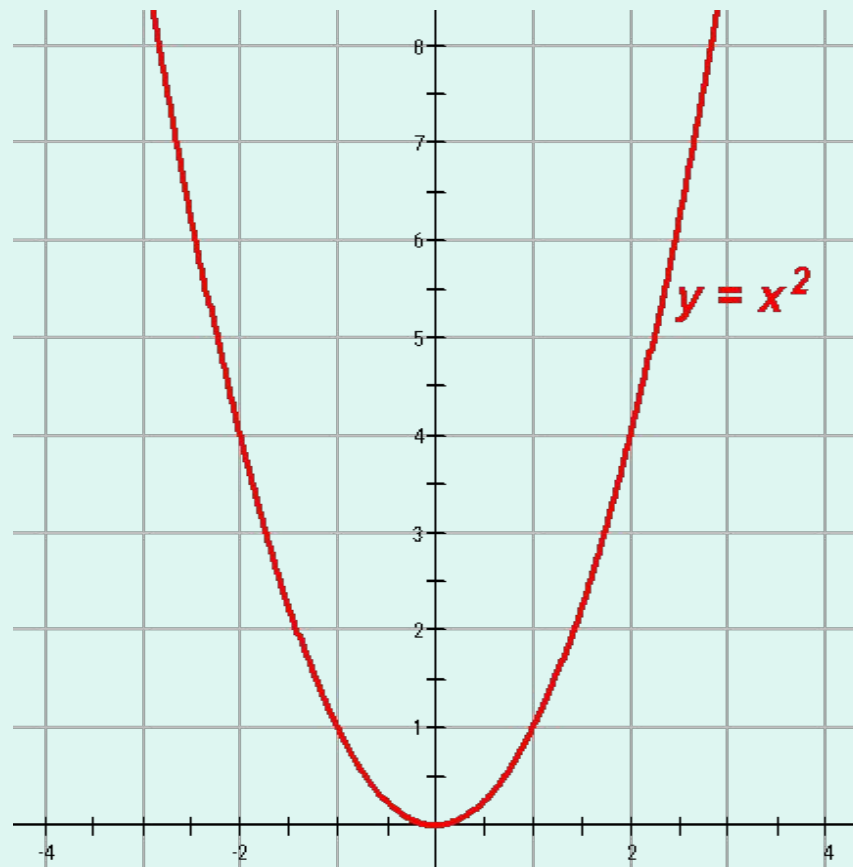


Простейшие преобразования графиков функций



Зная вид графика некоторой функции, можно при помощи геометрических преобразований построить график более сложной функции.

Рассмотрим график функции $y=x^2$ и выясним, как можно построить, используя сдвиги вдоль координатных осей, графики функций вида $y=(x-m)^2$ и $y=x^2+n$.



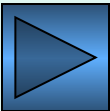
Пример 1.

Построим график функции $y=(x-2)^2$, опираясь на график функции $y=x^2$ (щелчок мышкой). График функции $y=x^2$ есть некоторое множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение $y=x^2$ в верное числовое равенство. Обозначим это множество точек, то есть график функции $y=x^2$, буквой **F**, а неизвестный нам пока график функции $y=(x-2)^2$ обозначим буквой **G**. Сравним координаты тех точек графиков **F** и **G**, у которых одинаковые ординаты. Для этого составим таблицу:

