

Решение логарифмических неравенств

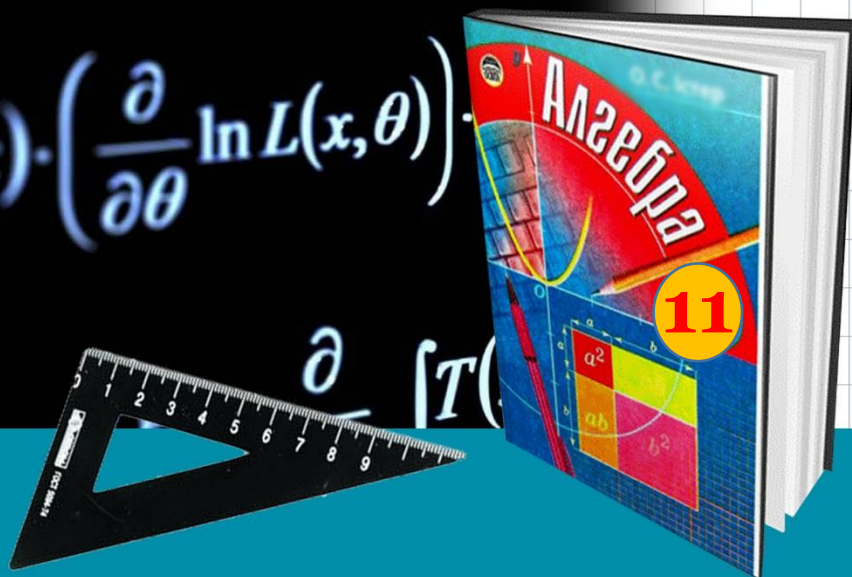
$$\psi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_n} T(x) f(x, \theta) dx$$

$$-\ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)^2}{\sigma^2}$$

$$T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(x) \right)$$

$$T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x)$$



Методы решения логарифмических неравенств

Нестандартные

Стандартные

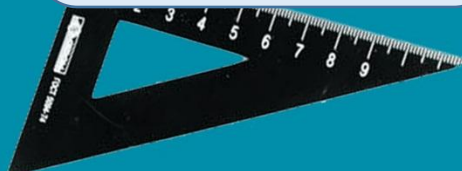
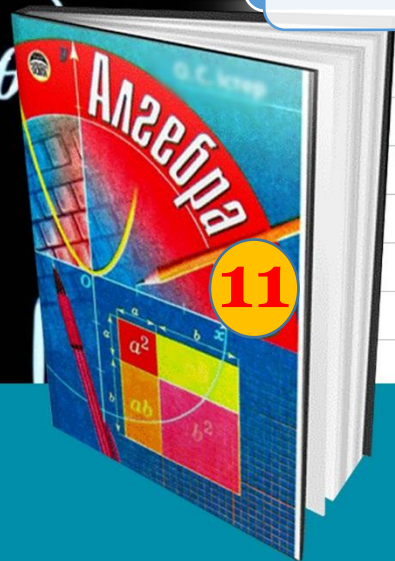
Метод
рационализации

Методы
с использованием
свойств функции

область
определения,
область
значений

ограничен
ность

МОНОТОН
НОСТЬ



Метод рационализации

Суть **метода рационализации** для решения логарифмических неравенств (**метода замены множителя**) состоит в том, что в ходе решения осуществляется переход от неравенства, содержащего логарифмические выражения, к равносильному рациональному неравенству (или равносильной системе рациональных неравенств)

Рассмотрим неравенства:

$$\log_a f(x) > 0;$$

число

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0;$$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0;$$

функция

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$$

$$1) \log_a f(x) \circled{>} 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a 1.$$

Если $a > 1$, то $f(x) > 1$, значит,

$$(a - 1) \cdot (f(x) - 1) \circled{>} 0;$$

Если $0 < a < 1$, то $0 < f(x) < 1$, значит,

$$(a - 1) \cdot (f(x) - 1) \circled{>} 0.$$

Следовательно :

$$\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

$\log_a t$ возрастает на $\mathbf{R}_+$

Имеем : $a - 1 > 0$; $f(x) - 1 > 0$.

