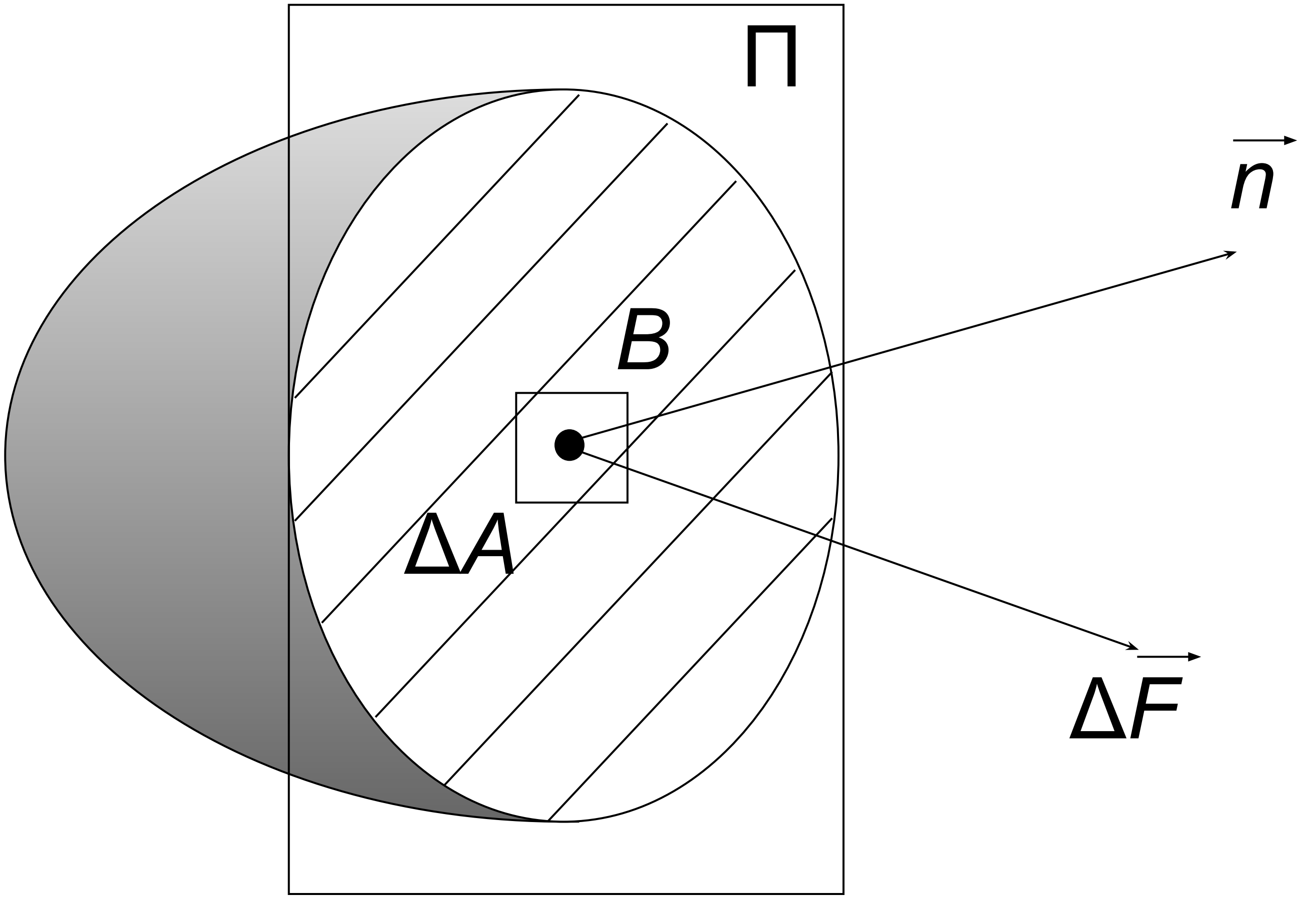
Лекция № 3

Понятия о напряжениях.



