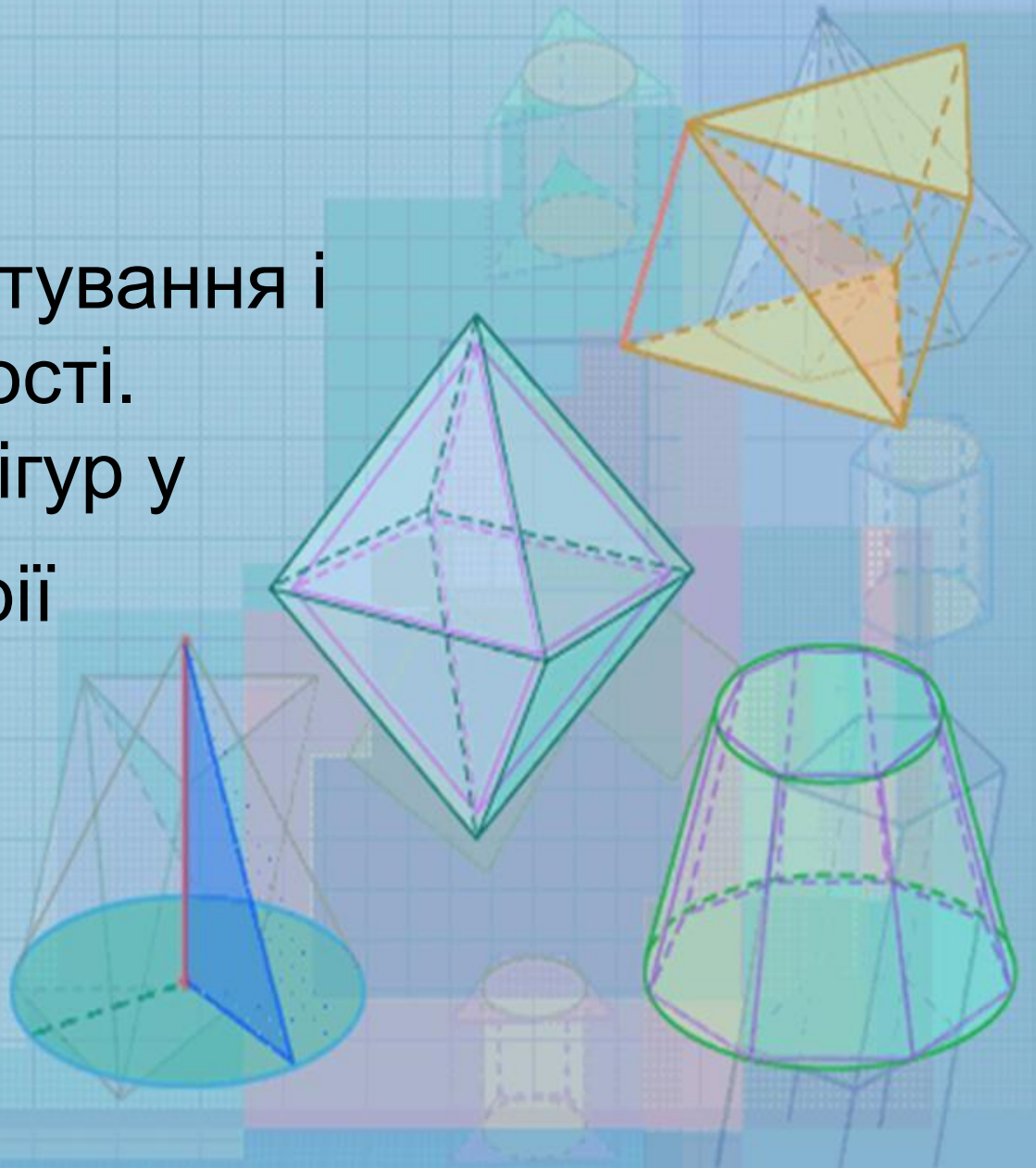


Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії



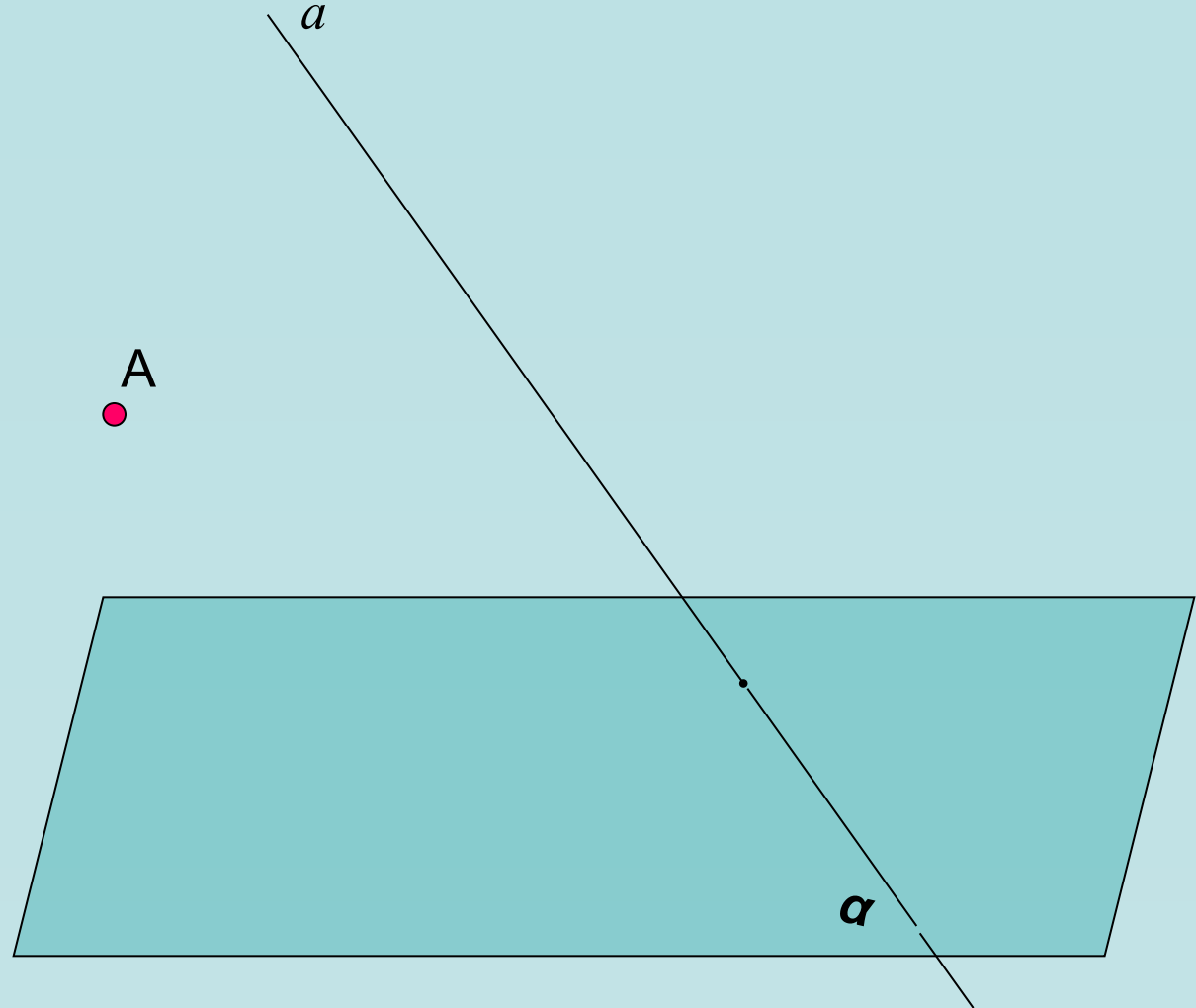
Ми почали вивчати *стереометрію* – геометрію у просторі. Як завжди нам необхідно вміти зображувати геометричні фігури, причому всі креслення ми і досі виконуємо на площині (на сторінці зошита, на дошці тощо). Яким чином просторову фігуру (наприклад , куб) можна «вкласти» до площини?

Для розв'язання цієї задачі приймається *метод паралельного проектування*. З'ясуємо його суть на прикладі найпростішої геометричної фігури – точки.

Таким чином, у нас є геометрична фігура у просторі – точка А.