$\log_a t$ убывает на $\mathbf{R}_+$

Имеем : $a - 1 < 0$; $f(x) - 1 < 0$.

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) \textcircled{>} 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

Если $a > 1$, то $f(x) > g(x) > 0$, тогда

$$(a - 1)(f(x) - g(x)) \textcircled{>} 0,$$

Если $0 < a < 1$, то $0 < f(x)$

$$(a - 1)(f(x) - g(x)) \textcircled{>} 0.$$

**Знак
«сохраняется».**

Имеем :

$$\begin{aligned} \log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$(a-1) \cdot (f(x)-1)$$

$$\log_a f(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) < 0;$$

$$(a-1)(f(x)-g(x))$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) < 0;$$

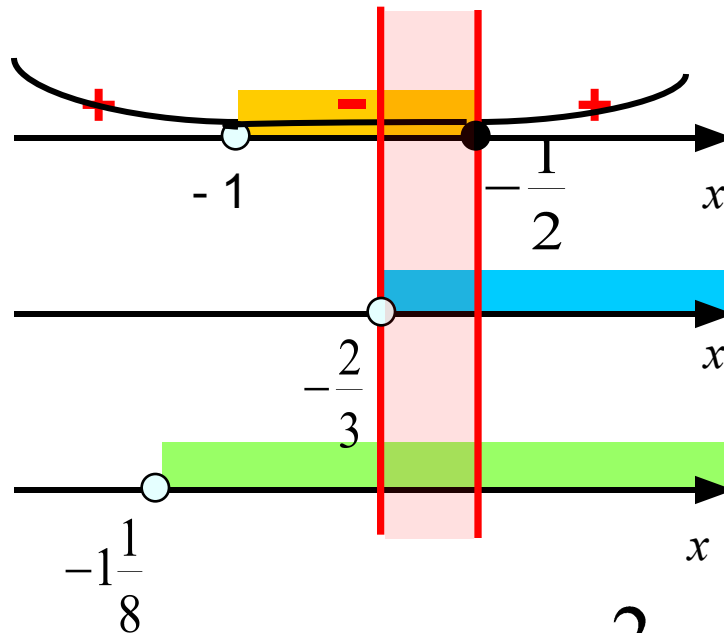
При решении учитываем ОДЗ!

Решим неравенство:

$$\frac{\log_5(6x + 4)}{\log_{0,7}(8x + 9)} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{6x + 3}{8x + 8} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{9}{8}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(5 - 1) \cdot (6x + 4 - 1)}{(0,7 - 1) \cdot (8x + 9 - 1)} \geq 0, \\ 8x + 9 \neq 1, \\ 6x + 4 > 0, \\ 8x + 9 > 0; \end{cases}$$



ОТВЕТ : $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}]$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0.$$

Если $a(x) > 1$, то $f(x) > 1$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0$.

Если $0 < a(x) < 1$, то $0 < f(x) < 1$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0$;

Имеем:

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0,$$

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$$

Если $a(x) > 1$, то $f(x) > g(x) > 0$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$.

Если $0 < a(x) < 1$, то $0 < f(x) < g(x)$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$;

Имеем:

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Решим неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 2x + 3 \neq 1, \\ x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\log_{2x+3} x^2 < 1;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x + 3) < 0;$$