Выделим в сечении малую площадку ΔA в окрестности точки B с нормалью n, в которой действует сила ΔF. За среднее напряжение на площадке принимаем отношение

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

В пределе получаем:

$$p_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

где p_n – ***полное напряжение*** в точке *B.*

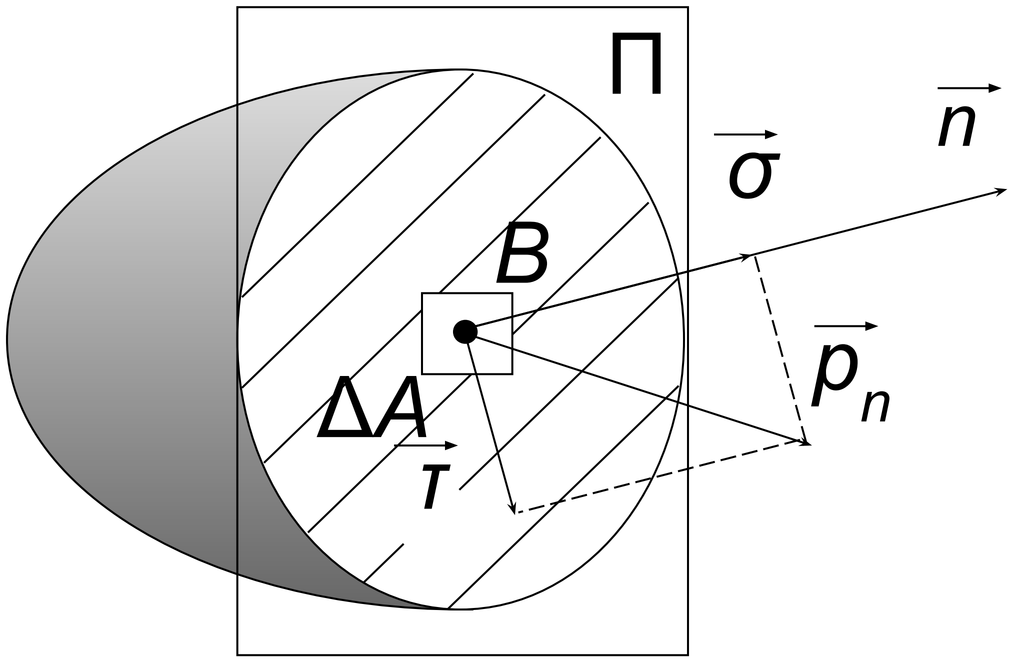
Размерность напряжений:

$$\left[p_n\right] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$$

Напряжением называется интенсивность внутренней силы в данной точке поперечного сечения

Напряжение - это количественная мера интенсивности внутренних сил.

Напряжение, как векторная величина, может быть представлено нормальной и касательной составляющими (по отношению к площади сечения).



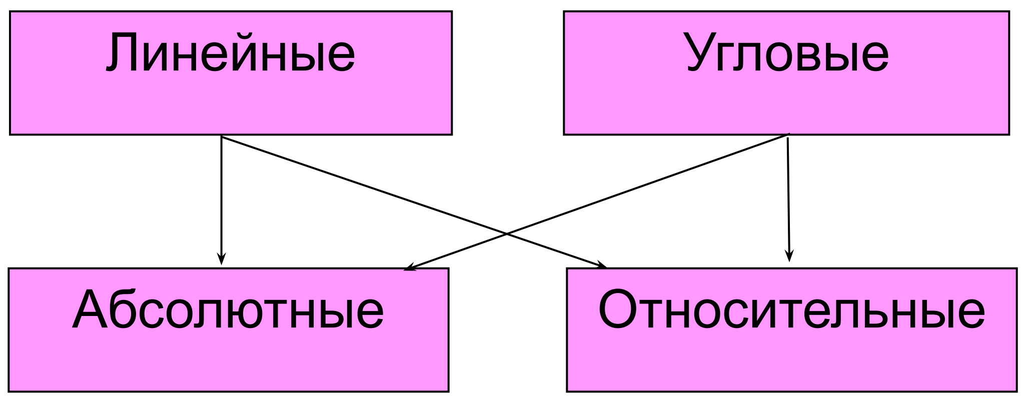
Нормальную и касательную составляющие вектора напряжений будем обозначать

σ и **τ**

Деформации.

