

Функция одной и нескольких переменных



Путь к появлению понятия функции идет от французских ученых Рене Декарта и Франсуа Виета (XVII в.).



Рене Декарт
(1596 – 1650)

Понять и работать с функцией гораздо легче, если она задана аналитически.

Виет и Декарт разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание.



Франсуа Виет
(1540 – 1603)

Было введено единое обозначение:

Неизвестных - последними буквами латинского алфавита - x, y, z ;

Известных - начальными буквами того же алфавита - $a, b, c, \dots$ и т.д.

О самом понятии функции говорилось не сразу.

Слово «функция»

(от латинского *functio* -совершение, выполнение) впервые было употреблено немецким математиком Лейбницем в 1673г. Под функцией он понимал отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определенному закону.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц
(1646 – 1716) — немецкий философ,
математик, юрист, дипломат.

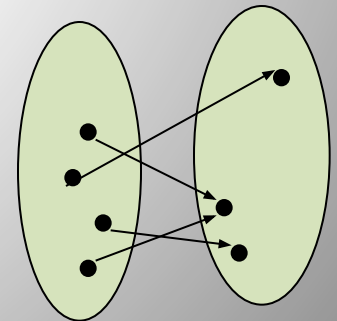
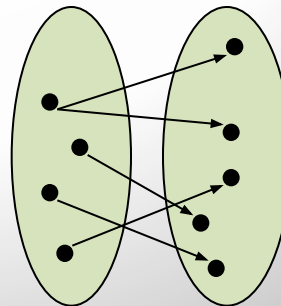
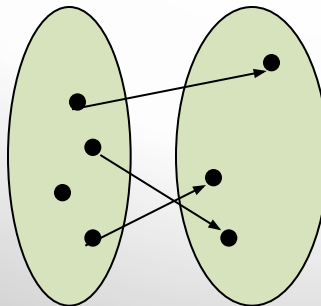
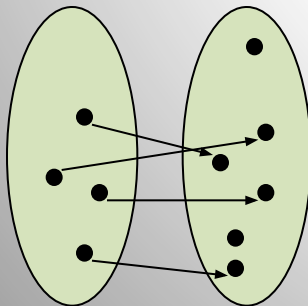


.

Задание 1.

Определите, какая из данных зависимостей является функциональной

1) $x \rightarrow y$ 2) $a \rightarrow q$ 3) $x \rightarrow d$ 4) $n \rightarrow f$



Определение функции

**Функция –
одно из важнейших
математических
понятий**

Функция – это особое
соответствие!!!

Функцией называется
соответствие, при
котором каждому
элементу одного
множества ставится
в соответствие
единственный
элемент другого
множества