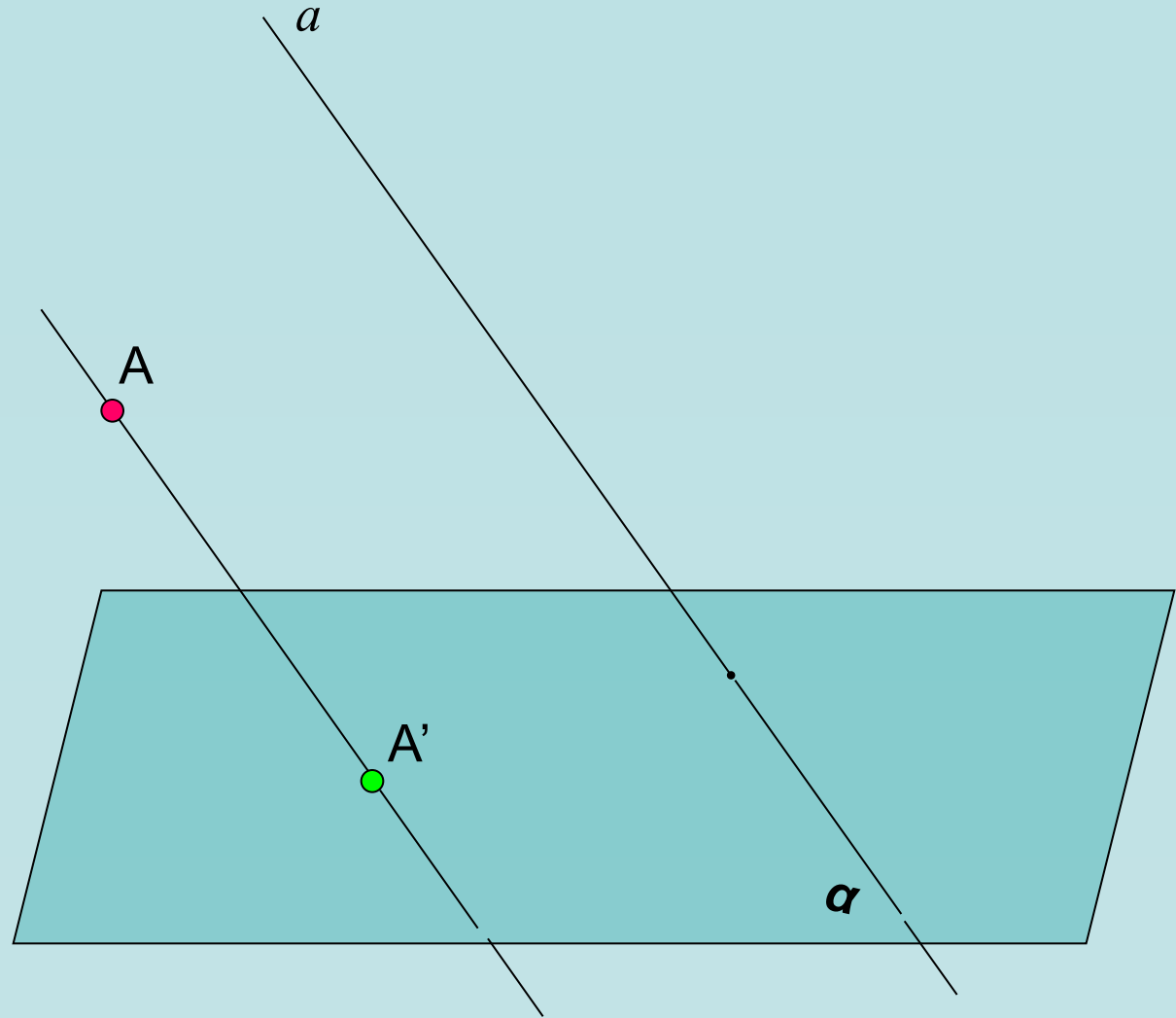


Оберемо у просторі довільну площину α (її ми будемо називати *площиною проєкцій*) та довільну пряму $a \cap \alpha$ (вона задає *напрямок паралельного проєктування*).