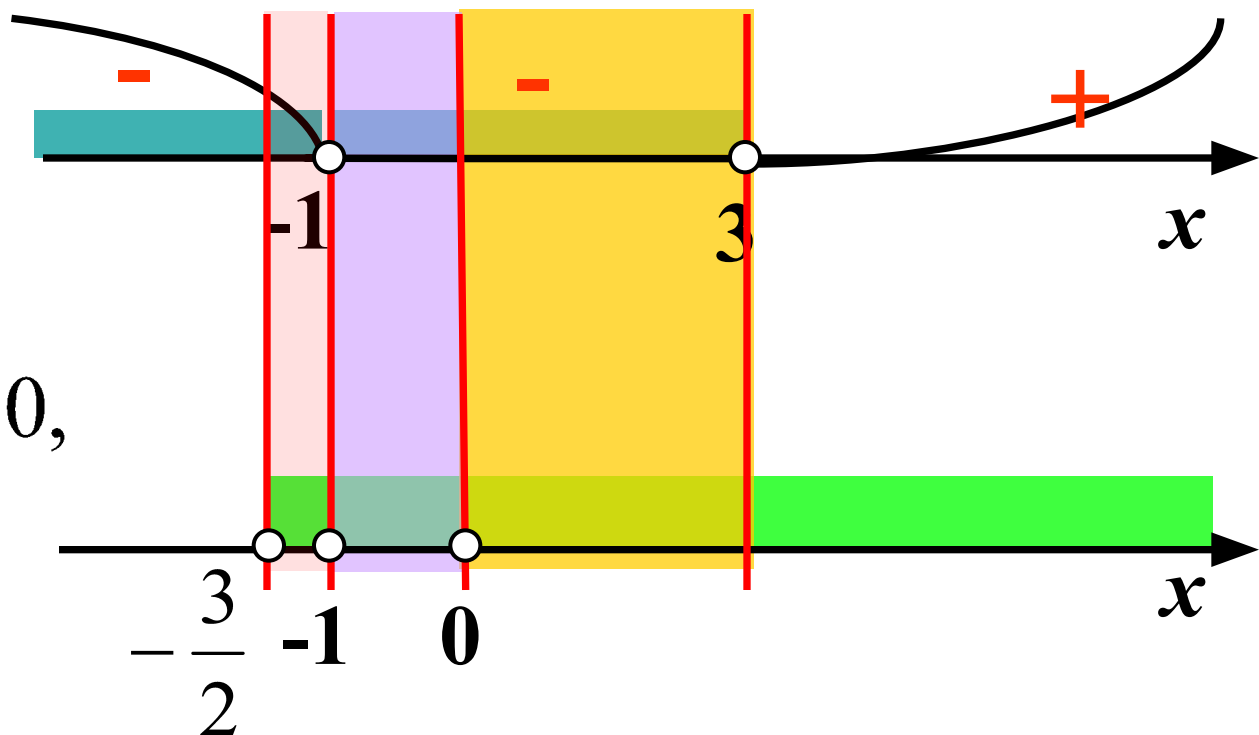
$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x+3) < 0;$$

$$(2x+3-1) \cdot (x^2 - 2x - 3) < 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x+2)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2(x+1)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Ответ : $(-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3).$

Решим неравенство: $\log_{2x-1} \frac{x^4 + 2}{2x + 1} \geq 1;$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x^4 + 2}{2x + 1} > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\log_{2x-1} \frac{x^4 + 2}{2x - 1} \geq 1;$$

$$\log_{2x-1} \frac{x^4 + 2}{2x + 1} - \log_{2x-1} (2x - 1) \geq 0;$$

$$(-1) \cdot \left(\frac{x^4 + 2}{2x + 1} - (2x - 1) \right) \geq 0;$$

$$(2x - 2) \cdot \left(\frac{x^4 + 2 - 4x^2 + 1}{2x + 1} \right) \geq 0;$$

$$(x - 1) \cdot \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{2x + 1} \right) \geq 0;$$

$$(x-1) \cdot \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{2x+1} \right) \geq 0;$$