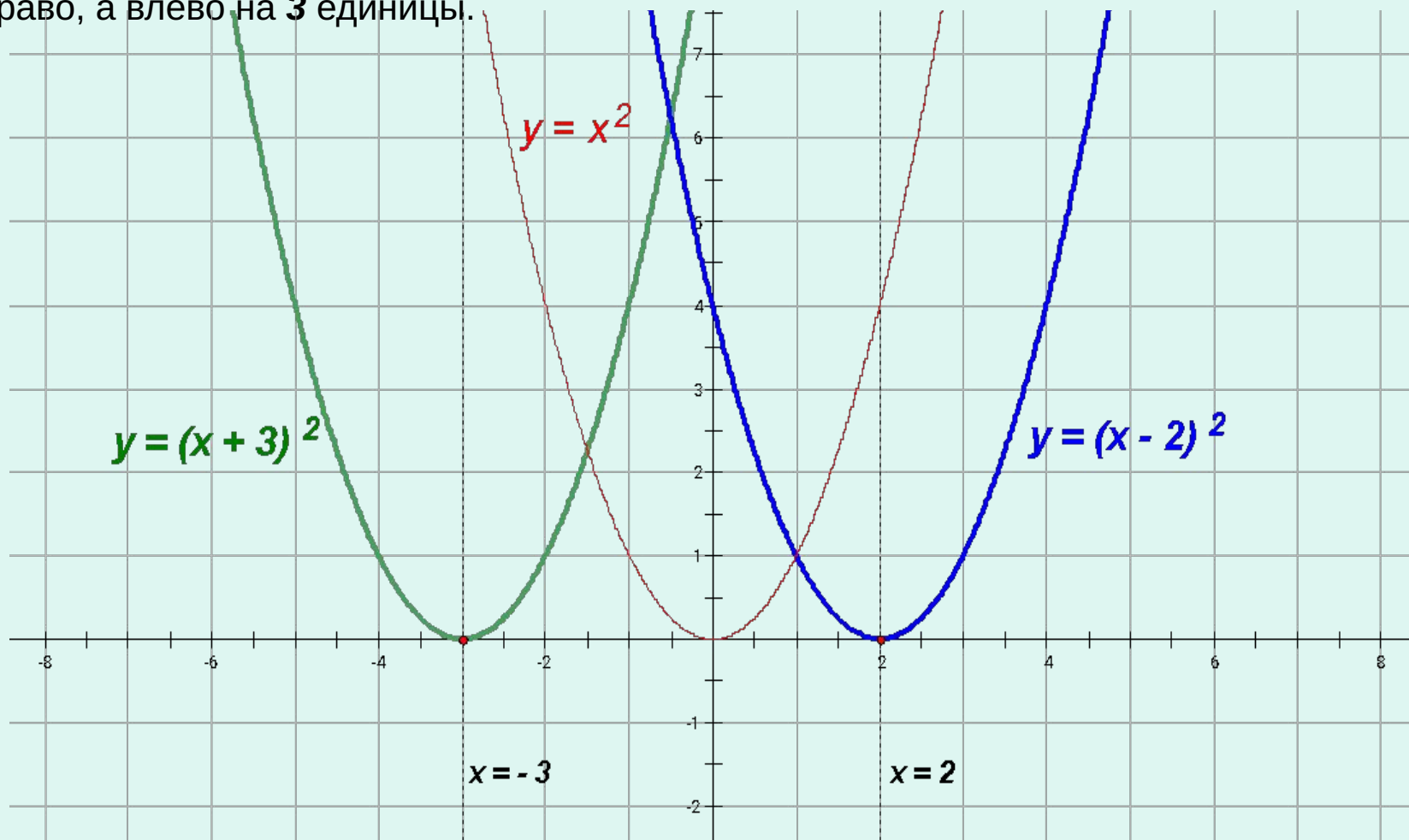
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$(x-2)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Рассматривая таблицу (которую можно неограниченно продолжать и вправо и влево), замечаем, что одинаковые ординаты имеют точки вида $(x_0; y_0)$ графика **F** и $(x_0 + 2; y_0)$ графика **G**, где x_0, y_0 – некоторые вполне определенные числа.

На основании этого наблюдения можем сделать вывод, что график функции $y=(x-2)^2$ можно получить из графика функции $y=x^2$ путем сдвига всех его точек вправо на 2 единицы (щелчок мышкой).



Таким образом, график функции $y=(x-2)^2$ может быть получен из графика функции $y=x^2$ сдвигом вправо на **2** единицы. Рассуждая аналогично, можно доказать, что график функции $y=(x+3)^2$ также может быть получен из графика функции $y=x^2$, но сдвигом не вправо, а влево на **3** единицы.



Хорошо видно, что осями симметрии графиков функций $y=(x-2)^2$ и $y=(x-3)^2$ являются соответственно прямые $x=2$ и $x=-3$.

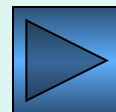
Чтобы увидеть графики, щелкни мышкой



Если вместо графика $y=(x-2)^2$ или $y=(x+3)^2$ рассмотреть график функции $y=(x-m)^2$, где m – произвольное число, то в проведенном ранее рассуждении ничего принципиально не изменится.

Таким образом, из графика функции $y=x^2$ можно получить график функции $y=(x-m)^2$ с помощью сдвига **вправо** на m единиц в направлении оси Ox , если $m > 0$, или **влево**, если $m < 0$. График функции $y=(x-m)^2$ является параболой с вершиной в точке $(m; 0)$.

Этот вывод допускает еще **большее обобщение**:
график функции $y=f(x-m)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ путем сдвига графика функции $y=f(x)$ **вправо** на m единиц в направлении оси Ox , если $m > 0$, или **влево**, если $m < 0$.