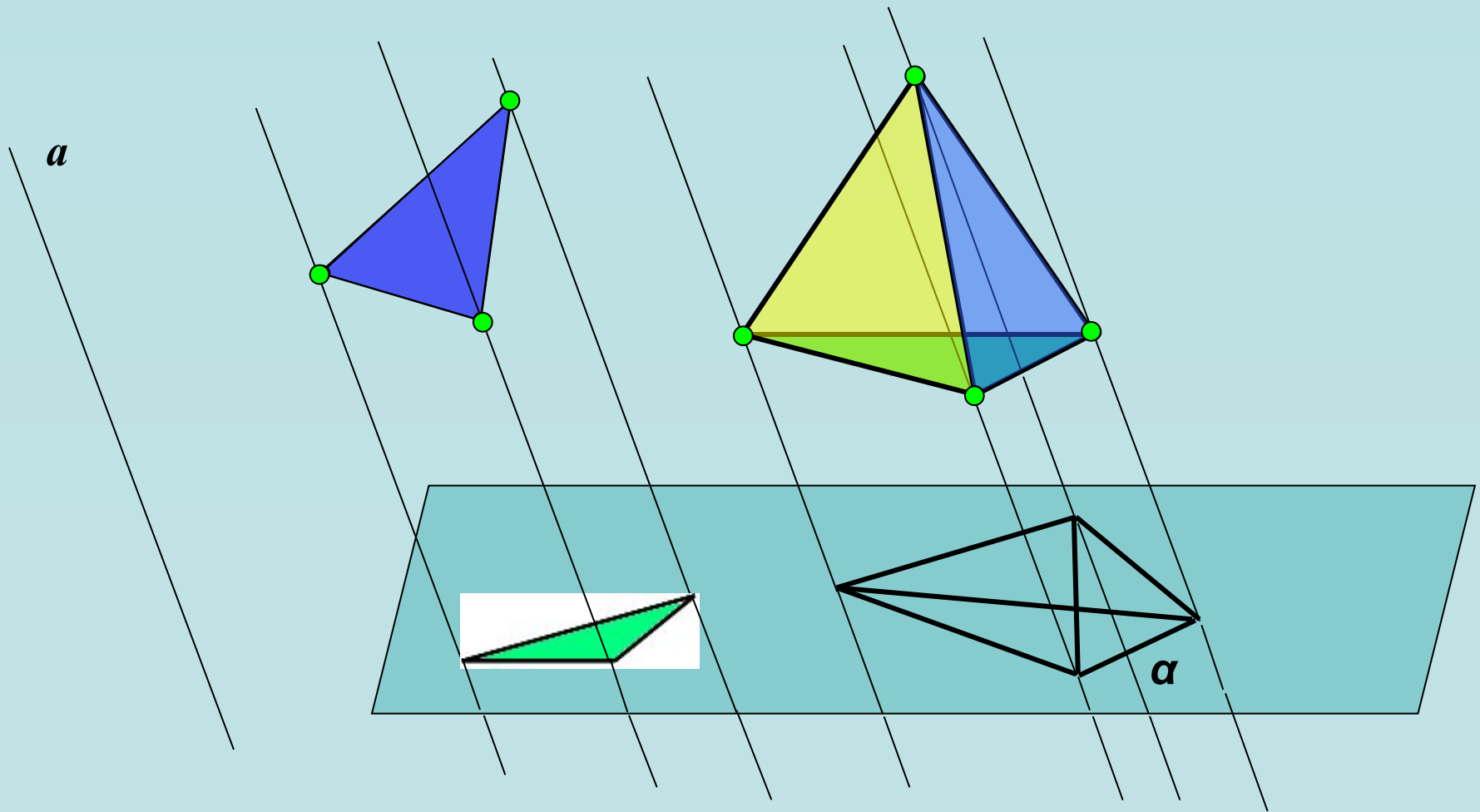


Проведемо через точку A пряму, паралельну до прямої a .

Точка A' перетину цієї прямої з площиною і є **проекція** точки A на площину α . Точку A ще називають **прообразом**, а точку A' – **образом**. Якщо $A \in \alpha$, то A' співпадає з A .