Деформацией называется изменение размеров и формы тела под воздействием внешних сил.

Деформации бывают:



Линейные деформации

Абсолютной линейной деформацией Δl называется разность между конечной $l_к$ и начальной длиной $l_н$ отрезка $\overline{AB}$:

$$\Delta l = l_к - l_н = A'B' - AB$$

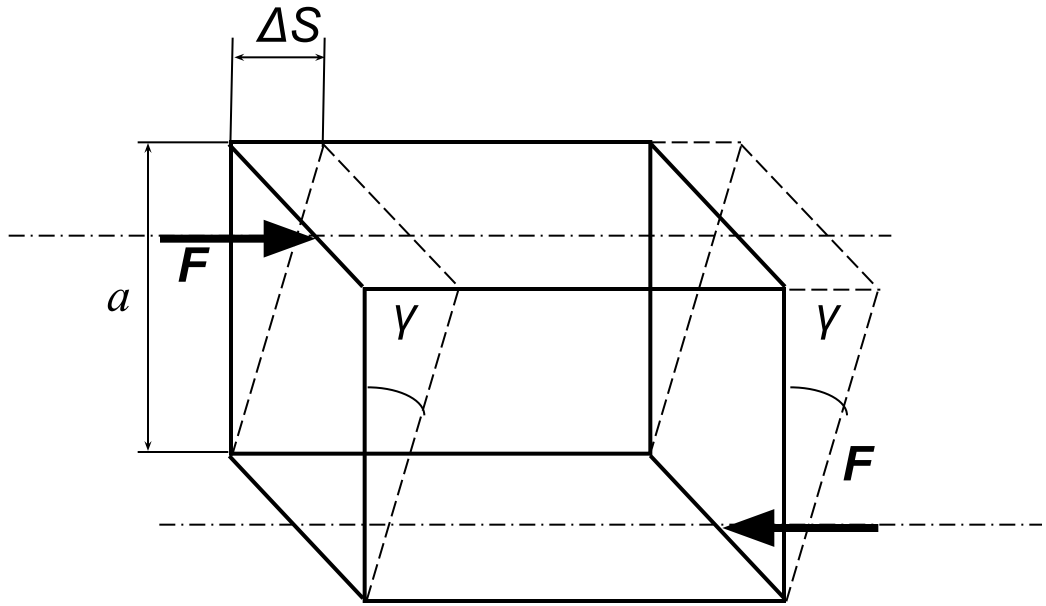
Относительной линейной деформацией называется безразмерная величина, равная:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\Delta l}{l}$$

Угловые деформации

Абсолютная угловая деформация **(*угол сдвига*)** в точке *O* в плоскости *DOC это изменение прямого угла под действием внешних сил:*

$$\gamma_{DOC} = \lim_{DO \to 0, CO \to 0} \left(\angle DOC - \angle D'O'C' \right).$$



Относительной угловой деформацией (углом сдвига) называется отношение полной деформации ΔS к расстоянию между сдвигающимися плоскостями a:

