Семинар 9. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Понятие о логарифмической производной

Рассмотрим сложную функцию $y = \ln z, z = \varphi(x)$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$y'_x = (\ln z)'_x = (\ln z)'_z \cdot z'_x \Rightarrow y'_x = \frac{1}{z} \cdot z'_x \Rightarrow y' = (\ln z)'_x = \frac{z'}{z}$$

Производная от логарифмической функции называется логарифмической производной функции.

Пример $y = \ln(x^2 + 4x + 5) \Rightarrow y' = \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Зависимость между переменными х,у иногда удобно задавать двумя уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (1), где t – вспомогательная переменная, (параметр). В общем случае, уравнения (1) определяют y как сложную функцию относительно x. Разрешив первое уравнение системы (1) относительно параметра t (если это возможно), получим $t = \theta(x), \theta -$ функция, обратная к функции φ Далее, исключая из уравнений (1) параметр t, получаем $y = \psi(\theta(x))$ (2). Пользуясь формулой (2) легко найти производную y'_x как производную сложной функции. Кроме того, существует правило для нахождения y'_x не требующее исключение параметра t (параметр невозможно исключить).

Теорема

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$,где $\varphi(t),\psi(t)$- дифференцируемые функции и $\varphi(t)\neq 0$производная этой функции есть

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} \quad (3).$$

Примеры с решениями.

1.Применяя логарифмическую производную вычислить производные следующих функций:

$1) y = x^{x^2}$

Решение Здесь основание и показатель степени зависят от *x*. Логарифмируя, получим

$$y = x^2 \ln x$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то *lny* есть сложная функция x и $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ Следовательно

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x\ln x \Rightarrow y' = yx(2+\ln x) \Rightarrow x^{x^2} x(1+2\ln x) = x^{x^2+1(2+\ln x)}$$

$2) y = (\sin x)^{tgx}$

Решение .Имеем $\ln y = tgx \cdot \ln\sin x$ откуда $\frac{y'}{y} = \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x} + tgx\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x} + 1 \Rightarrow y' = (\sin x)^{tgx}(1+\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x})$

$$3) y = \frac{(2x-1)^2\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$$

Решение. Здесь заданную функцию также полезно предварительно прологарифмировать

$$\ln y = 3(\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}$$

Получаем

$$y' = \frac{(2x-1)^2\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}} \cdot \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right)$$

4) $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$

Решение. заданную функцию также полезно предварительно прологарифмировать

$$\ln y = -x\ln x \cdot x\ln 2 \cdot 2x = -\ln 2 \cdot \ln x \cdot x^3$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln 2(\frac{1}{x} \cdot x^3 + 3x^2 \ln x) = -\ln 2 \cdot x^2(1 + 3\ln x)$$

следовательно $y' = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2 \cdot (-\ln 2 \cdot x^2(1 + 3\ln x))$

2.**Продифференцировать функции, заданные параметрическими уравнениями**

1.Найти $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ если $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Решение

$$x'_t = 3t^2 + 3; y'_t = 15t^4 + 15t^2 \Rightarrow y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$$

2.Найти $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ если $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

Решение $x_t^{'} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t; y_t^{'} = e^t\cos t - e^t\sin t \Rightarrow y_x^{'} = \dfrac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = e^{2t}$

3. Найти $y_x^{'} = \dfrac{y_t^{'}}{x_t^{'}}$ если $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = arctgt \end{cases}$

Решение $x_t^{'} = \dfrac{2t}{1+t^2}; y_t^{'} = \dfrac{1}{1+t^2} \Rightarrow y_x^{'} = \dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{1}{2t}$

Примеры для самостоятельного решения.

1.Применяя логарифмическую производную вычислить производные следующих функций

1. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+thx}{1-thx}}$ 2. $y = (\ln x)^x$ 3. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 4. $y = (x^2+1)^{\sin x}$ 5. $y = (tx2x)^{ctg\frac{x}{2}}$

6. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$ 7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - arctgx + \frac{1}{2}\ln x + 1}$

2. **Продифференцировать функции, заданные параметрическими уравнениями**

1. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t^2-1} \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$