

Одномерная оптимизация.

Методы дихотомии, золотого сечения, Ньютона, секущих.



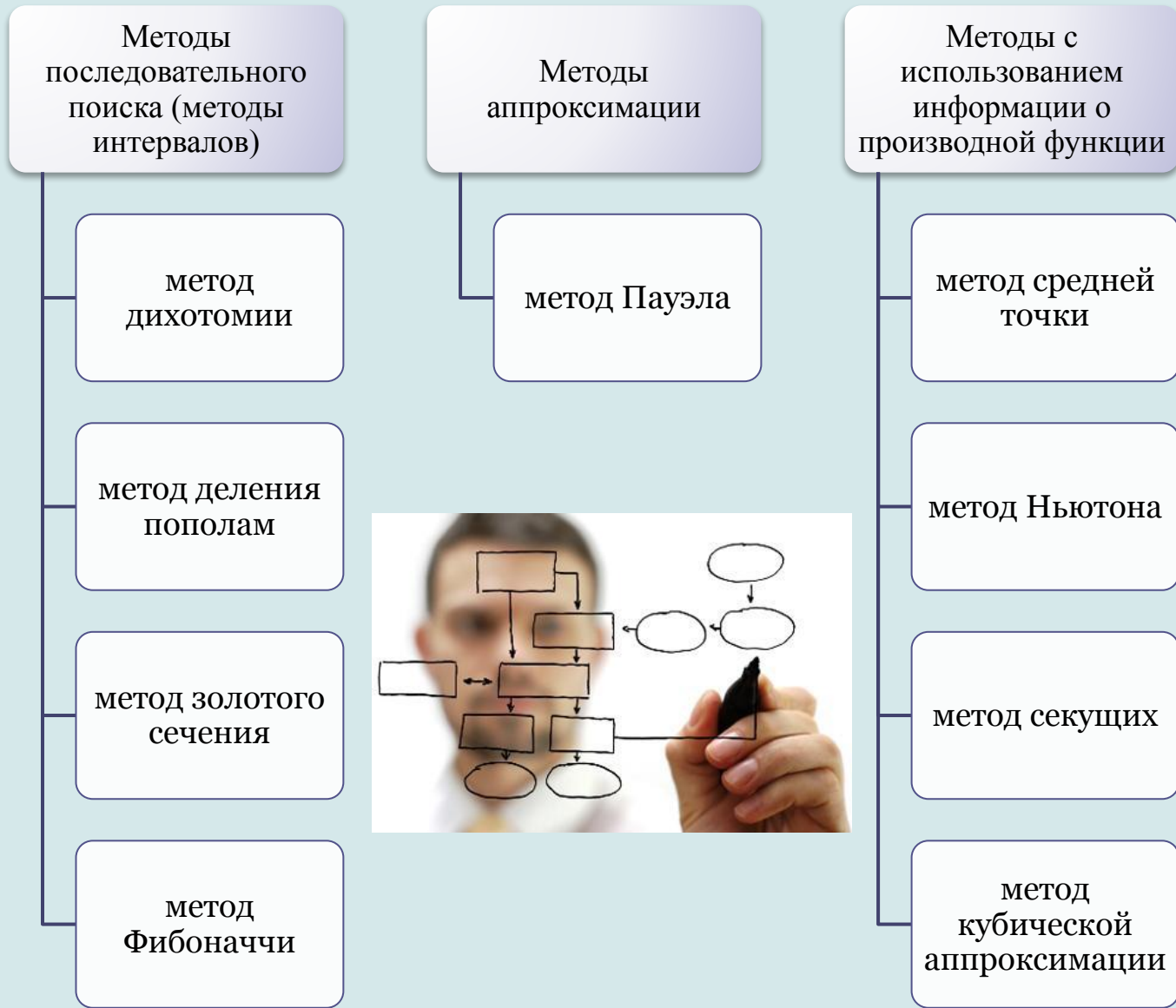
Оптимизация

Оптимизация (от лат. «optimus»-наилучший) – поиск наилучшего варианта, при наличии множества альтернативных.

Задача для решения методом оптимизации состоит в минимизации вещественнозначной функции $f(x)$ N -ного аргумента x , компоненты которого удовлетворяют системе ограничений в виде уравнений $H_k(x)=0$, $k=1, 2, \dots, m$ или неравенств $g_j(x) \geq 0$, $j=m+1, \dots, s$.

