

Для системы случайных величин вводятся числовые характеристики, подобные тем, какие были для одной случайной величины. В качестве числовых характеристик системы (X, Y) обычно рассматривают моменты различных порядков. Математическое ожидание и дисперсия двумерной случайной величины служат соответственно средним значением и мерой рассеяния.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДВУМЕРНОЙ СВ

Математическим ожиданием двумерной случайной величины (X, Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M[X]$ и $M[Y]$, определяемых равенствами: для дискретной двумерной СВ

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_{x_i}, \quad M[Y] = m_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j \cdot p_{ij} = \sum_{j=1}^m y_j \cdot p_{y_j},$$

$$\text{здесь } p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad p_{x_i} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad p_{y_j} = \sum_{i=1}^n p_{ij};$$

для непрерывной двумерной СВ

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx, \quad M[Y] = m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy,$$

$$\text{здесь } f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$$

ДИСПЕРСИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дисперсией двумерной случайной величины (X, Y) называется совокупность двух дисперсий $D[X]$ и $D[Y]$, определяемых равенствами:

для дискретной двумерной СВ

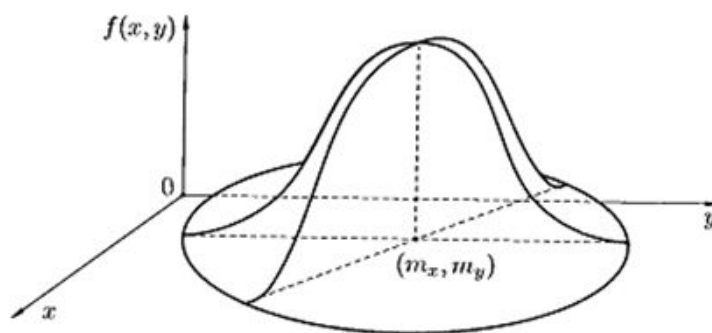
$$D[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^2 p_{ij} - m_x^2, \quad D[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j - m_y)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j^2 p_{ij} - m_y^2;$$

для непрерывной двумерной СВ

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - m_x^2,$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy - m_y^2.$$

Точка (m_x, m_y) на плоскости xOy представляет собой характеристику положения случайной точки (X, Y) , дисперсия – ее рассеивание (разброс) вокруг точки (m_x, m_y) .



Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями более общих характеристик СВ – начальных и центральных моментов.

Начальным моментом $\alpha_{k,s}$ порядка $k+s$ двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения k -ой степени СВ X на s -тую степень СВ Y :

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s].$$

Для дискретной двумерной СВ

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij},$$

для непрерывной двумерной СВ

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy.$$

В частности:

$$\alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = m_x, \quad \alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = m_y;$$

$$\alpha_{2,0} = M[X^2 Y^0] = M[X^2], \quad \alpha_{0,2} = M[X^0 Y^2] = M[Y^2].$$

Центральным моментом $\mu_{k,s}$ порядка $k+s$ двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения отклонений её составляющих от своих математических ожиданий, возведенных в степени k и s соответственно:

$$\mu_{k,s} = M \left[(X - m_x)^k (Y - m_y)^s \right] = M \left[\tilde{X}^k \cdot \tilde{Y}^s \right].$$

Здесь $\tilde{X} = X - m_x$ и $\tilde{Y} = Y - m_y$ – центрированные СВ X и Y .

Центральные моменты дискретной двумерной СВ (X, Y) вычисляются по формуле

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij},$$

а центральные моменты непрерывной двумерной СВ (X, Y) по формуле

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy.$$

В частности:

$$\mu_{0,0} = 1, \quad \mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0;$$

$$\mu_{2,0} = M \left[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0 \right] = D[X], \quad \mu_{0,2} = M \left[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2 \right] = D[Y].$$

В приложениях наиболее часто встречаются начальный момент второго порядка $\alpha_{1,1} = M[X \cdot Y]$ и центральный момент второго порядка

$$\mu_{1,1} = M \left[(X - m_x)(Y - m_y) \right] = M \left[\tilde{X} \cdot \tilde{Y} \right].$$

Определение. Корреляционным моментом или ковариацией двух случайных величин, образующих двумерную СВ (X, Y) , называется математическое ожидание произведения отклонений СВ X и СВ Y от своих математических ожиданий. Обозначается через K_{XY} или $\text{cov}(X, Y)$.