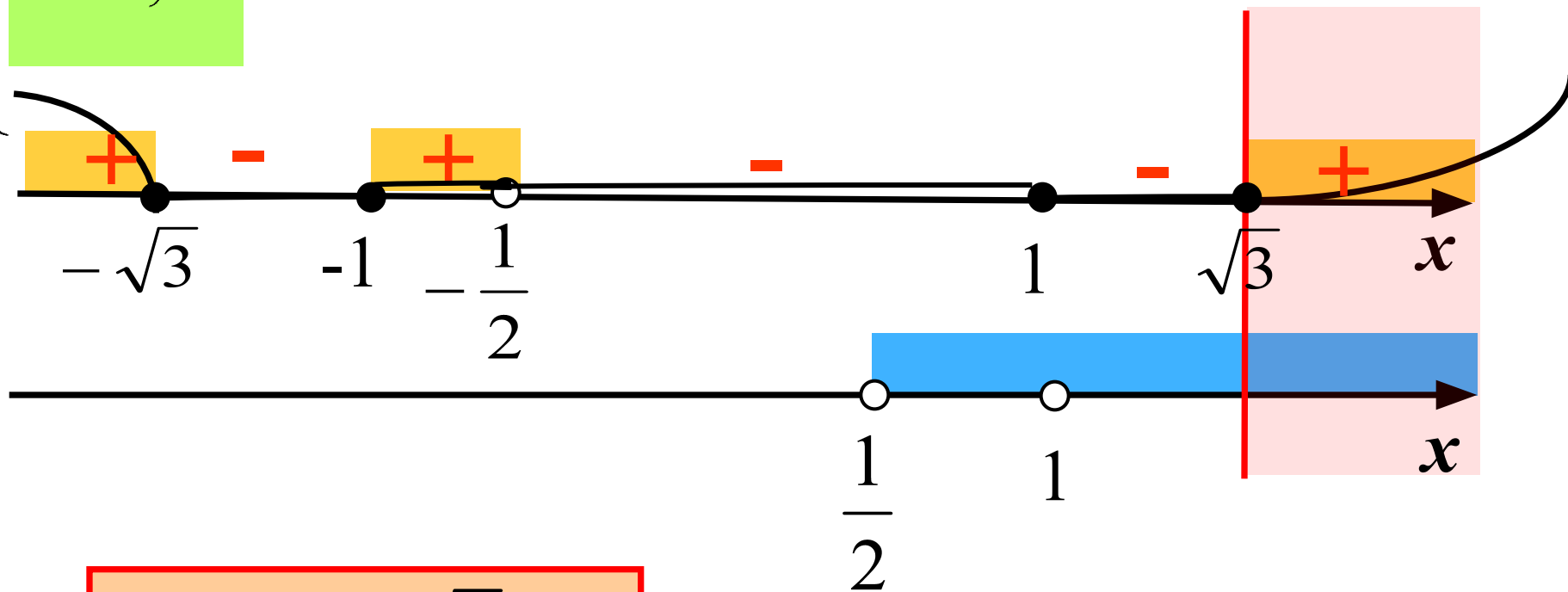
$$\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

Решаем методом интервалов.

$$1) x \neq -\frac{1}{2}$$

2) Нули функции :

$$\begin{cases} x = 1, \\ x^2 = 1, \\ x^2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = \pm 1, \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$



Ответ : $[\sqrt{3}; \infty)$

Решить неравенство :

$$\log_{\frac{1}{49}}(26 - 5x) \cdot \log_{6-x} \frac{1}{7} \geq 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 26 - 5x > 0, \\ 6 - x > 0, \\ 6 - x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{26}{5}, \\ x < 6, \\ x \neq 5; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{26}{5}, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{49}}(26-5x) \cdot \log_{6-x} \frac{1}{7} \geq 1;$$

$$\log_7(26-5x) \cdot \log_{6-x} 7^{-1} \geq 1;$$

$$-\frac{1}{2} \log_7(26-5x) \cdot (-\log_{6-x} 7) \geq 1;$$

$$\frac{\log_7(26-5x)}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6-x)} - 1 \geq 0;$$

