ТЕМА 1.5. Элементы теории погрешностей и оценки точности геодезических измерений

1. Виды погрешностей измерений
2. Статистические закономерности случайных погрешностей.
3. Критерии точности результатов равноточных измерений.
4. Математическая обработка ряда равноточных измерений.
5. Понятие о неравноточных измерениях.

1. Виды погрешностей измерений

- Измерение - сравнение какой либо величины с другой однородной с ней величиной, принятой за единицу меры.

Виды измерений:

1. По характеру получаемой информации: абсолютные и относительные.
2. По степени автоматизации: визуальные и автоматизированные.
3. По условиям измерений: равноточные и неравноточные.

Виды измерений:

4. По измеряемой геодезической величине: угловые, линейные, высотные, гироскопические, координатные.

5. По методу получения измерения: прямые и косвенные

6. При камеральной обработке различают: необходимые и избыточные измерения.

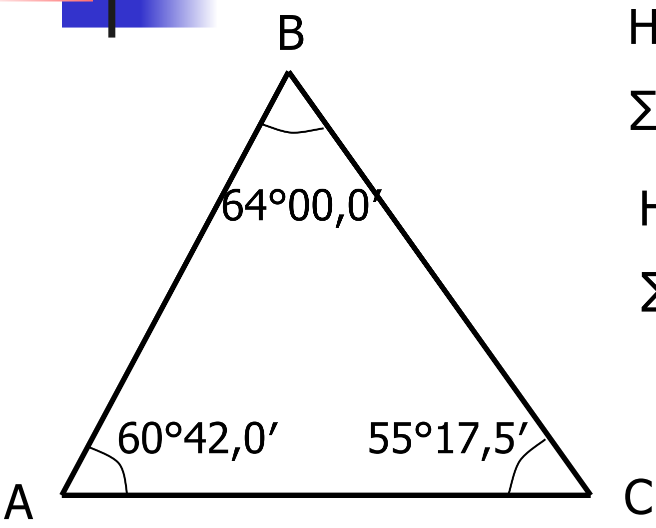
Виды погрешностей измерений

ПО ХАРАКТЕРУ ДЕЙСТВИЯ	ПО ИСТОЧНИКУ ПРОИСХОЖДЕНИЯ
ГРУБЫЕ	ПОГРЕШНОСТИ ПРИБОРОВ
СЛУЧАЙНЫЕ	ВНЕШНИЕ ПОГРЕШНОСТИ
СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ	ЛИЧНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

- Отличие полученного результата измерения (l) от истинного значения измеряемой величины X называется истинная погрешность измерения.
  - $\Delta = l - X$

- НЕВЯЗКА – разность суммы практически измеренных (или вычисленных) величин и теоретического его значения.

ПРИМЕР: В треугольнике измерены все углы теодолитом Т30. Вычислите невязку, сравните ее с допустимой и найдите уравненные значения углов.



Найдем сумму измеренных углов:

$\sum\beta_{изм} = 60°42,0' + 64°00,0' + 55°17,5' = 179°59,5'$

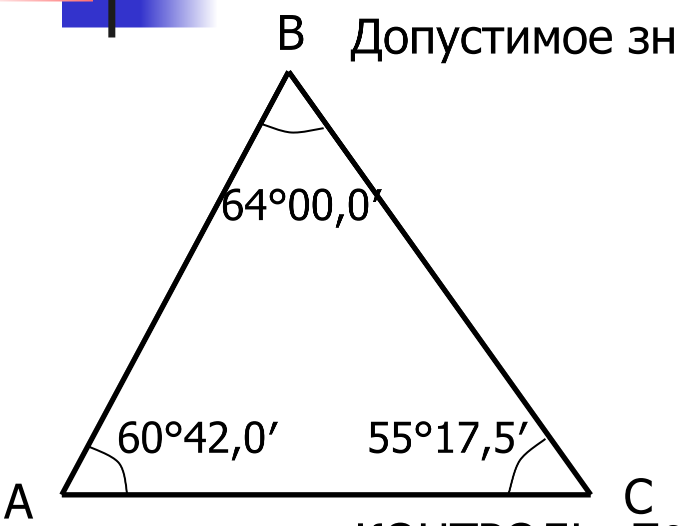
Найдем теоретическое значение суммы углов:

$\sum\beta_{теор} = 180°$

Невязка равна:

$f\beta = \sum\beta_{изм} - \sum\beta_{теор}$; $f_\beta = 179°59,5' - 180° = -0,5'$

ПРИМЕР: В треугольнике измерены все углы теодолитом Т30. Вычислите невязку, сравните ее с допустимой и найдите уравненные значения углов.