Таким образом, по определению

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[\tilde{X} \cdot \tilde{Y}].$$

Расчетные формулы для ковариации K_{xy} имеют следующий вид:

$$K_{XY} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} & \text{— для дискретных СВ } (X, Y); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy & \text{— для непрерывных СВ } (X, Y). \end{cases}$$

Ковариацию часто удобно вычислять как математическое ожидание произведения двух СВ минус произведение их математических ожиданий:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y] = \\ &= M[XY] - m_y M[X] - m_x M[Y] + m_x m_y = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]. \end{aligned}$$

Формулу для ковариации можно записать и так: $K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy - m_x m_y$.

1. Ковариация симметрична, т.е. $K_{XY} = K_{YX}$. Следует из определения ковариации.

2. Дисперсия СВ есть ковариация её с самой собой. Действительно:

$$K_{XX} = M[(X - m_x)(X - m_x)] = M[(X - m_x)^2] = D[X],$$

$$K_{YY} = M[(Y - m_y)(Y - m_y)] = M[(Y - m_y)^2] = D[Y].$$

3. Ковариация двух независимых случайных величин X и Y равна нулю:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy - m_x m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_1(x) f_2(y) dx dy - m_x m_y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy - m_x m_y = m_x m_y - m_x m_y = 0. \end{aligned}$$

4. Дисперсия суммы (разности) двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс (минус) удвоенная ковариация этих случайных величин:

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2K_{XY}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} D[X + Y] &= M\{(X + Y) - M[X + Y]\}^2 = M\{(X - M[X]) + (Y - M[Y])\}^2 = \\ &= M\{X - M[X]\}^2 + 2M\{(X - M[X])(Y - M[Y])\} + M\{Y - M[Y]\}^2 = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[X - Y] &= M\{(X - Y) - M[X - Y]\}^2 = M\{(X - M[X]) - (Y - M[Y])\}^2 = \\ &= M\{X - M[X]\}^2 - 2M\{(X - M[X])(Y - M[Y])\} + M\{Y - M[Y]\}^2 = D[X] + D[Y] - 2K_{XY}. \end{aligned}$$

5. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их среднеквадратических отклонений: $|K_{XY}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

Доказательство. Применяя свойство 4 к двум стандартным случайным величинам $\frac{X - m_x}{\sigma_x}$ и $\frac{Y - m_y}{\sigma_y}$, получим:

$$\begin{aligned} D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] &= D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] + D\left[\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] \pm \\ &\pm 2M\left\{\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} - M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right]\right)\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y} - M\left[\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right]\right)\right\} = \\ &= 1 + 1 \pm 2M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] = 2 \pm \frac{2}{\sigma_x \sigma_y} M[(X - m_x)(Y - m_y)] = 2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что дисперсия стандартной случайной величины равна 1.

Так как дисперсия есть неотрицательная величина, то $2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right) \geq 0$. Отсюда следует, что $-\sigma_x \sigma_y \leq K_{XY} \leq \sigma_x \sigma_y$, т.е. $|K_{XY}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

Из свойства 3 следует, что если ковариация не равна нулю, то СВ X и Y зависимы. Случайные величины X и Y в этом случае ($K_{XY} \neq 0$) называются *коррелированными*.