$$\frac{\log_7(26-5x) - 2\log_7(6-x)}{2\log_7(6-x)} \geq 0;$$

$$\frac{\log_7(26-5x) - \log_7(6-x)^2}{2\log_7(6-x)} \geq 0;$$

$$\frac{\log_7(26 - 5x) - \log_7(6 - x)^2}{\log_7(6 - x)} \geq 0,$$

$$\frac{26 - 5x - (6 - x)^2}{6 - x - 1} \geq 0,$$

$$7 - 1 > 0$$

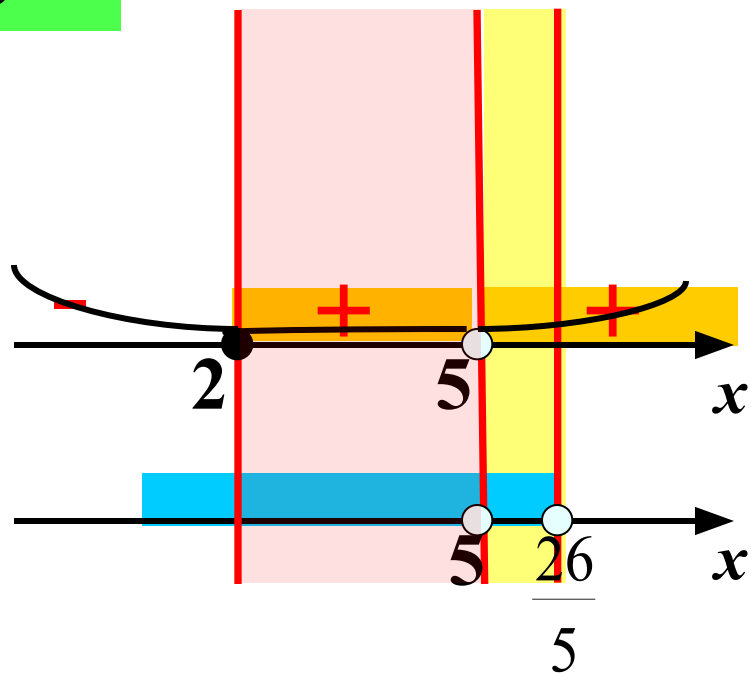
$$\frac{26 - 5x - 36 + 12x - x^2}{5 - x} \geq 0,$$

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} \geq 0,$$

$$\frac{(x - 2)(x - 5)}{x - 5} \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-2)(x-5)}{x-5} \geq 0, \\ x < \frac{26}{5}, \\ x \neq 5. \end{array} \right.$$

ОДЗ



Ответ : $[2; 5) \cup \left(5; \frac{26}{5} \right)$.

Решите неравенства:

Практикум

$$1) \log_{x^2} (x-1)^2 \leq 1;$$

$$2) \log_{0,25x^2} \left(\frac{6-x}{4} \right) \leq 1;$$

$$3) \log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0;$$

$$4) \log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \leq 3;$$

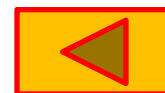
$$5) \log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7};$$

$$6) \log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0;$$

$$\log_{x^2} (x-1)^2 \leq 1;$$

$$\begin{cases} (x^2 - 1) \cdot ((x-1)^2 - x^2) \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

$$\text{ОТВЕТ : } (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2} \right] \cup (1; \infty).$$



$$\log_{0,25x^2} \left(\frac{6-x}{4} \right) \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,25x^2 - 1) \cdot \left(\frac{6-x-x^2}{4} \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{array} \right.$$

ОТВЕТ : $(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6)$.

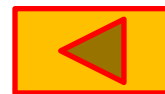


$$\log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0$$

$$\begin{cases} -3\log_{3x} 3 \cdot (2 + \log_3 3x) + 9 \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{3x} 3 - 1 \leq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} (3x - 1)(3 - 3x) \leq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\text{Ответ : } \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; \infty).$$



$$\log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \leq 3;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_{x+5} \frac{x-3}{x} \leq 3, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x > 3; \\ x > -5, \\ x \neq -4; \end{array} \right.$$

Т.к. $\frac{x}{x-3} > 0$, то

$$\log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 = 4 \log_{x+5} \left| \frac{3-x}{x} \right| = 4 \log_{x+5} \frac{x-3}{x}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+5-1) \cdot \left(\frac{x-3}{x} - x-5 \right) \leq 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x > 3; \\ x > -5, \\ x \neq -4; \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ : } (-5; -4) \cup [-3; -1] \cup (3; \infty).$$



$$\log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7};$$

$$2 \log_{x+8} \frac{x-7}{x+1} \leq 1 + \log_{x+8} \frac{x-7}{x+1};$$

$$\log_{x+8} \frac{x-7}{x+1} - 1 \leq 0;$$

$$\left\{ (x+7) \cdot \left(\frac{x^2 + 8x + 15}{x+1} \right) \geq 0, \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1, \\ x > 7; \\ x > -8, \\ x \neq -7; \end{array} \right.$$