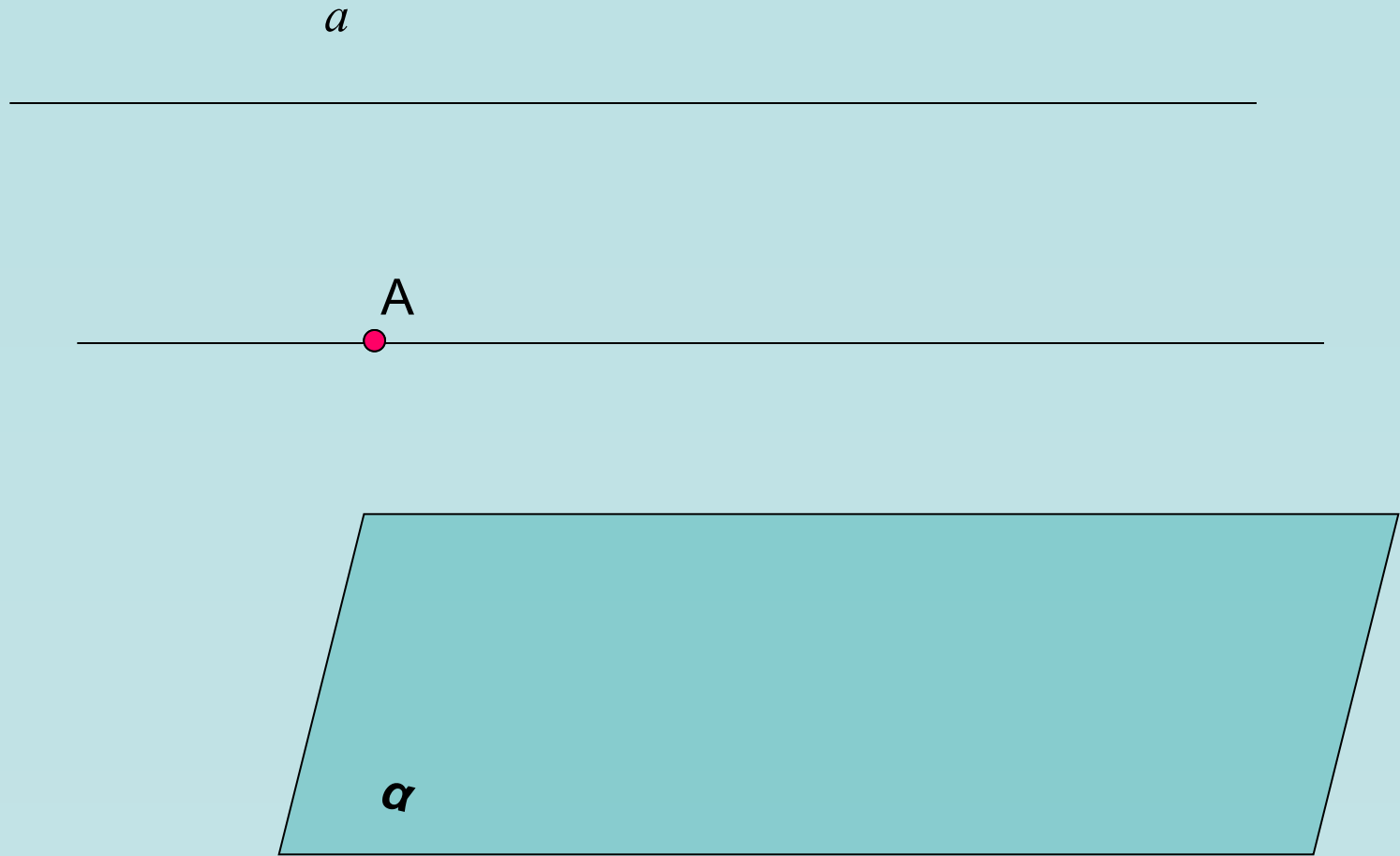


Розглянемо будь-яку геометричну фігуру як множину точок, можна побудувати в заданій площині проекцію даної фігури. Таким чином можна отримати зображення (або «проекцію») будь-якої площини або просторової фігури на площині (див. рис.).