Допустимое значение невязки: $\text{доп}\, f_{\beta} = 1'\sqrt{n}$; $\text{доп}\, f_{\beta} = 1{,}7'$

Уравненные значения углов:

60°42,0′+0,5/3 = 60°42,2′

64°00,0′+0,5/3 = 64°00,2′

55°17,5′+0,5/3 = 55°17,6′

<u>КОНТРОЛЬ: $\sum \beta_{\text{урав}}$ = 60°42,2′+ 64°00,2′+ 55°17,6′= 180°</u>

2. Статистические закономерности случайных погрешностей

- 1. Свойство ограниченности
- 2. Свойство симметричности
- 3. Свойство унимодальности
- 4. Свойство компенсации

$$\lim_{n\to\infty}\left({[\Delta]}/{n}\right)=0$$

Свойство компенсации

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

$$\Delta_1 = l_1 - X; \qquad \Delta_2 = l_2 - X; \qquad \ldots \qquad \Delta_n = l_n - X;$$

$$[\Delta] = [l] - n \cdot X; \qquad \Rightarrow \qquad X = \frac{[l]}{n} - \frac{[\Delta]}{n}$$

К нулю (4-е свойство)

$$X = \frac{[l]}{n} = L;$$

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

1. Средняя квадратическая погрешность m, вычисляемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad [\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ... + \Delta_n^2 \qquad (1)$$

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

2. Средняя квадратическая погрешность m, вычисляемая по формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}, \qquad (2)$$

где δ – отклонения отдельных значений измеренной величины от арифметической середины, называемые вероятнейшие погрешности.

$\delta = l_i - L.$ *Контроль:* $[\delta] = 0.$

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

3. Точность арифметической середины

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

4. Двойные измерения:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \qquad M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}$$

где d – разность двукратно измеренных величин $d = h_{пр} - h_{обр}$;
n – число разностей (двойных измерений).

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

5. ***Предельная погрешность Δ*пред** определяется для теоретических расчетов допусков по формуле

$$\Delta_{\text{ïðåä}} = 3 \cdot m$$

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

6. ***Относительная погрешность*** – отношение абсолютной погрешности к значению самой измеренной величины. Относительную погрешность выражают в виде простой дроби, числитель которой – единица, а знаменатель – число, округленное до двух-трех значащих цифр с нулями.

ПРИМЕР: Средняя квадратическая погрешность измерения линии длиной $l = 110$ м равна $m_l = 2$ см. Определить относительную погрешность и предельную абсолютную и относительную погрешности.

Относительная погрешность равна $$\frac{m_l}{l} = \frac{2}{11000} = \frac{1}{5500}$$

Предельная абсолютная погрешность: $$\Delta_{\text{ïðåä}} = 3 \cdot m$$

Предельная относительная погрешность: $$\Delta_{\text{ïðåä}} = 3 \cdot 2 = 6\text{ñì}$$

$$\frac{\Delta_{\text{ïðåä}}}{l} = \frac{6}{11000} = \frac{1}{1800}$$

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

- Если известна функция общего вида $F = f(x, y, z, ...u)$, где $x, y, z, ..., u$ – независимые аргументы, полученные из наблюдений или проектного расчета со средними квадратическими погрешностями $m_x, m_y, m_z, ..., m_u$, соответственно, и функция имеет конечные частные производные $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, ... \partial f/\partial u$, то средняя квадратическая погрешность функции независимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функций по каждому из аргументов на средние квадратические погрешности соответствующих аргументов, т.е.

3. Критерии точности результатов равноточных измерений.

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 m_z^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 m_u^2}$$

4. Математическая обработка ряда равноточных измерений

- 1) Находят вероятнейшее значение измеренной величины по формуле арифметической середины .
- 2) Вычисляют отклонения каждого значения измеренной величины от значения арифметической середины. Контроль вычислений: [δ]= 0.

3) По формуле Бесселя (2) вычисляют среднюю квадратическую погрешность отдельного измерения.