Задачи без ограничений с $N=1$ называются задачами одномерной оптимизации

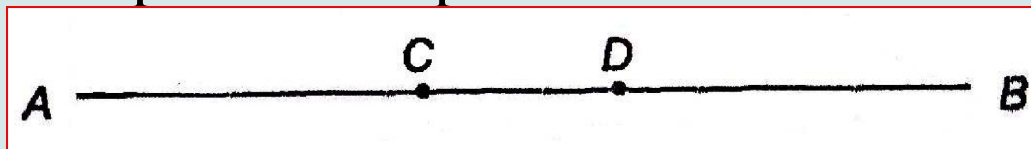
Методы одномерной оптимизации





Метод золотого сечения

- Отрезок AB разделен точкой D в пропорции золотого сечения, если отношение всей длины отрезка к длине большей его части равно отношению длины большей его части к длине меньшей, т.е.
- Пусть длина $AB = 1$, а $AD = x$. $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}$ Тогда, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ откуда $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Понятно, что больший отрезок можно было бы отложить не от левого, а от правого конца отрезка. Тогда получили бы точку золотого сечения C , симметричную т. D относительно центра, и $AC = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Точку C называют первой, а D второй точкой золотого сечения. Эти точки обладают замечательными свойствами.
- Рисунок - Первая и вторая точка золотого сечения



Алгоритм

- На первой итерации принимаем $a_1 = a$, $b_1 = b$ и вычисляем

$$c_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1) + a_1, \quad d_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b_1 - a_1) + a_1.$$

- Далее, получив значения функции f в точках c_1 и d_1 , сравниваем их.

- Если $f(c_1) \leq f(d_1)$, то $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$, $d_2 = c_1$,

$$c_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_2 - a_2) + a_2$$

- Если же $f(c_1) > f(d_1)$, то $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = d_1$,

$$d_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b_2 - a_2) + a_2.$$



- Далее сравниваем $f(c_2)$ с $f(d_2)$, определяя новые значения a_3 , b_3 , и т.д. до тех пор, пока не выполнится $\varepsilon_i = \frac{b_i - a_i}{2} \leq \varepsilon$, где ε — требуемая точность.
- На каждой итерации длина локализующего отрезка уменьшается в $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ раз, следовательно
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{i-1} (b - a).$$



Пример расчёта методом золотого сечения

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{2}{x}$, $a = 0.5$, $b = 3.5$ и найдем точку минимума с погрешностью $\varepsilon = 0.5$.

1) $a_1 = 0.5$, $b_1 = 3.5$,

$$c_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (3.5 - 0.5) + 0.5 = 1.646,$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (3.5 - 0.5) + 0.5 = 2.354,$$

$$f(c_1) = 2.861 < f(d_1) = 3.204;$$

2) $a_2 = a_1 = 0.5$, $b_2 = d_1 = 2.354$, $d_2 = c_1 = 1.646$,

$$c_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (2.354 - 0.5) + 0.5 = 1.208,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2.354 - 0.5}{2} = 0.927 > 0.5$$

поэтому продолжаем

$$f(c_2) = 2,864, \quad f(d_2) = f(c_1) = 2,861,$$

$$f(c_2) > f(d_2);$$

$$3) \quad a_3 = c_2 = 1.208, \quad b_3 = b_2 = 2.354, \quad c_3 = d_2 = 1.646,$$

$$d_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(2,354 - 1,208) + 1,208 = 1,916,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2,354 - 1,208}{2} = 0,573 > 0,5 \quad \text{поэтому продолжаем}$$

$$f(c_3) = f(d_2) = 2,861, \quad f(d_3) = 2,96,$$

$$f(c_3) < f(d_3);$$

$$4) \quad a_4 = a_3 = 1.208, \quad b_4 = d_3 = 1.916, \quad d_4 = c_3 = 1.646,$$

$$c_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(1,916 - 1,208) + 1,208 = 1,478,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1,916 - 1,208}{2} = 0,354 < 0,5 \quad \text{т.е. это последняя итерация}$$

$$\text{Принимаем } x_m = \frac{1,916 + 1,208}{2} = 1,562.$$