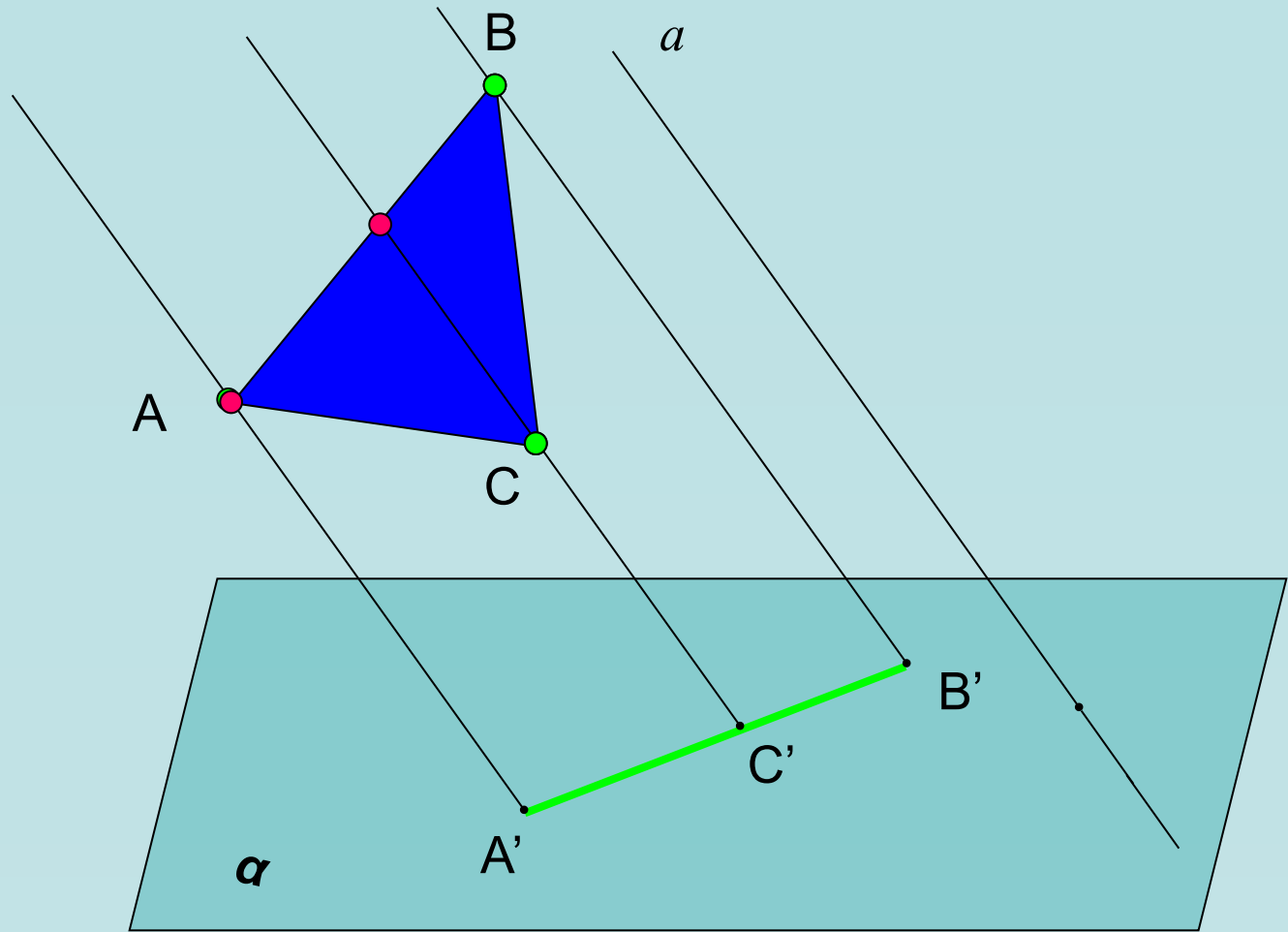


Наочним прикладом паралельного проектування є відкидання будь-яким об'єктом (прообраз) у просторі тінь(образ) від сонячних променів (напрямом паралельного проектування) на Землі (площина проекцій).

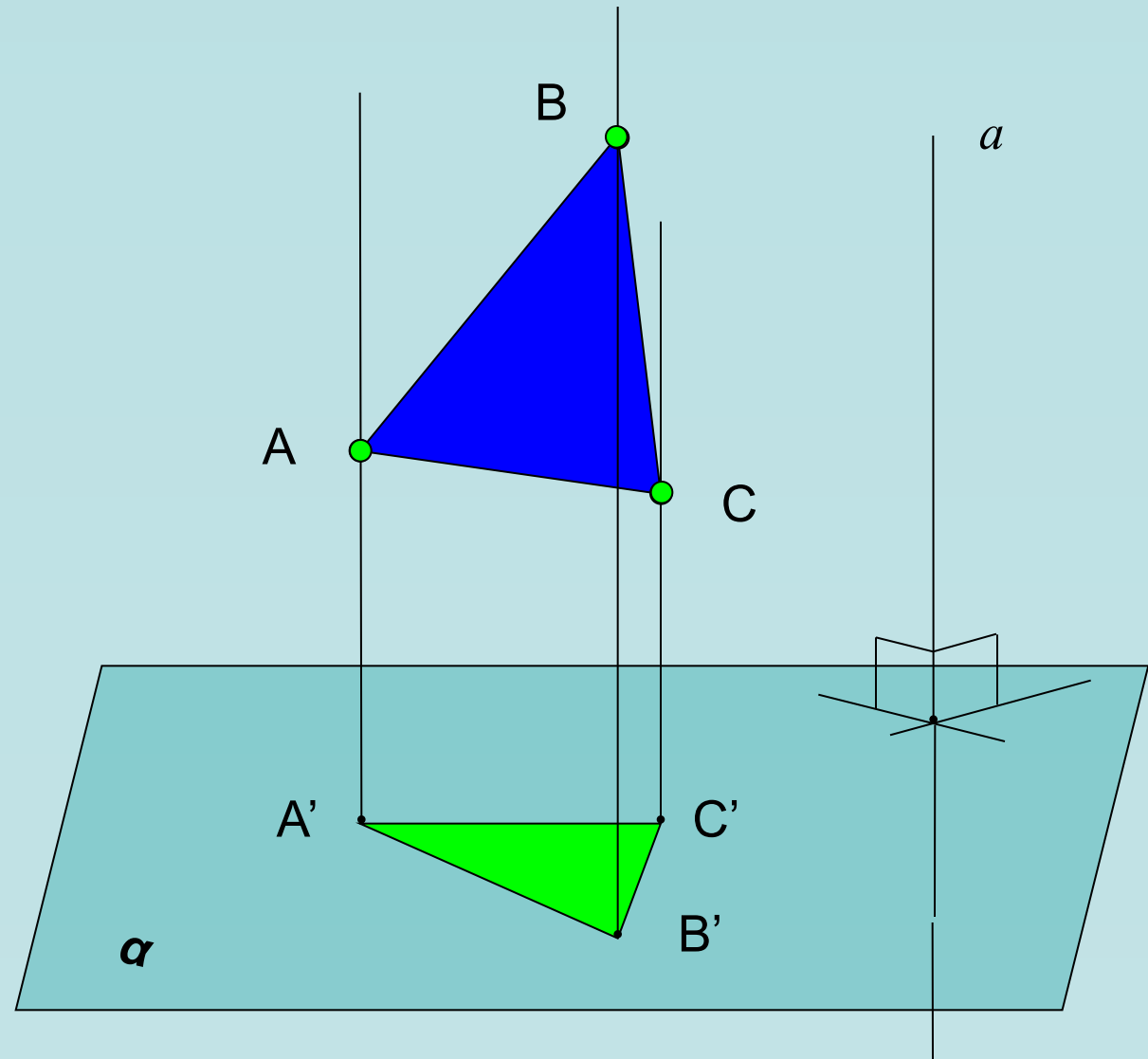
Зауваження 1. При паралельному проектуванні не обирають напрямок паралельного проектування паралельно до площини проєкції (самостійно поясніть чому).