Функция

Функцией одной переменной

$$y = f(x)$$

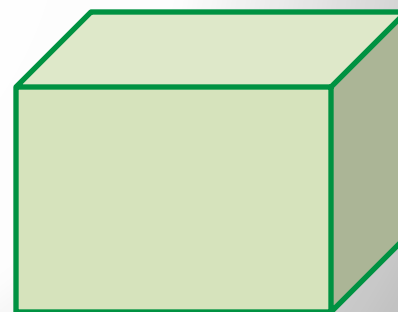
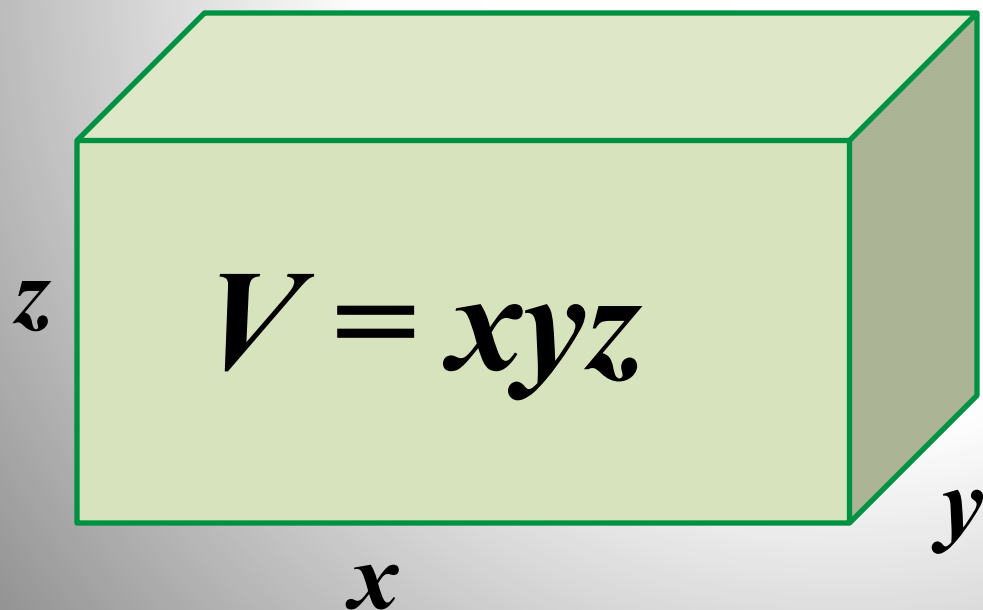
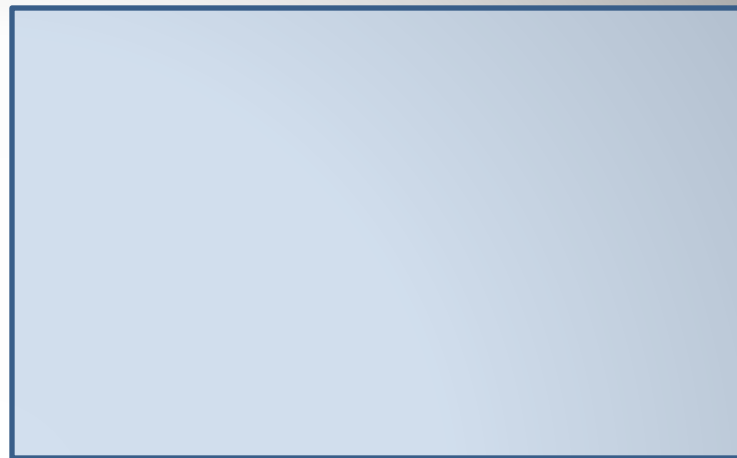
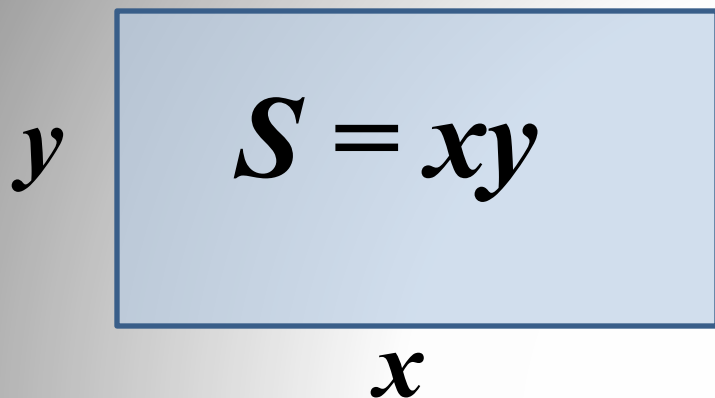
называется такая зависимость, при которой каждому значению переменной **x** соответствует единственное значение переменной **y**

Функцией нескольких переменных

$$y = f(x, y, z, \dots, t)$$

называется такая зависимость, при которой каждому значению аргументов **x, y, z, ..., t** соответствует единственное значение переменной **y**

Определение функции нескольких переменных



$D(y)$ и $E(y)$ функции

Область
определения функции –
 $D(y)$

$D(f)$ «domain» - «область»

Значения аргумента, при
котором функция имеет
смысл

Область значений
функции – $E(y)$

$E(f)$ «ensemble»
«ансамбль, множество»

Найти $D(y)$ и $E(y)$ функции:

1. $y = 3x-5$ $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$
2. $y = -2x/3$ $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$
3. $y = 3/2x$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ $y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
4. $y = \sqrt{1-2x}$ $x \in (-\infty; 0,5]$ $y \in [0; \infty)$
5. $y = 11\sin x$ $x \in \mathbb{R}$ $y \in [-11; 11]$
6. $y = \lg(4x-1)$ $x \in (0,25; \infty)$ $y \in \mathbb{R}$