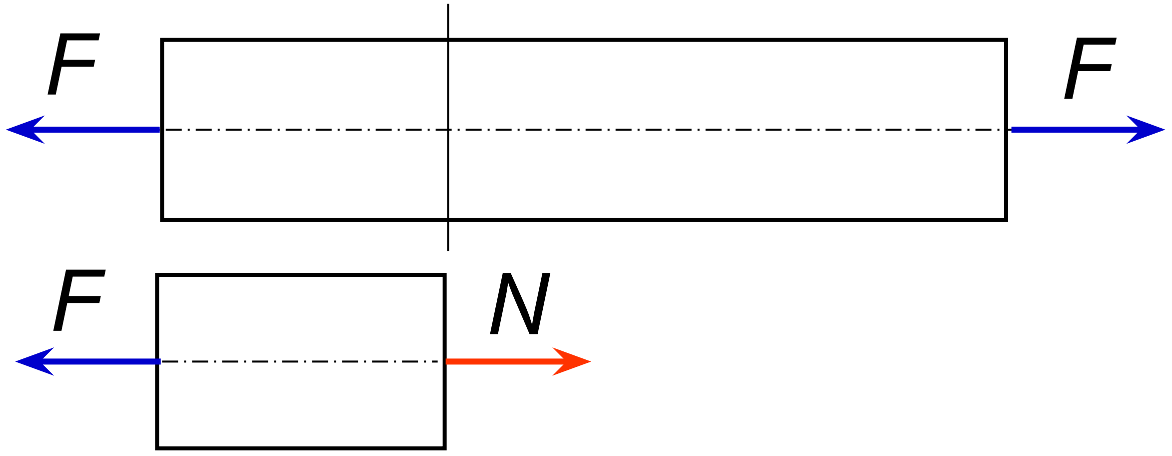
$$tg\gamma = \frac{\Delta S}{a}$$

т.к. $\gamma \to 0$, то: $\gamma \cong tg\gamma$

РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.

Растяжение – сжатие, это способ нагружения стержня, при котором внутренние силы в поперечном сечении приводятся к силе, *перпендикулярной* поперечному сечению и приложенной в *центре тяжести* сечения.

Напряжения при растяжении.



Нормальное напряжение для всех точек сечения будет одним и тем же

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

где A - площадь поперечного сечения.

Закон Гука при растяжении.

В ***упругой области нагружения существует прямая пропорциональная зависимость между относительной линейной деформацией и нормальным напряжением.***

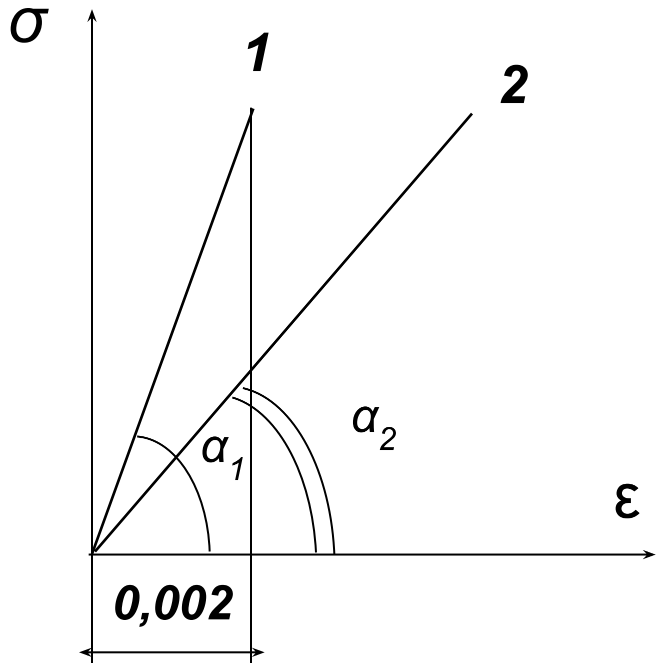
$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

где: E – ***модуль Юнга*** – модуль продольной упругости (модуль упругости первого рода) - справочная величина, для каждого материала своя и неизменная.

Размерность: $$E = \left[\frac{Н}{м^2} \right] = [Па]$$

$E_{стали} = 2 \cdot 10^5$ МПа;
$E_{алюминия} = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

ε - относительная линейная упругая деформация. Величина безразмерная.



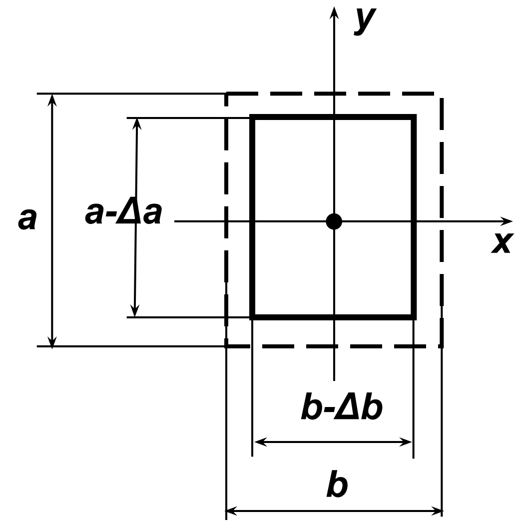
Диаграммы линейного деформирования

1 – сталь;
2 – алюминий.