- 4) По формуле (3) вычисляют среднюю квадратическую погрешность арифметической середины.
- **5**) Если измеряют линейную величину, то подсчитывают относительную среднюю квадратическую погрешность каждого измерения и арифметической середины.

6) При необходимости подсчитывают предельную погрешность одного измерения, которая может служить допустимым значением погрешности аналогичных измерений.

<u>Пример 4.2</u>. При контроле точности изготовления стеновой панели её длина измерена шесть раз. Требуется определить вероятнейшее значение длины и оценить точность выполненных измерений. Результаты измерений и вычислений записывают по форме, приведенной в таблице.

Номер измерения	l, мм	δ, мм	$\boldsymbol{\delta}^2$, мм^2	Вычисления
1	3206	0	0	$m_l = \sqrt{34/(6-1)} = 2{,}6 мм$
2	3210	+4	16	
3	3205	-1	1	$M = 2{,}6/\sqrt{6} = 1{,}1 мм$
4	3203	-3	9	$\frac{m_l}{l} = \frac{1}{1200}$ $\frac{M}{l} = \frac{1}{2900}$
5	3208	+2	4	
6	3204	-2	4	$\Delta_{ïðåä} = 7{,}8 ìì$
Сумма	***19236***	***0***	***34***	
Среднее	3206			

5. Понятие о неравноточных измерениях.

- Неравноточными называют измерения, выполненные в различных условиях, инструментами различной точности, различным числом приемов, с разными средними квадратическими погрешностями.

5. Понятие о неравноточных измерениях.

- Надежность каждого результата измерения, выраженная числом, называется его весом.

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2},$$

- μ- средняя квадратическая погрешность единицы веса.

5. Понятие о неравноточных измерениях.

- Общий результат арифметической середины (весовое среднее)

$$\overline{X} = x_0 = \frac{l_1 \cdot p_1 + l_2 \cdot p_2 + \ldots + l_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

$$\overline{X} = x_0 == \frac{[p_i \cdot l_i]}{[p_i]}$$

Для оценки точности неравноточных измерений применяют следующие формулы:

1) средняя квадратическая погрешность единицы веса, когда даны истинные погрешности:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta^2 \cdot P]}{n}},$$

Для оценки точности неравноточных измерений применяют следующие формулы:

2) средняя квадратическая погрешность единицы веса, когда даны вероятнейшие погрешности:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\vartheta^2 \cdot P\right]}{n-1}},$$

Для оценки точности неравноточных измерений применяют следующие формулы:

3) средняя квадратическая погрешность весового среднего:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

ПРИМЕР: Длина цеха была измерена три раза: два раза рулеткой с относительной средней квадратической погрешностью 1/2000, третий раз лазерной рулеткой. Найти наиболее надежное значение длины цеха.

- Результаты измерений:

$l_1 = 15{,}025$ м; $l_2 = 15{,}029$ м; $l_3 = 15{,}020$ м

1. Запишем средние квадратические погрешности каждого измерения:

$$\frac{m_{l_1}}{l_1} = \frac{m_{l_2}}{l_2} = \frac{1}{2000}, \qquad m_{l_1} = \frac{l_1}{2000}; m_{l_2} = \frac{l_2}{2000};$$

$$m_{l_1} = \frac{15{,}025}{2000} = 7{,}5\,мм; m_{l_2} = \frac{15{,}029}{2000} = 7{,}5\,мм; m_{l_3} = 1\,мм$$

2. Вычислим вес каждого измерения:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \qquad \mu = m_{l_3}$$

$$p_1 = \frac{{m_{l_3}}^2}{m_{l_1}^2}, \qquad p_2 = \frac{{m_{l_3}}^2}{m_{l_2}^2}, \qquad p_3 = \frac{{m_{l_3}}^2}{m_{l_3}^2}$$

$$p_1 = \frac{1^2}{7{,}5^2} = 0{,}018, \qquad p_2 = \frac{1^2}{7{,}5^2} = 0{,}018, \qquad p_3 = \frac{1^2}{1^2} = 1$$

3. Вычислим весовое среднее:

$$\overline{X} = x_0 == \frac{[p_i \cdot l_i]}{[p_i]}$$

$$\overline{X} = x_0 = \frac{15,025 \cdot 0,018 + 15,029 \cdot 0,018 + 15,020 \cdot 1}{0,018 + 0,018 + 1} =$$

$$= \frac{15,560972}{1,036} = 15,020\,м$$