



Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Тема №8. Ряды

Совокупность бесконечного числа слагаемых, составленная по некоторому закону, называется рядом.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$u_1, u_2, \dots$ — члены ряда,

u_n — общий член ряда.



$$S_n = u_1 + \dots + u_n$$

называется *n*-ой *частичной суммой* ряда.



Ряды



Способы задания ряда:

1. Формула n -го члена ряда;
2. Задание нескольких последовательных членов ряда;
3. Задание нескольких последовательных частичных сумм ряда.



Числовые ряды

Если членами ряда являются числа, то ряд называется числовым.

Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм. Этот предел и называется суммой ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Если этот предел бесконечен или не существует, то ряд называется *расходящимся*.



Сходящиеся ряды

Свойства сходящихся рядов:

- 1.Сходимость ряда не нарушится, если все члены ряда умножить на одно и то же число (при это сумма ряда умножится на это число).
- 2.Сумма и разность двух сходящихся рядов являются сходящимися рядами (при этом сумма нового ряда будет равна сумме или разности сумм этих рядов соответственно).
- 3.Сходимость не нарушится, если отбросить (или приписать) некоторое конечное число членов (изменится только значение суммы ряда).



Знакопостоянные числовые ряды

Рассмотрим знакопостоянные (для удобства с положительными членами) числовые ряды.

Критерий сходимости. Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.



Знакопостоянные числовые ряды

Достаточные признаки сходимости:

1. Интегральный признак. Пусть члены искомого ряда являются значениями некоторой непрерывной, монотонно убывающей на $[1; +\infty)$ функции, тогда несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f(1) + f(2) + \dots$ одновременно

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ одновременно}$$

или сходятся, или расходятся.



Знакопостоянные числовые ряды

2. Признак Даламбера. Пусть существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда :

если $l < 1$, то ряд сходится,

если $l > 1$ или бесконечен, то расходится,

если $l = 1$, то ?



Знакопостоянные числовые ряды

3. Радикальный (Коши). Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда :

если $l < 1$, то ряд сходится,

если $l > 1$ или бесконечен, то расходится,

если $l = 1$, то ?



Знакопостоянные числовые ряды

4. Признак сравнения рядов. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - ряд,

исследуемый на сходимость, а $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - ряд,
информация о сходимости или расходимости
которого нам известна. Тогда, если:

1) $u_n \leq v_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится;

2) $u_n \geq v_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже расходится.



Знакопостоянные числовые ряды

5. Предельный признак сравнения. Пусть

даны два ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и существует,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \text{Const} \neq 0$$

Тогда оба ряда одновременно или сходятся, или расходятся.



Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Задача



Решение.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty \end{aligned}$$

Исходный ряд расходится. Этот ряд называется *гармоническим*.



Знакопостоянные числовые ряды

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется обобщённым гармоническим рядом. Из интегрального признака следует:

при $p > 1$ ряд сходится,

при $p \leq 1$ ряд расходится.



Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

Задача



Решение.

$$u_n = \frac{1}{3^{n-1}}, u_{n+1} = \frac{1}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} < 1 - \text{ряд сходится.}$$

Любая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является сходящимся рядом.



Задача

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{10}{1} + \frac{100}{1 \cdot 2} + \frac{1000}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$



Задача

Решение.

$$u_n = \frac{10^n}{n!}, u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

Ряд сходится.



Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

Задача



Решение. Сравним исходный ряд с гармоническим. Чтобы сравнить общие члены воспользуемся признаком сравнения бесконечно малых величин:

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}; v_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Получили, что общий член искомого ряда больше общего члена гармонического расходящегося ряда, следовательно, исходный ряд расходится.



Знакопеременные числовые ряды

Числовой ряд, содержащий положительные и отрицательные члены, называется знакопеременным. Для таких рядов существуют два вида сходимости: абсолютная и условная.

Если ряд, составленный из абсолютных величин (модулей) исходного знакопеременного числового ряда сходится, то исходный ряд *сходится абсолютно*.

Если ряд из модулей расходится, а сам исходный ряд сходится, то он *сходится условно*.