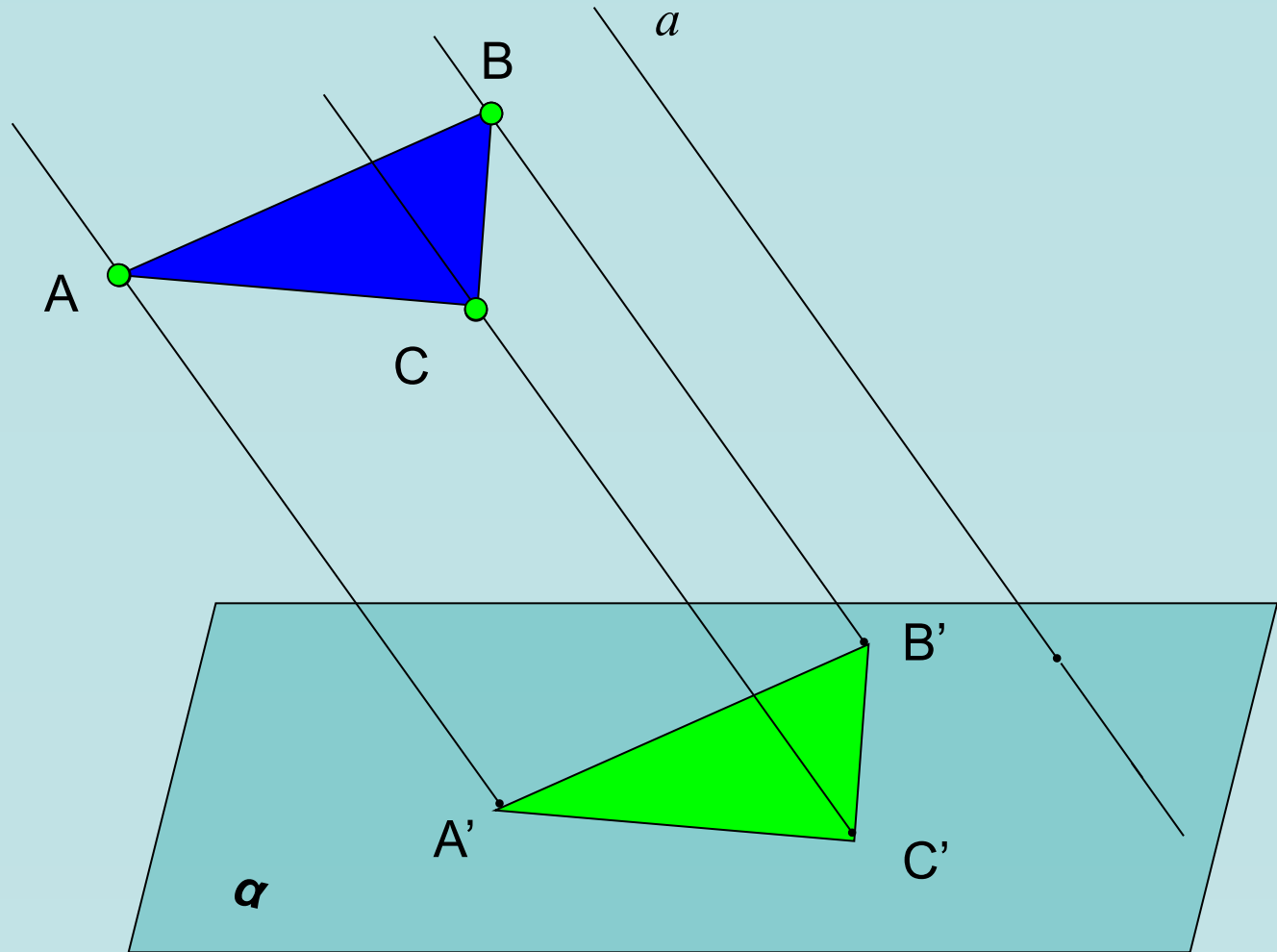
Зауваження 2. При паралельному проектуванні плоских фігур не обирають напрямок паралельного проектування паралельно до площини, яка належить ця плоска фігура, т.як. проекція, яка при цьому отримується не відображає властивості даної плоскої фігури.