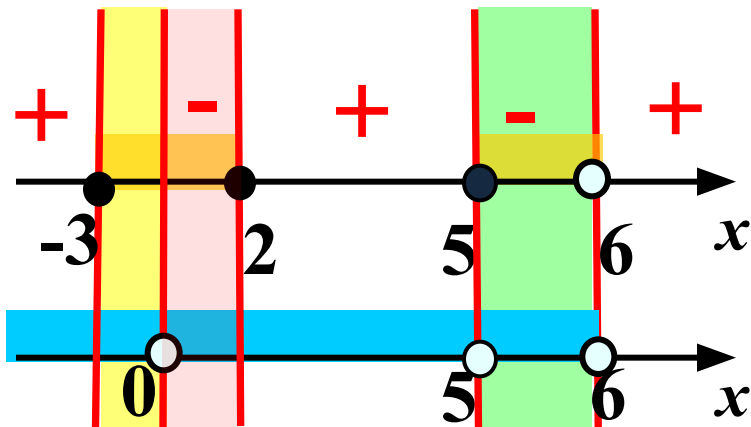
$$\text{ОТВЕТ : } (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; \infty).$$



$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0;$$

$$\log_{6-x} \left(\frac{x^2}{x-6} \right)^2 \leq 0; \quad 2 \log_{6-x} \left| \frac{x^2}{x-6} \right| \leq 0;$$

$$\begin{cases} \log_{6-x} \frac{x^2}{6-x} \leq 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (6-x-1)\left(\frac{x^2}{6-x}-1\right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (5-x)\left(\frac{x^2+x-6}{6-x}\right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$



$$\text{Ответ : } [-3; 0) \cup (0; 2] \cup (5; 6).$$

**Для тех, кто боится «модулей» -
2 способ:**

$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0;$$

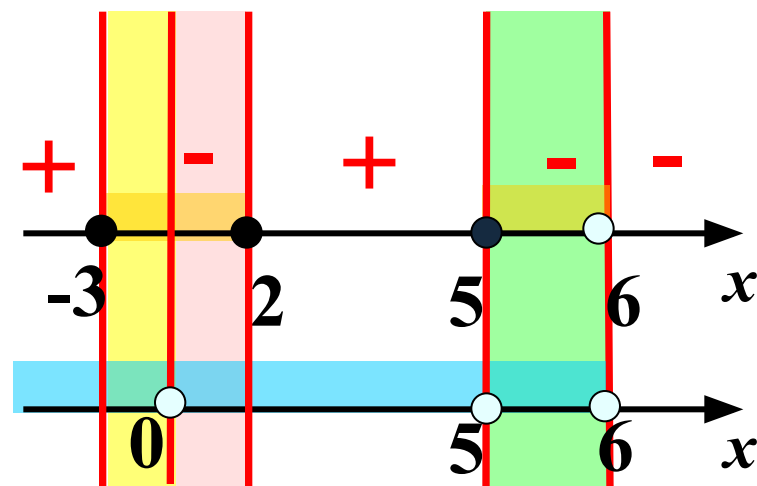
$$\log_{6-x} \left(\frac{x^2}{x-6} \right)^2 \leq 0;$$

$$\begin{cases} (5-x)\left(\frac{x^2}{x-6} - 1\right)\left(\frac{x^2}{x-6} + 1\right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$D < 0, \quad x^2 - x + 6 > 0.$$

$$\begin{cases} (5-x)\left(\frac{x^2 - x + 6}{x-6}\right)\left(\frac{x^2 + x - 6}{x-6}\right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(5-x)(x^2 + x - 6)}{(x-6)^2} \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