Знакопеременные числовые ряды

Теорема Римана. Если ряд сходится условно, то различные перестановки членов ряда могут приводить к изменению значения суммы и даже к расходимости ряда.



Знакопеременные числовые ряды

Рассмотрим частный случай знакопеременного ряда – знакопеременный ряд. Ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

Достаточный признак сходимости Лейбница. Если члены знакопеременного ряда убывают по абсолютной величине и предел общего члена ряда равен нулю, то ряд сходится. При этом сумма ряда не превысит по абсолютной величине первого члена ряда.



Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда, в случае сходимости установить её вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n - 7}}$$



Задача

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n - 7}} =$$



Задача

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n - 7}} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится. Рассмотрим ряд из абсолютных величин.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n - 7}}$$

Задача



Исходя из признака Лейбница, общий член ряда из абсолютных величин является бесконечно малой величиной. Найдём более простую эквивалентную ей бесконечно малую

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n - 7}} \approx \frac{n^2}{2\sqrt{n^5}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Сравним при помощи предельного признака сравнения ряд из абсолютных величин с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.



Задача

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (n^2 - 3n + 4)}{2\sqrt{n^5 - 3n - 7}} =$$

Задача



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (n^2 - 3n + 4)}{2\sqrt{n^5 - 3n} - 7} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n} - 7}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

или оба сходятся, или оба расходятся.

Задача



Рассмотрим обобщённый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ где } p = \frac{1}{2} \leq 1.$$

Получили, что обобщённый гармонический ряд расходится, значит по предельному признаку сравнения ряд из абсолютных величин тоже расходится. Т.о. исходный знакочередующийся ряд сходится условно.



Степенные ряды

Если члены ряда не постоянные числа, а функции, то такой ряд называется функциональным.

Будем рассматривать частный случай функциональных рядов – степенные ряды. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

называется степенным. Для удобства сделаем замену $z - a = x$ и будем рассматривать в дальнейшем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$



Степенные ряды

Постановка задачи: найти *все* значения x , при которых степенной ряд сходится или найти *область сходимости* степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится абсолютно при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.



Степенные ряды

Из теоремы Абеля следует, что обязательно найдётся такое неотрицательное число R , для которого при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < R$, ряд сходится абсолютно, а при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, ряд расходится. Такое число называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Соответствующий интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда.



Степенные ряды

Формула для нахождения радиуса сходимости степенного ряда имеет вид:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

при условии что все коэффициенты ряда отличны от нуля.



Задача

Пример. Найти область сходимости
степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}}$$

Задача



Решение. Найдём, сначала интервал сходимости степенного ряда, используя признак Даламбера, т.к. внутри этого интервала содержатся все точки, при которых степенной ряд сходится абсолютно.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot 3^n \cdot \sqrt[3]{n}}{3^{n+1} \cdot \sqrt[3]{n+1} \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{3} \right| = \left| \frac{x}{3} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow -3 < x < 3.$$



Задача

При $\left| \frac{x}{3} \right| > 1$ ряд расходится. Остаётся

Выяснить сходимость ряда на концах интервала сходимости (когда этот модуль равен 1). Рассмотрим числовые ряды при данных значениях x , исследуем их на сходимость.



Задача

$$x = 3 \Rightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Получили обобщённый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ где } p = \frac{1}{3} - \text{расходящийся ряд.}$$

Задача



$$x = -3 \Rightarrow u_n = \frac{(-3)^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}} = \frac{(-1 \cdot 3)^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

Получили знакочередующийся ряд.

Воспользуемся признаком Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0 \text{ - ряд сходится.}$$

Т.о. областью сходимости исходного степенного ряда является полуинтервал

$$x \in [-3; 3).$$



Задача

Пример. Найти область сходимости
степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot x^{2n}}{n^2}$$



Задача

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} \cdot x^{2(n+1)} \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot 4^n \cdot x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |4x^2| = 4x^2$$

$$4x^2 < 1 \Rightarrow (2x-1)(2x+1) < 0$$



$$-0,5 < x < 0,5$$

Задача



$$x = \pm 0,5 \Rightarrow u_n = \frac{4^n \cdot (\pm 0,5)^{2n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p = 2 > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

ОТВЕТ : $x \in [-0,5; 0,5]$.