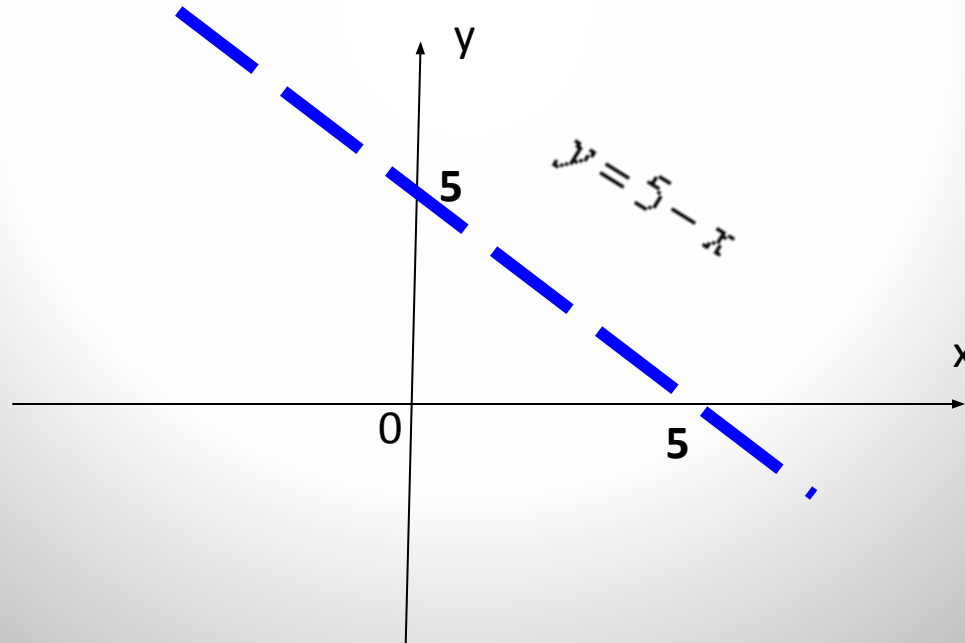
Найти область определения функции $z = \frac{x^2 + 4xy - 3}{x + y - 5}$

Решение: так как знаменатель не может обращаться в ноль, то:

$$x + y - 5 \neq 0$$

$$y \neq 5 - x$$

Ответ: вся координатная плоскость XOY
кроме точек, принадлежащих прямой $y = 5 - x$



Найти область определения функции $f(x, y) = \sqrt{3y + 2}$

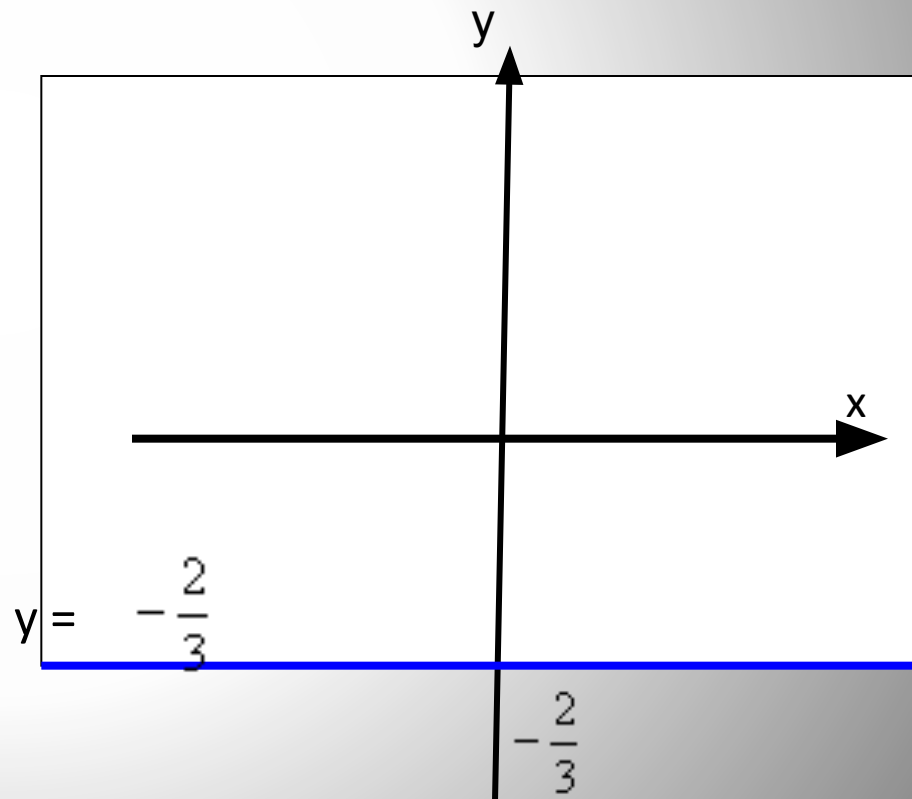
Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3y + 2 \geq 0$$

$$3y \geq -2$$

$$y \geq -\frac{2}{3}$$

Ответ: полуплоскость $y \geq -\frac{2}{3}$



Найти область определения функции и изобразить её на

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}} \quad \text{чертеже}$$

Решение: подкоренное выражением должно быть неотрицательным:

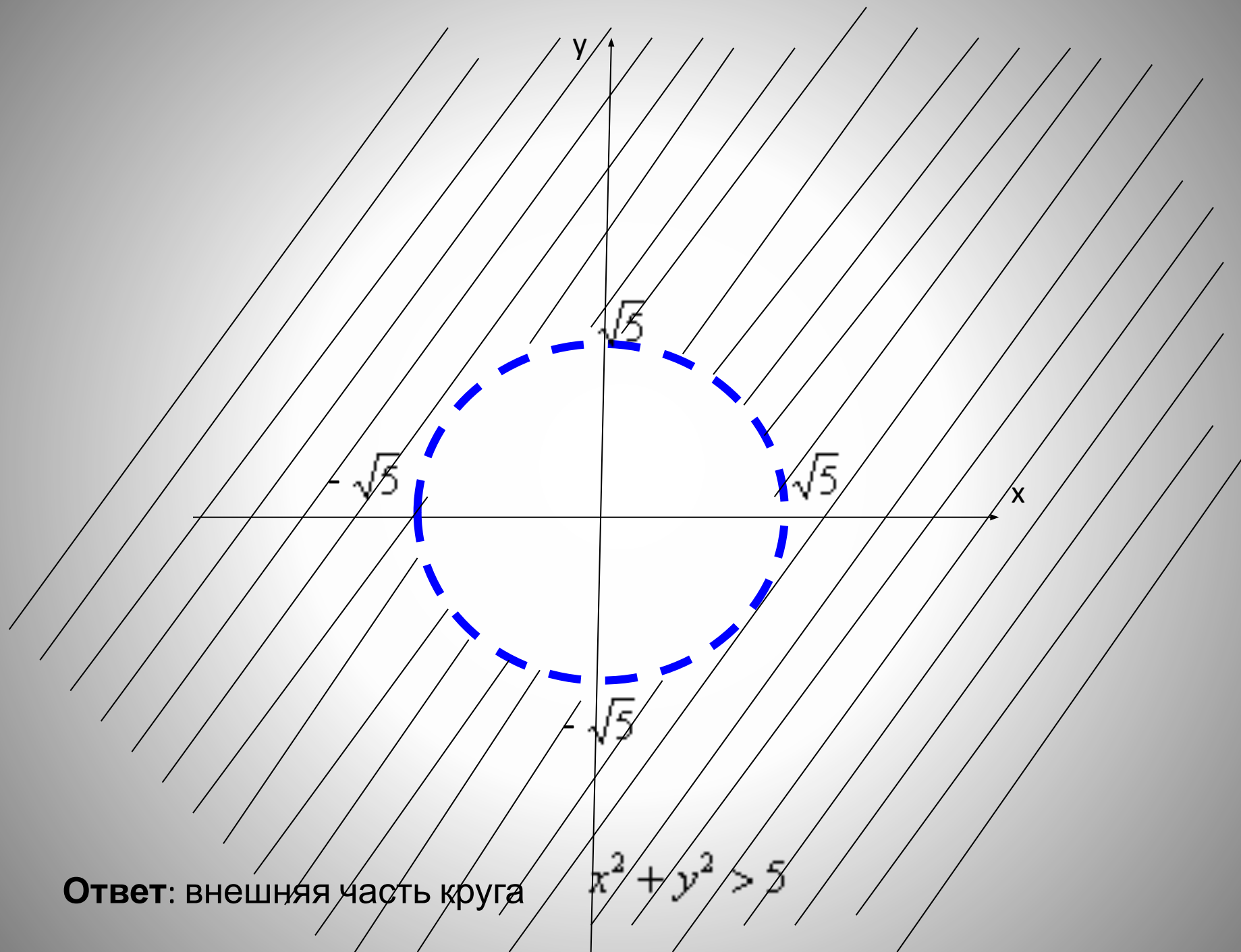
$x^2 + y^2 - 5 \geq 0$ и, учитывая, что знаменатель не может обращаться в ноль
неравенство становится строгим:

$$x^2 + y^2 - 5 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 5$$

Уравнение $x^2 + y^2 = 5$ определяет окружность с центром
в начале координат радиуса $\sqrt{5}$,
которая делит координатную плоскость на **две** части –
«внутренность» и «внешность» круга.