Однако из того, что ковариация равна нулю, не следует независимость СВ X и Y . При равной нулю ковариации, т.е. при $K_{XY} = 0$, СВ X и Y называются *некоррелированными*. Из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Из свойств ковариации можно видеть, что она характеризует и степень зависимости случайных величин, и их рассеяние (разброс) вокруг точки (m_x, m_y) . Размерность ковариации равна произведению размерностей СВ X и Y . В качестве числовой характеристики только зависимости СВ X и Y используется безразмерная величина – коэффициент корреляции.

Определение. Коэффициентом корреляции двух СВ X и Y называется отношение их ковариации (корреляционного момента) к произведению их среднеквадратических отклонений:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы:

$$|r_{XY}| \leq 1 \text{ или } -1 \leq r_{XY} \leq 1.$$

Доказательство. Так как $|K_{XY}| \leq \sigma_x \sigma_y$ (свойство 5 ковариации), то

$$|r_{xy}| = \frac{|K_{xy}|}{\sigma_x \sigma_y} \leq \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y} = 1.$$

2. Если СВ X и Y независимы, то коэффициент корреляции равен нулю: $r_{XY} = 0$. Это следует из того, что для независимых СВ X и Y $K_{XY} = 0$ (свойство 3 ковариации).

3. Если СВ X и Y связаны линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то модуль коэффициента корреляции равен единице, $|r_{XY}| = 1$, причем $r_{XY} = 1$ при $a > 0$, и $r_{XY} = -1$ при $a < 0$.

Доказательство. Предварительно заметим, что $M[Y] = M[aX + b] = am_x + b$.

По определению ковариации получаем:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[(X - m_x)(aX + b - am_x - b)] = \\ &= M[aX^2 - am_x X - am_x X + am_x^2] = aM[(X - m_x)^2] = aD[X] \end{aligned}$$

Так как $D[Y] = D[aX + b] = a^2 D[X]$, то

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[X]} \sqrt{D[Y]}} = \frac{aD[X]}{\sqrt{D[X]} \cdot |a| \cdot \sqrt{D[X]}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & \text{при } a > 0, \\ -1, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

4. Если коэффициент корреляции по абсолютной величине равен единице, т.е. $|r_{XY}| = 1$, то СВ X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Доказательство. Пусть $r_{XY} = 1$. Тогда из выражения для дисперсии разности двух стандартных случайных величин (см. доказательство свойства 5 ковариации)

$$D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] = 2\left(1 - \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right)$$

получаем $D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] = 0$, т.е. $\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y} = c$ – постоянная.

$$\text{Но } c = M[c] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] - M\left[\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right] = 0 - 0 = 0.$$

$$\text{Значит, } \frac{X - m_x}{\sigma_x} = \frac{Y - m_y}{\sigma_y}, \text{ и } Y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x) + m_y.$$

$$\text{При } r_{XY} = -1 \text{ получим } Y = -\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x) + m_y.$$

Таким образом, при $r_{XY} = \pm 1$ СВ X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Итак:

- 1) для независимых СВ коэффициент корреляции равен нулю: $r_{XY} = 0$; равенство нулю коэффициента корреляции означает их некоррелированность, но не независимость;
- 2) для линейно связанных СВ модуль коэффициента корреляции равен единице: $|r_{XY}| = 1$; в остальных случаях коэффициент корреляции принимает значения из интервала $(-1, 1)$: $-1 < r_{XY} < 1$;
- 3) говорят, что СВ связаны положительной корреляцией, если $r_{XY} > 0$ и отрицательной корреляцией, если $r_{XY} < 0$;
- 4) чем ближе модуль коэффициента корреляции к единице, тем больше оснований считать, что СВ связаны линейной зависимостью.

Корреляционные моменты и дисперсии двумерной СВ (X, Y) обычно задаются корреляционной матрицей:

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{bmatrix}.$$

Матрицы симметричны, так как $K_{YX} = K_{XY}$.

Для двумерных СВ (X, Y) помимо совместных законов распределения определяются и условные законы распределения. Эти законы распределения обладают всеми свойствами безусловных законов и по ним с использованием известных формул (после замены в них безусловных законов на условные) могут быть вычислены числовые характеристики, которые называются условными.