Задача

Пример. Найти область сходимости
степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Задача

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.



Степенные ряды

Свойства степенных рядов:

1. Сумма степенного ряда представляет собой функцию, определённую и непрерывную в интервале сходимости $(-R; R)$.
2. Степенные ряды можно почленно складывать, вычитать, перемножать. При этом радиус сходимости полученного таким образом ряда будет не меньше наименьшего из тех, с которыми производится действие.



Степенные ряды

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости. При этом радиус сходимости не изменится.



Степенные ряды

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки, то она в этой точке может быть представлена в виде суммы степенного ряда, причём это представление единственно.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Это равенство называется формулой Тэйлора (разложением в ряд Тэйлора).



Степенные ряды

Если в формуле Тэйлора положить $a = 0$, то в результате получится разложение в ряд Маклорена.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



Степенные ряды

Рассмотрим разложения в ряд Маклорена некоторых функций.

1. $y = e^x$:

$$y = e^x \quad y(0) = e^0 = 1$$

$$y' = e^x \quad y'(0) = 1$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$y^{(n)} = e^x \quad y^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$$



Степенные ряды

$$\begin{aligned} 2. (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned}$$

Этот ряд называется *биномиальным*. Его область сходимости зависит от m

$$x \in [-1; 1], \text{ при } m \geq 0,$$

$$x \in (-1; 1], \text{ при } -1 < m < 0,$$

$$x \in (-1; 1), \text{ при } m \leq -1.$$



Степенные ряды

$$3. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \text{ при } x \in (-1; 1]$$

$$4. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in R$$

$$5. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in R$$

$$6. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x \in [-1; 1].$$



Степенные ряды

Рассмотрим приближённые вычисления с помощью рядов Маклорена.



Задача

Пример. Вычислить с точностью до 0,001

$$\sqrt[4]{90}.$$

Задача



Решение.

$$\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81+9} = \sqrt[4]{81\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{0,25} =$$

$$m = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{9}$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{0,25 \cdot (0,25-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{81} + \frac{0,25 \cdot (0,25-1) \cdot (0,25-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{81 \cdot 9} + \dots\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{7}{64 \cdot 6 \cdot 81} - \dots \approx$$

$$\frac{7}{63 \cdot 6 \cdot 81} < 0,001 \Rightarrow$$

Задача



По теореме Лейбница (т.к. получили знакочередующийся ряд) сумма членов ряда, начиная с 4-го не превысит по абсолютной величине значения 4-го члена, т.е. не превысит заданной в условии точности, а значит всеми членами, начиная с 4-го можно пренебречь.

$$\approx 3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = \frac{288 \cdot 3 + 24 - 1}{288} = \frac{887}{288} \approx 3,080.$$



Задача

Пример. Вычислить $\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx$, взяв три

члена разложения, оценить погрешность.

Задача



$$\begin{aligned} \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx &= \int_0^{0,25} \left(1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots \right) \cdot dx \approx \\ &\approx \int_0^{0,25} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} \right) \cdot dx = x \Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{10} \Big|_0^{0,25} - \\ &- \frac{x^7}{42} \Big|_0^{0,25} = \frac{1}{4} - \frac{1}{64 \cdot 3} + \frac{1}{64 \cdot 16 \cdot 10} - \frac{1}{64 \cdot 64 \cdot 16 \cdot 42} \approx \end{aligned}$$

Задача



$$64 \cdot 16 \cdot 10 = 10240$$

$$64 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 42 = 688128$$

Погрешность выбираем между значениями последнего, взятого в расчёт члена и первого отброшенного (округленно). В нашем случае берём 0,00001.

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{64 \cdot 3} + \frac{1}{64 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{64 \cdot 120 - 160 + 3}{64 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 3} = \\ &= \frac{7523}{30720} \approx 0,24489. \end{aligned}$$



Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Конец всему



Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Конец всему
курсу лекций