Так как неравенство у нас **строгое**, то сама окружность
заведомо не войдёт в область определения
и поэтому её нужно провести **пунктиром**.



Ответ: внешняя часть круга

$$x^2 + y^2 > 5$$

Определение . Совокупность пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Геометрически: если каждую пару значений x и y изобразить точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy , то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости.

Для функции одной переменной область определения – промежуток на оси Ox .

Для функции двух переменных $z=f(x,y)$ область определения представляет некоторую совокупность **точек плоскости**, а для функции трех переменных $u = f(x,y,z)$ – некоторую совокупность **точек пространства**.

Геометрический смысл функции 2-х переменных

Функции одной переменной $y=f(x)$ соответствует определённая линия на плоскости (например, $y = x^2$ – всем знакомая школьная парабола), то график функции двух переменных $z=f(x,y)$ располагается в трёхмерном пространстве.

На практике чаще всего приходится иметь дело с поверхностью, но иногда график функции может представлять собой, например, пространственную прямую (прямые) либо даже единственную точку.

**Определите какие из кривых являются
графиками функций**

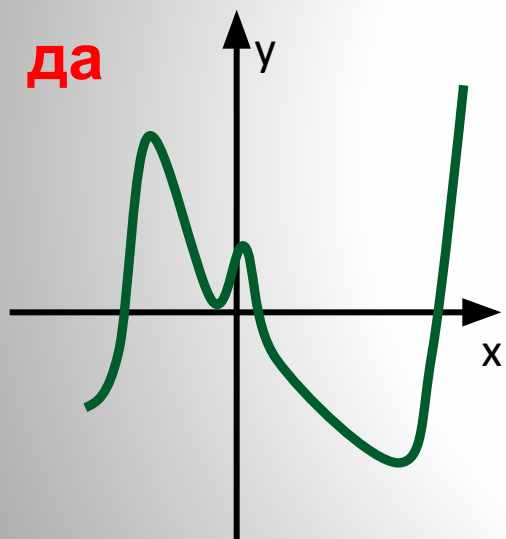


Рис 1

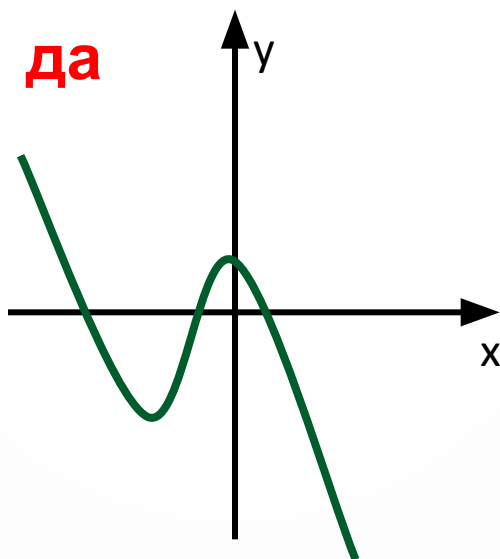


Рис 2

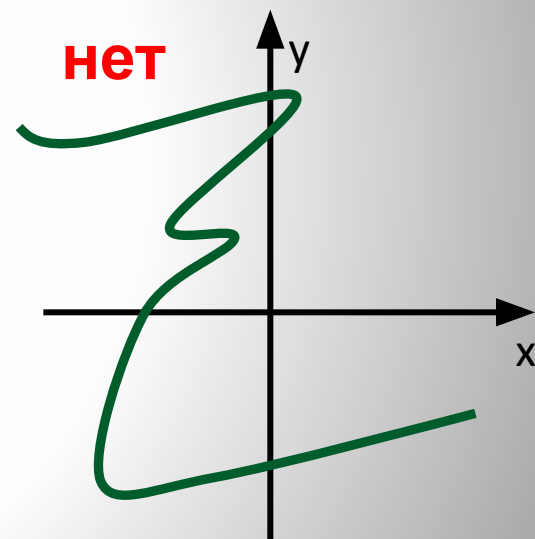
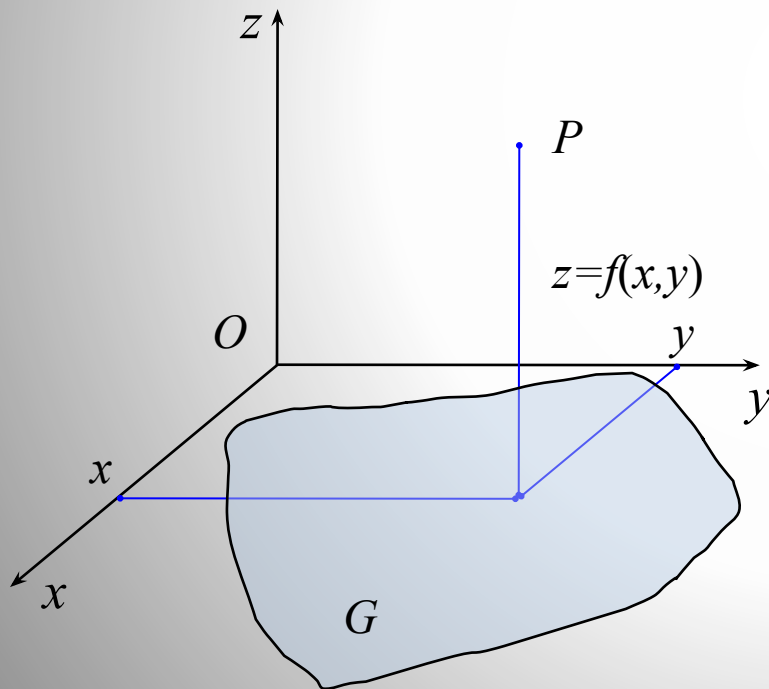


Рис 3

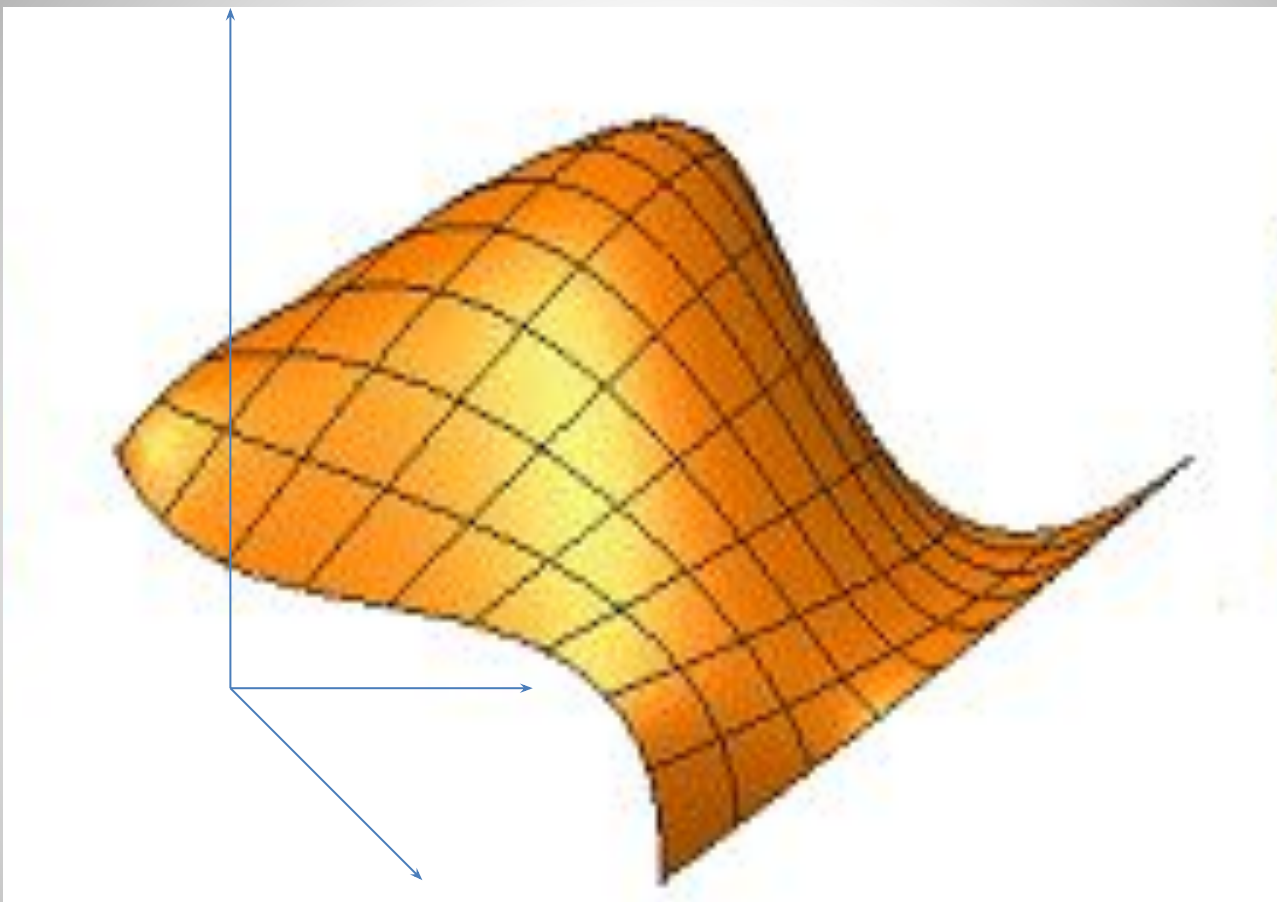
Геометрическое изображение функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$,