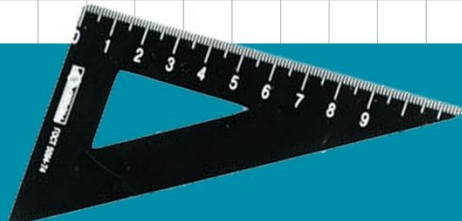
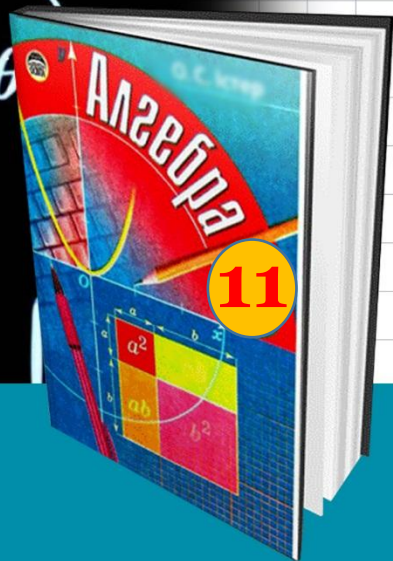


Ответ: $[-3; 0) \cup (0; 2] \cup (5; 6)$.

Методы с использованием свойств функции

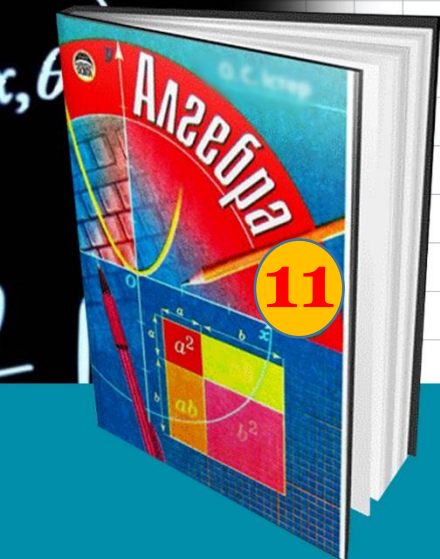
1) Использование неотрицательности функций

$$\text{I. } \begin{cases} f(x) + g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in D(f) \cap D(g).$$



$$\frac{1}{\theta} \int_{R_n} T(x) f(x, \theta) dx = M \left(T(x, \theta) \right) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2}$$

$$\int_{R_n} T(x) f(x, \theta) dx = M \left(T(x, \theta) \right)$$

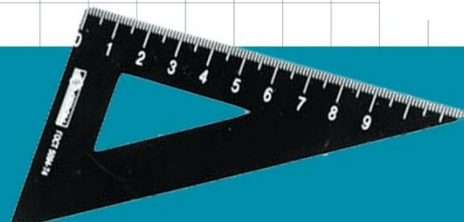


$$\text{II. } \begin{cases} f(x) + g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f) \cap D(g), \\ x \neq x_k, \end{cases}$$

где x_k – решения системы $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

$$\text{III. } \begin{cases} f(x) + g(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$



Решите неравенство $|x-1| + \log_2(x^2 - 2x + 5) - 2 \leq 0$

$$f_1(x) + f_2(x) \leq 0,$$

$$\text{где } f_1(x) = |x-1|, \quad f_2(x) = \log_2(x^2 - 2x + 5) - 2.$$

$$1) \text{ ООН: } x^2 - 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in R.$$

$$2) x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow f_2(x) \geq 0.$$

$$3) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) + f_2(x) \leq 0, \\ f_1(x) \geq 0, \quad f_2(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x-1| = 0, \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ \log_2 4 - 2 = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

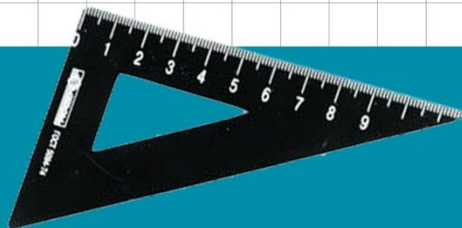
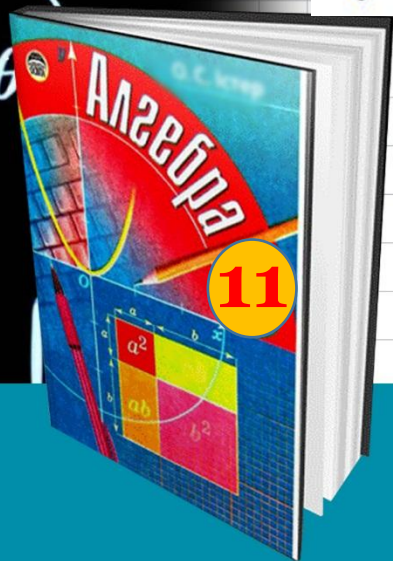
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Ответ: $\{1\}$