Экспериментально показано, что $\varepsilon_{\text{стали}} = 0{,}002$.

Чем пластичнее материал, тем меньше угол α.

Закон Пуассона.



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$ - относительная продольная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta b}{b}$$

- относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon'$$ - показано экспериментально

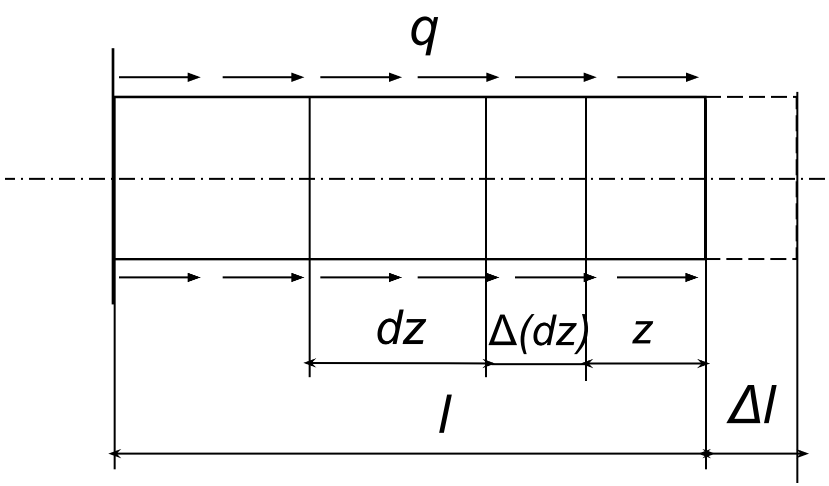
Отношение поперечной деформации к продольной деформации – величина постоянная для любого материала и её абсолютное значение называется ***коэффициентом Пуассона***.

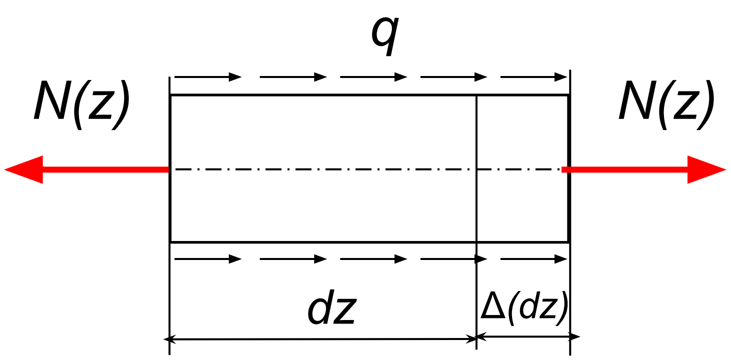
$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

$0 \le \mu \le 0{,}5$
– для любого изотропного материала

$\mu_{\text{пробки}} = 0;$
$\mu_{\text{чугуна}} = 0{,}23 \div 0{,}27;$
$\mu_{\text{стали}} = 0{,}29 \div 0{,}33;$
$\mu_{\text{меди}} = 0{,}31 \div 0{,}33;$
$\mu_{\text{каучука}} = 0{,}47.$

Выведем формулу Гука для полной линейной деформации





Для участка длиной *dz* имеем:

$$\sigma = \frac{N(z)}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

Подставим эти соотношения в закон Гука:

$$\frac{N(z)}{A} = E\frac{\Delta(dz)}{dz} \qquad \Delta\int_0^l dz = \int_0^l \frac{N(z)}{EA}dz$$