определенную в области G на плоскости Oxy , и систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$



Получили в пространстве точку P с координатами $x, y, z = f(x, y)$.

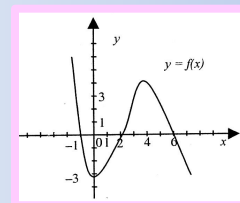


!!! Уравнение $z = f(x, y)$ в пространстве определяет некоторую поверхность. Таким образом, **графиком** функции двух переменных является поверхность, проектирующаяся на плоскость Oxy в область определения функции.

Способы задания функций

1. Аналитический
2. Графический
3. Табличный
4. Описательный

1. $y=2x-5;$



3.

x	1	2	5	6
y	1	4	25	36

4. Функция на $[-2; -1]$ возрастает,
на $[0; 4]$ убывает,
на $[-1; 0]$ равна 5.

Способы задания функции двух переменных

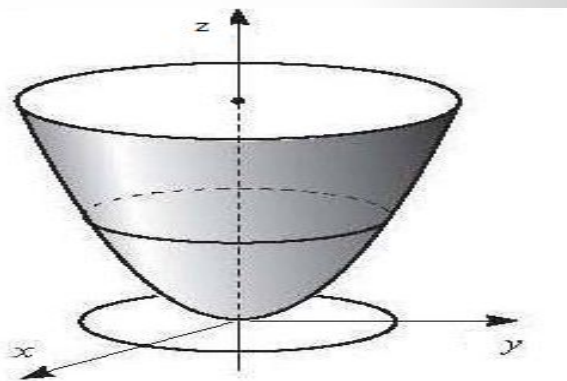
1. Аналитический

2. Графический

3. Табличный

4. Описательный

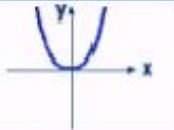
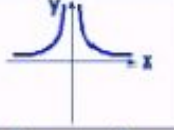
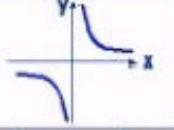
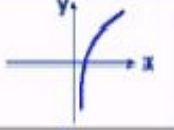
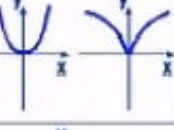
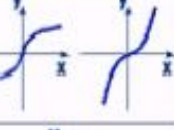
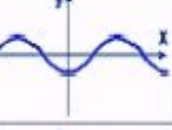
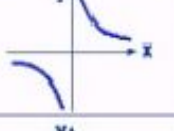
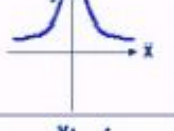
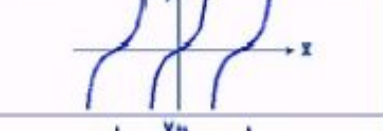
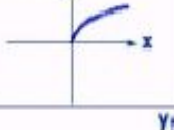
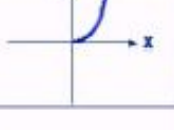
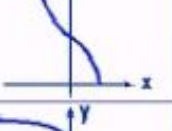
$$z = f(x, y)$$