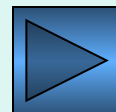
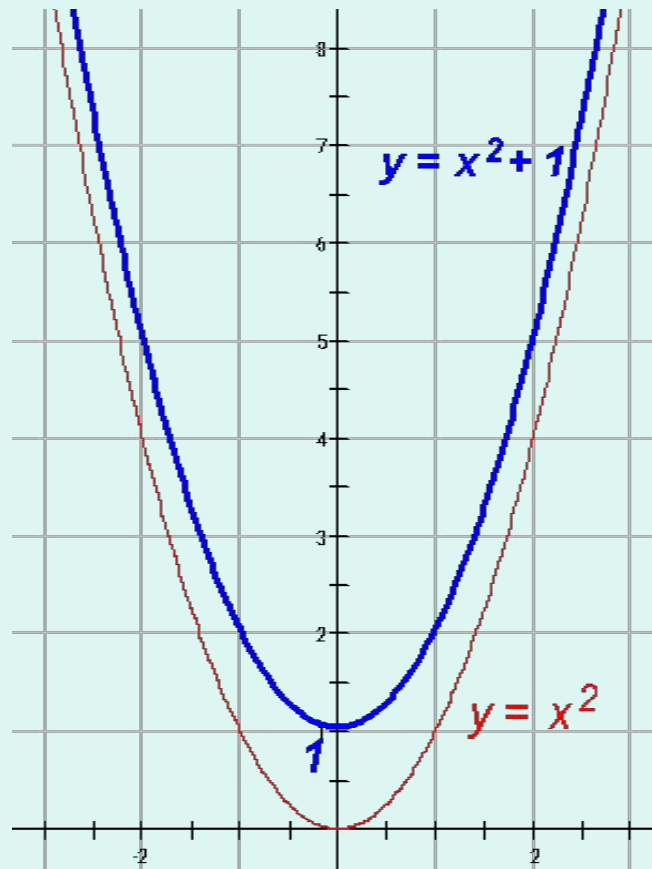
Пример 2.

Построим график функции $y = x^2 + 1$, опираясь на график функции $y = x^2$ (щелчок мышкой). Сравним координаты точек этих графиков, у которых одинаковые абсциссы. Для этого составим таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 1$	10	5	2	1	2	5	10

Рассматривая таблицу, замечаем, что одинаковые абсциссы имеют точки вида $(x_0; y_0)$ для графика функции $y = x^2$ и $(x_0; y_0 + 1)$ для графика функции $y = x^2 + 1$.

На основании этого наблюдения можем сделать вывод, что график функции $y = x^2 + 1$ можно получить из графика функции $y = x^2$ путем сдвига всех его точек вверх (вдоль оси Oy) на **1** единицу (щелчок мышкой).

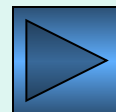


Итак, зная график функции $y=x^2$, можно построить график функции $y=x^2 + p$ с помощью сдвига первого графика вверх на p единиц, если $p>0$, или вниз на $|p|$ единиц, если $p<0$. Графиком функции $y=x^2 + p$ является парабола с вершиной в точке $(0; p)$.

Обобщение:

график функции $y=f(x) + p$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ путем сдвига графика функции $y=f(x)$ *вверх* на p единиц в направлении оси Oy , если $p > 0$, или *вниз*, если $p < 0$.

Вывод: график функции $y=f(x - m) + p$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ с помощью последовательно выполненных двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси Ox на m единиц и сдвига графика $y=f(x - m)$ вдоль оси Oy на p единиц.



Из выше сказанного следует, что графиком функции $y=(x - m)^2 + n$ является парабола с вершиной в точке $(m; n)$. Ее можно получить из параболы $y=x^2$ с помощью двух последовательных сдвигов.