$$\boxed{\Delta l = \int_z \frac{N(z)}{\mathrm{EA}}dz}$$

формула Гука для стержня с распределенной нормальной нагрузкой

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EA}}$$

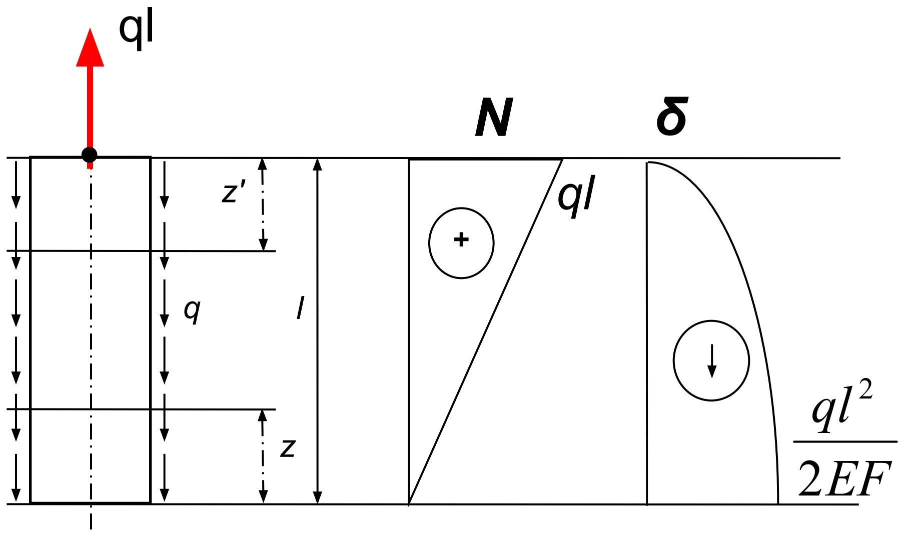
формула Гука для стержня с постоянной нормальной нагрузкой

Для стержня, имеющего *n* различных участков, получаем:

$$\boxed{\Delta l_{\Sigma} = \int_{i=1}^{n} \frac{N(z_i)}{\mathrm{E}_i\mathrm{A}_i}dz_i}$$

EA - ***жесткость*** при растяжении-сжатии

Пример: определить удлинение стержня Δl, под воздействием распределенной силы q.



$0 \le z \le l$

$N(z) = qz$,

$N(0) = 0$,

$N(l) = ql$.

$0 \le z' \le l$

$N(z') = ql - qz'$,

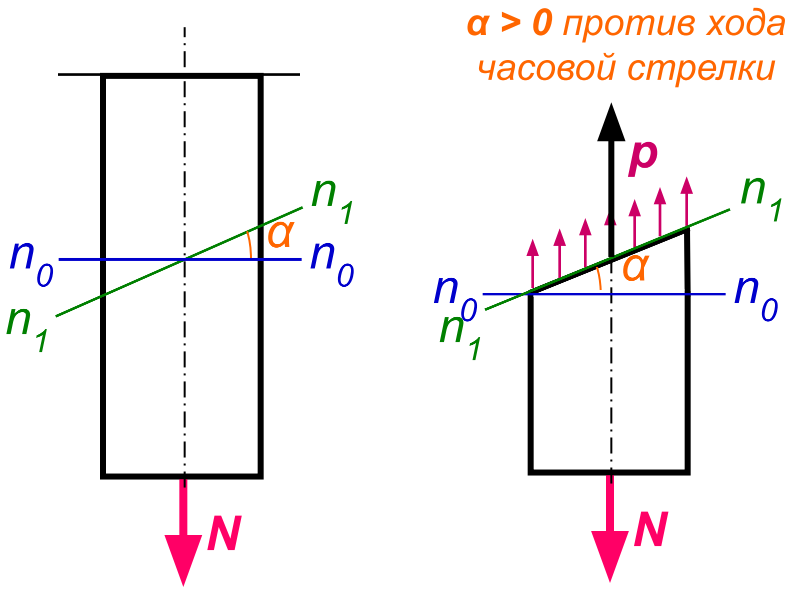
$N(0) = ql$,

$N(l) = 0$.