	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Итоговая таблица

«Основные элементарные функции, их области определения и графики»

функция ($n, m, k \in \mathbb{N}$)	область определе- ния	график		функция	область определе- ния	график	
x^n	$(-\infty, \infty)$			a^x	$(-\infty, \infty)$		
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ($x \neq 0$)			$\log_a x$	$(0, \infty)$		
$x^{\frac{m}{2k-1}}$	$(-\infty, \infty)$			$\sin x,$ $\cos x$	$(-\infty, \infty)$		
$x^{-\frac{m}{2k-1}}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ($x \neq 0$)			$\operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$		
$x^{\frac{m}{2k}}$	$[0, \infty)$			$\operatorname{ctg} x$	$(x \neq n\pi)$		
$x^{-\frac{m}{2k}}$	$(0, \infty)$			$\operatorname{arcsin} x,$ $\operatorname{arccos} x$	$[-1, 1]$		
 Приведенная информация будет применяться в курсе неоднократно				$\operatorname{arctg} x,$ $\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty, \infty)$		

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ



1. Область определения
2. Область значений
3. Нули функции
4. Четность
5. Промежутки знакопостоянства
6. Непрерывность
7. Монотонность
8. Наибольшее и наименьшее значения
9. Ограниченность
10. Выпуклость

График функции

Графиком функции f называют множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты равны соответствующим значениям функции.

Задание 2.

Определите, какой из данных графиков является графиком функции

Рис.1

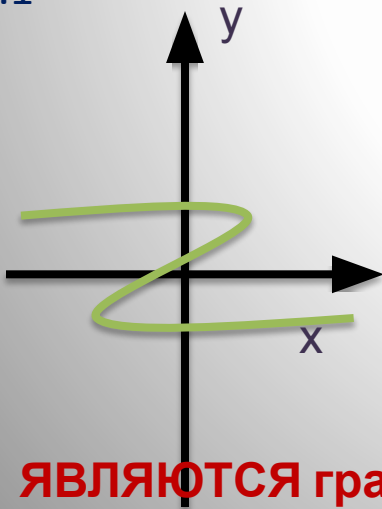


Рис.2

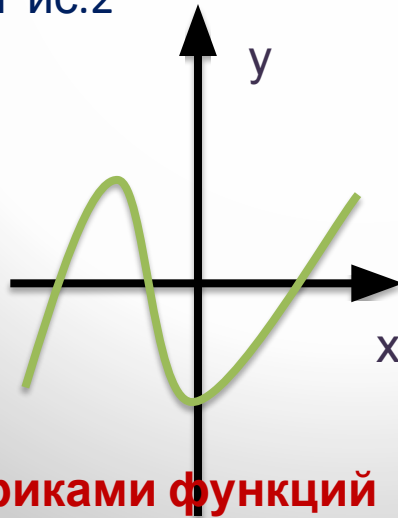


Рис.3

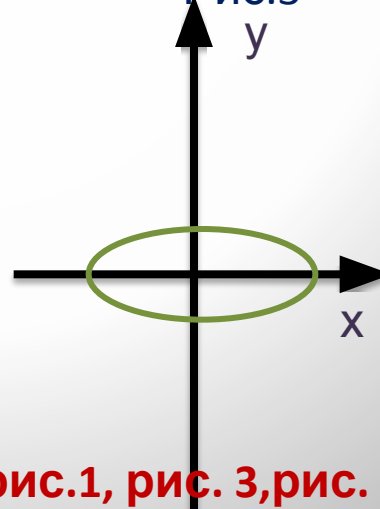
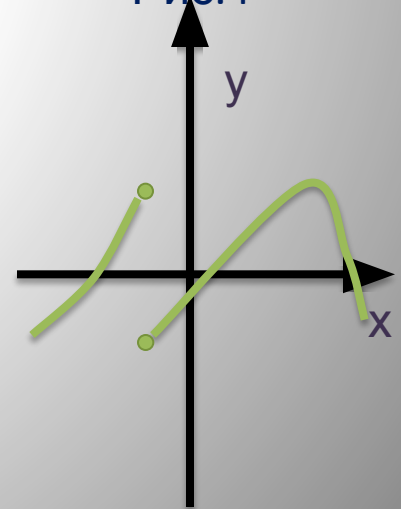


Рис.4



НЕ ЯВЛЯЮТСЯ графиками функций рис.1, рис. 3,рис. 4