Методы с использованием свойств функции

2) Метод мини-максов (метод оценки)

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq A, \\ g(x) \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq A, \\ g(x) \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$



Решите неравенство $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 7^{|x-3|} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$\text{где } f(x) = \log_2(6x - x^2 - 7), \quad g(x) = 7^{|x-3|}.$$

Найдем $E(f)$, $E(g)$.

1) $E(f)$ — ?

$$\text{а) } t = t(x) = -x^2 + 6x - 7 = -(x^2 - 6x + 7) = -(x-3)^2 + 2 \Rightarrow t \leq 2.$$

$$\text{б) } \begin{cases} f(t) = \log_2 t, \\ t \in (0; 2]. \end{cases}$$

Так как функция $y = f(t)$ возрастает на промежутке $t \in (0; 2]$ ($a = 2 > 1$),

$$\text{то } E(f) = (-\infty; 1] \Leftrightarrow f(x) \leq 1.$$

2) $E(g) - ?$

a) $z = |x - 3|, z \geq 0;$

б) $\begin{cases} g(z) = 7^z, \\ z \geq 0. \end{cases}$

Так как функция $y = g(z)$ возрастает на промежутке $z \in [0; +\infty)$ ($a = 7 > 1$), то $E(g) = [1; +\infty) \Leftrightarrow g(x) \geq 1$.

$$3) \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq 1, \\ g(x) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \leq 1, \\ g(x) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2(6x - x^2 - 7) = 1, \\ 7^{|x-3|} = 1 = 7^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ \log_2 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

Методы с использованием свойств функции

3) Использование монотонности функций

Принцип монотонности для неравенств

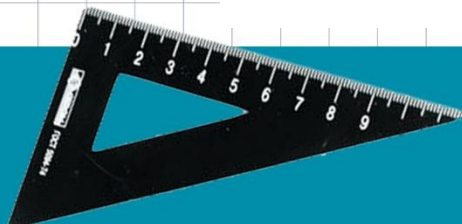
Пусть функция $y = f(t)$ определена и строго монотонна на промежутке M .

1. Если функция $y = f(t)$ возрастает на промежутке M , то

$$f(t_1(x)) - f(t_2(x)) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1(x) - t_2(x) \vee 0, \\ t_1(x) \in M, \\ t_2(x) \in M. \end{cases}$$

2. Если функция $y = f(t)$ убывает на промежутке M , то

$$f(t_1(x)) - f(t_2(x)) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(t_1(x) - t_2(x)) \vee 0, \\ t_1(x) \in M, \\ t_2(x) \in M. \end{cases}$$



3) Использование монотонности функций

Теорема о корне

1. Если в уравнении $f(x) = C = \text{const}$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на множестве M , то уравнение имеет на M не более одного корня.
2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго *возрастает*, а функция $y = g(x)$ непрерывна и строго *убывает* на множестве M , то уравнение имеет на M не более одного корня.

Решите неравенство $4(1 + \log_3(x^2 + 3x - 7)) \geq 18 - 3x - x^2$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 4\log_3(x^2 + 3x - 7) + (x^2 + 3x - 14) \geq 0$$

$$1) \ t = x^2 + 3x - 7, \ x^2 + 3x - 14 = t - 7. \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_3 t + t - 7 \geq 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) \geq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

где $f(t) = 4\log_3 t + t - 7$.

2) Функция $y = f(t)$ возрастает при $t > 0$,
как сумма двух возрастающих функций.

3) Так как $f(3) = 4 + 3 - 7 = 0$, то по теореме о корне $t = 3$
единственный корень уравнения $f(t) = 0$.

$$4) \begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) \geq f(3), \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 7 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$.