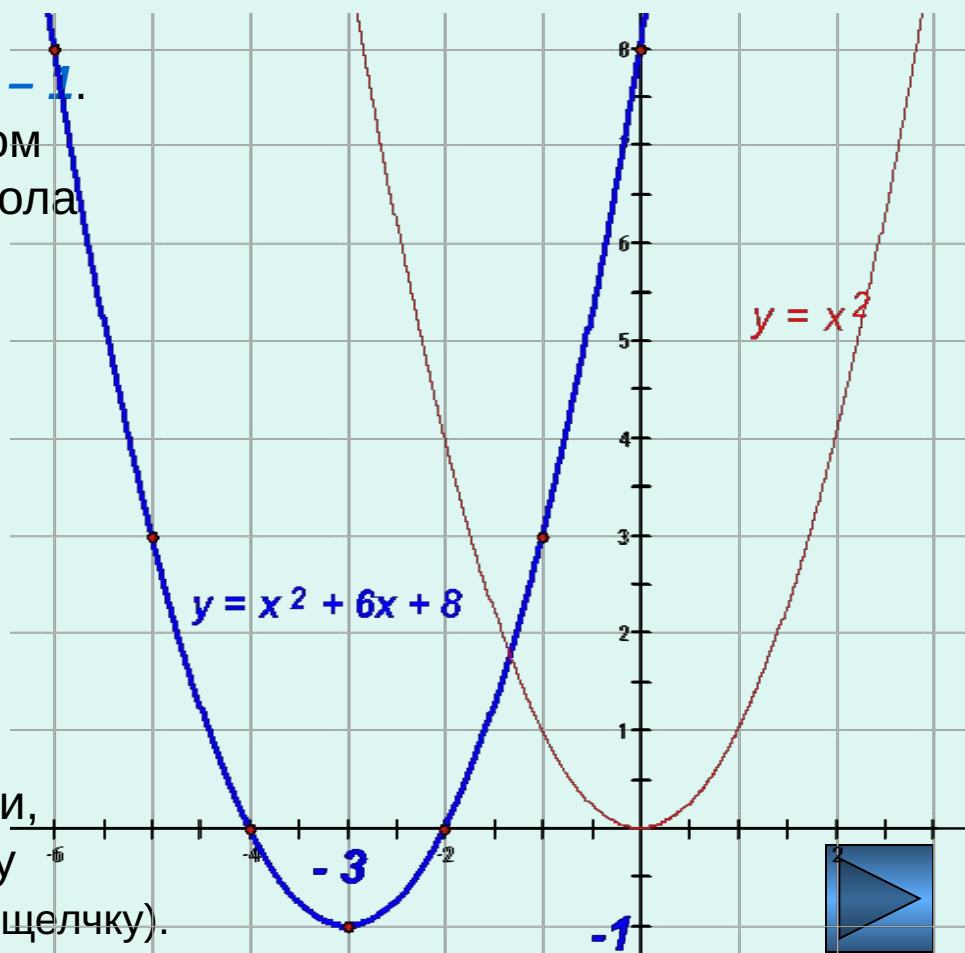
Пример 3.

Докажем, что графиком функции $y = x^2 + 6x + 8$ является парабола, и построим график.

Решение. Представим трехчлен $x^2 + 6x + 8$ в виде $(x - m)^2 + n$. Имеем $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 1 = (x + 3)^2 - 1$. Отсюда $y = (x + 3)^2 - 1$. Значит, графиком функции $y = x^2 + 6x + 8$ является парабола с вершиной в точке $(-3; -1)$. Учитывая, что ось симметрии параболы – прямая $x = -3$, при составлении таблицы значения аргумента функции следует брать симметрично относительно прямой $x = -3$:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	8	3	0	-1	0	3	8

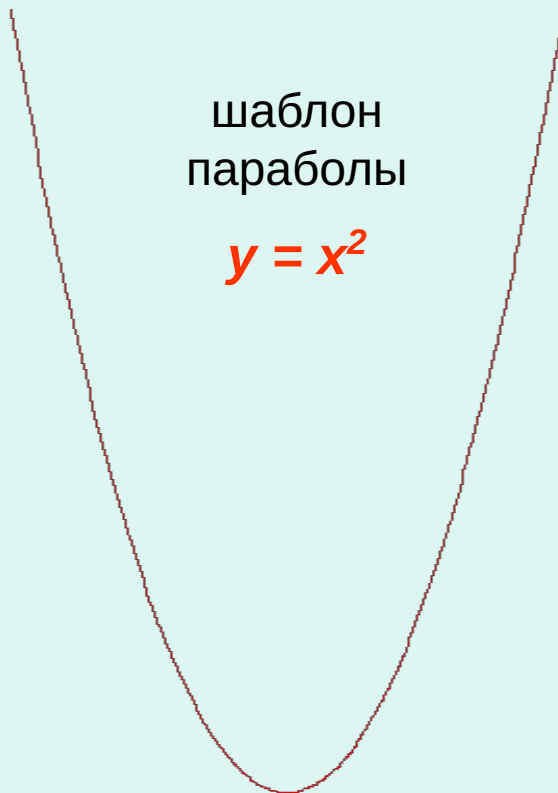
Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу (щелчок мышкой), проводим параболу (по щелчку).



Постройте самостоятельно графики функций:

- 1) $y = x^2 + 2;$
- 2) $y = x^2 - 3;$
- 3) $y = (x - 1)^2;$
- 4) $y = (x + 2)^2;$
- 5) $y = (x + 1)^2 - 2;$
- 6) $y = (x - 2)^2 + 1;$
- 7) $y = (x + 3)(x - 3);$
- 8) $y = x^2 + 4x - 4;$
- 9) $y = x^2 - 6x + 11.$

шаблон
параболы

$$y = x^2$$


При построении графика функции вида $y = (x - m)^2 + n$ удобно пользоваться заранее заготовленным шаблоном параболы $y = x^2$.

Далее можно сверить свои результаты с тем, что должно быть в действительности