Определение. Условным математическим ожиданием одной из СВ, входящих в систему (X, Y) называется её математическое ожидание, вычисляемое при условии, что другая СВ приняла определенное значение (или попала в заданный интервал).

Обозначения: $M[Y/X = x]$ или $M[Y/x]$ и $M[X/y]$.

Формулы для вычисления условного математического ожидания для дискретных СВ:

$$M[Y/x_i] = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j/x_i), \quad M[X/y_j] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i/y_j),$$

где $p(y_j/x_i) = P\{Y = y_j/X = x_i\}$, $p(x_i/y_j) = P\{X = x_i/Y = y_j\}$;

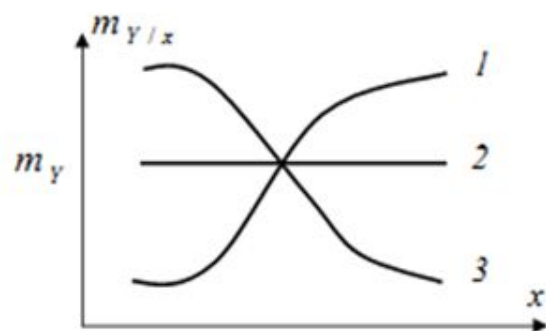
для непрерывных СВ:

$$M[Y/x] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y/x) dy, \quad M[X/y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x/y) dx,$$

где $f(y/x)$ и $f(x/y)$ – условные плотности распределения СВ Y и X .

Условное математическое ожидание СВ Y при заданном значении СВ $X = x$, рассматриваемое как функция x , т.е. $M[Y/x] = \varphi(x)$, называется *функцией регрессии* или просто *регрессией* Y на x . Аналогично, $M[X/y] = \varphi(y)$ – регрессия X на y .

Графики этих функций называются соответственно *линиями* (или кривыми) *регрессии* Y на x и X на y . Если обе функции регрессии Y на x и X на y линейны, то говорят, что СВ X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.



На рисунке линия регрессии 1 указывает, что между СВ X и Y имеется положительная корреляционная зависимость: при увеличении значения x более вероятны большие значения Y (среднее значение Y увеличивается), т.е. $K_{XY} > 0$ и $r_{XY} > 0$. Линия регрессии 2 показывает, что величины СВ X и Y независимы, а линия регрессии 3 – что между СВ X и Y существует отрицательная корреляционная зависимость, т.е. $K_{XY} < 0$ и $r_{XY} < 0$.

В практических приложениях теории вероятностей наиболее часто используется нормальное (гауссовское) распределение двумерной СВ.

Определение. Двумерная СВ (X, Y) называется распределенной по нормальному закону, если её совместная плотность распределения имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\},$$

где $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, r = r_{XY}$ – параметры этого распределения.

Можно доказать, что m_x и m_y – математические ожидания СВ X и СВ Y , σ_x и σ_y – их среднеквадратические отклонения (σ_x^2 и σ_y^2 – соответственно дисперсии), а $r = r_{XY}$ – коэффициент корреляции СВ X и Y .

Если компоненты двумерной нормально распределенной СВ некоррелированы ($r_{XY} = 0$), то совместная плотность распределения СВ (X, Y) принимает вид

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp \left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right], \end{aligned}$$

т.е. $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, где $f_1(x), f_2(y)$ – плотности распределения СВ X и СВ Y .

Отсюда следует вывод: некоррелированные нормально распределенные случайные величины являются также и независимыми. Справедливо и обратное утверждение: если нормально распределенные случайные величины независимы, то они и некоррелированы.

Таким образом, для нормально распределенных случайных величин термины «независимость» и «некоррелированность» эквивалентны.

В геометрической интерпретации совместная двумерная нормальная плотность $f(x,y)$ представляет собой холмообразную поверхность, вершина которой находится над точкой (m_x, m_y) плоскости xOy .