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z')}{EA} dz' = \int_0^l \left(\frac{ql - qz'}{EA} \right) dz' =$$

$$= \int_0^l \frac{ql}{EA} dz' - \int_0^l \frac{qz'}{EA} dz' = \frac{qlz'}{EA} \Big|_0^l - \frac{q(z')^2}{2EA} \Big|_0^l = \frac{ql^2}{2EA}$$

Напряжения в наклонных сечениях при растяжении-сжатии



Рассмотрим стержень, нагруженный растягивающей силой ***N***. Определим напряжения, возникающие в наклонном сечении ***n_1 – n_1***.Воспользуемся методом сечений.

A – площадь поперечного сечения ***n_0 – n_0***.

Тогда площадь наклонного сечения ***n_1 – n_1*** будет равна:

$$A_\alpha = \frac{A}{Cos\alpha}$$

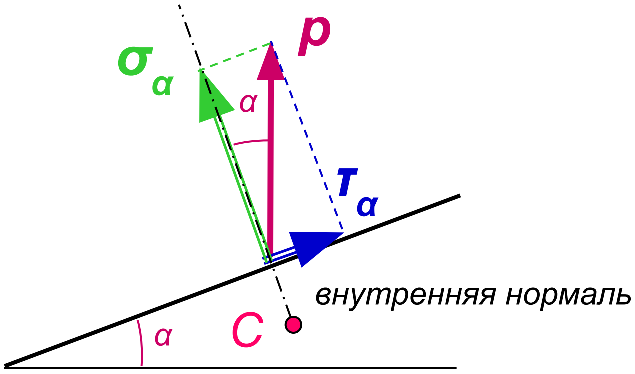
При равномерном распределении сил упругости, полное напряжение **p** в наклонном сечении будет равно:

$$p = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{NCos\alpha}{A} = \sigma Cos\alpha$$

Т.к. $\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$

Определим нормальные σ_α и касательные τ_α

напряжения в наклонном сечении $n_1 - n_1$:



$$\sigma_\alpha = pCos\alpha = \sigma Cos\alpha Cos\alpha = \sigma Cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = pSin\alpha = \sigma Sin\alpha Cos\alpha = \sigma \frac{Sin2\alpha}{2}$$

т.к. $2Sin\alpha Cos\alpha = Sin2\alpha$

Итак, получено: $\boxed{\sigma_\alpha = \sigma Cos^2\alpha}$ $\boxed{\tau_\alpha = \sigma \frac{Sin2\alpha}{2}}$

Следствие:

$\sigma_\alpha = \max; \tau_\alpha = 0$ при $\alpha = 0°$, *т.к.* $Cos0° = 1$

$\tau_\alpha = max$ при $\alpha = \pm 45°$, *т.к.* $Sin90° = 1$

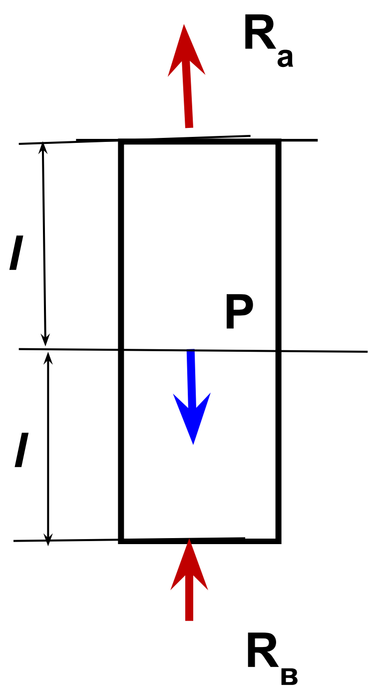
Вывод:

максимальные касательные напряжения возникают на площадках, расположенных под углом 45° к нормали поперечного сечения стержня.

Пример:

разрушение чугунного образца происходит по площадкам максимальных касательных напряжений.

Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии



Основное уравнение равновесия

$$\Sigma F_i(z) = R_a - P + R_b = 0$$

Дополнительное уравнение совместности деформаций

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

Изменение длины стержня при нагревании

Абсолютное удлинение стержня длиной l при повышении его температуры на Δt определяется по формуле:

$$\Delta l = \alpha \Delta t l,$$

где α - линейный коэффициент температурного расширения материала, (*1/град*)