

Матрицы. Определители.

Матрицы и операции над ними

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита ($A, B, C \dots$), а элементы матриц строчными буквами с двойным индексом: a_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи $A = (a_{ij}) \ i=1..m; j=1..n$.

Две матрицы A и B одного размера $m \times n$ называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i=1..m; j=1..n$.

Классификация матриц

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей **(вектором)-строкой**, а из одного столбца – матрицей **(вектором)-столбцом**.

Квадратной матрицей n -го порядка называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов и равно n .

Элементы матрицы a_{ij} у которых $i = j$ называются **диагональными элементами** и образуют **главную диагональ**.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то она называется **диагональной**.

Единичной, называется диагональная матрица, элементы которой равны единице.

Классификация матриц

- Симметрической называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т.е.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}).$$

- Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие по одну из сторон главной диагонали, равны нулю.

Операции над матрицами

Умножение матрицы на число.

- Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для всех $i = 1 \dots m; j = 1 \dots n$.

Сложение матриц.

- Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1 \dots m; j = 1 \dots n$.

Вычитание матриц.

- Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Умножение матриц.

- Умножение матриц A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц называется такая матрица, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы A называется произведение m матриц A , т.е. $A^m = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$

Транспонирование матрицы.

- **Транспонированием матрицы** называется переход от матрицы A к A^T (или A'), в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. A^T – называется транспонированной относительно матрицы A .

Определители квадратной матрицы

- Каждой квадратной матрице A , можно поставить в соответствие вычисленное по определенным правилам число, называемое *определителем квадратной матрицы*.
- *Определителем матрицы первого порядка* $A=(a_{11})$ или определителем первого порядка называется элемент a_{11} . Обозначается $\Delta_1 = a_{11}$ или $|A| = a_{11}$.
- *Определителем матрицы второго порядка* или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле: $\Delta_2 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

или определителем третьего порядка называется число,

которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Пусть A является квадратной матрицей n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} , называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Теорема Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

- $\Delta = a_{i_1 i_1} A_{i_1 i_1} + a_{i_2 i_2} A_{i_2 i_2} + \dots + a_{i_n i_n} A_{i_n i_n}$.
- Значение теоремы состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n -го порядка к вычислению более простых определителей $(n-1)$ -го порядка.

Свойства определителей

- 1
 - Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.
- 2
 - Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ , то её определитель умножится на это число λ .
- 3
 - При транспонировании матрицы её определитель не изменится.
- 4
 - При перестановке 2-х строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.
- 5
 - Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю.

Свойства определителей

- 6
 - Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то её определитель равен нулю.
- 7
 - Определитель матрицы не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженной на любое число.
- 8
 - Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю.
- 9
 - Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|AB| = |A| |B|$.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Если определитель матрицы отличен от нуля, то такая матрица называется *невырожденной, или неособенной*; в противном случае (при $|A| = 0$) – *вырожденной, или особенной*.

Присоединенной матрицей квадратной матрицы A называется матрица \tilde{A} , каждый элемент которой есть алгебраическое дополнение \tilde{a}_{ij} элемента транспонированной матрицы.

Теорема о существовании обратной матрицы. Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Алгоритм нахождения обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если определитель матрицы A не равен нулю, то обратная матрица существует.
2. Находим A' , транспонированную к A .
3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij}=A_{ji}$ ($i=1..n; j=1..n$) и составляем из них присоединенную матрицу .

$$\tilde{A} : \tilde{a}_{ij} = A'_{ij} \quad (i = 1..n; j = 1..n)$$

Вычисляем обратную матрицу по формуле:

4.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.