Зауваження 3. Якщо напрямок паралельного проектування перпендикулярний до площини проєкцій, то таке паралельне проектування називається **ортогональним (прямокутним) проектуванням**.

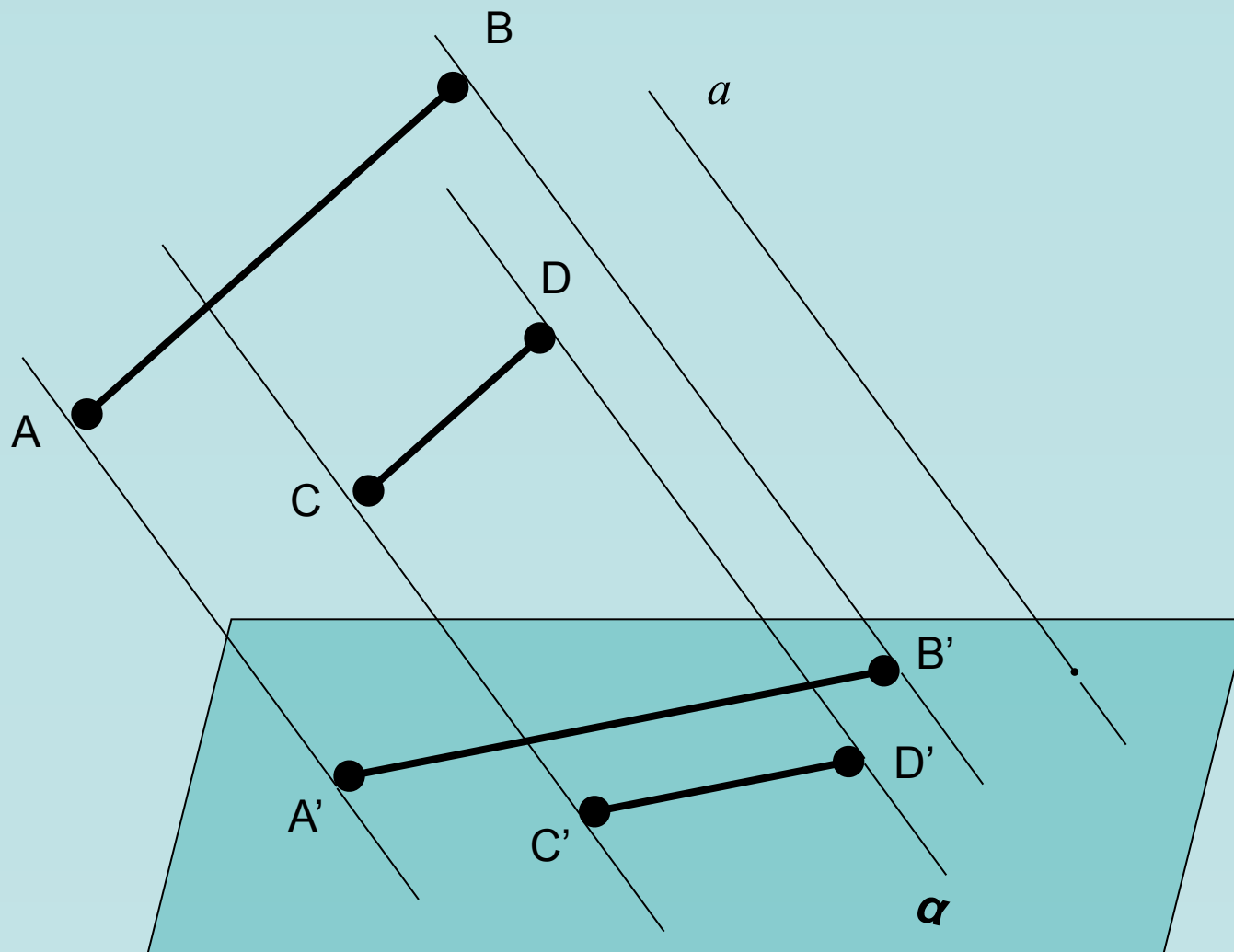


Зауваження 4. Якщо площина проєкцій та площина, в якій лежить дана фігура паралельні ($\alpha \parallel (ABC)$), то зображення яке при цьому отримуємо...
...правильно – дорівнює прообразу!



Паралельне проектування володіє властивостями:

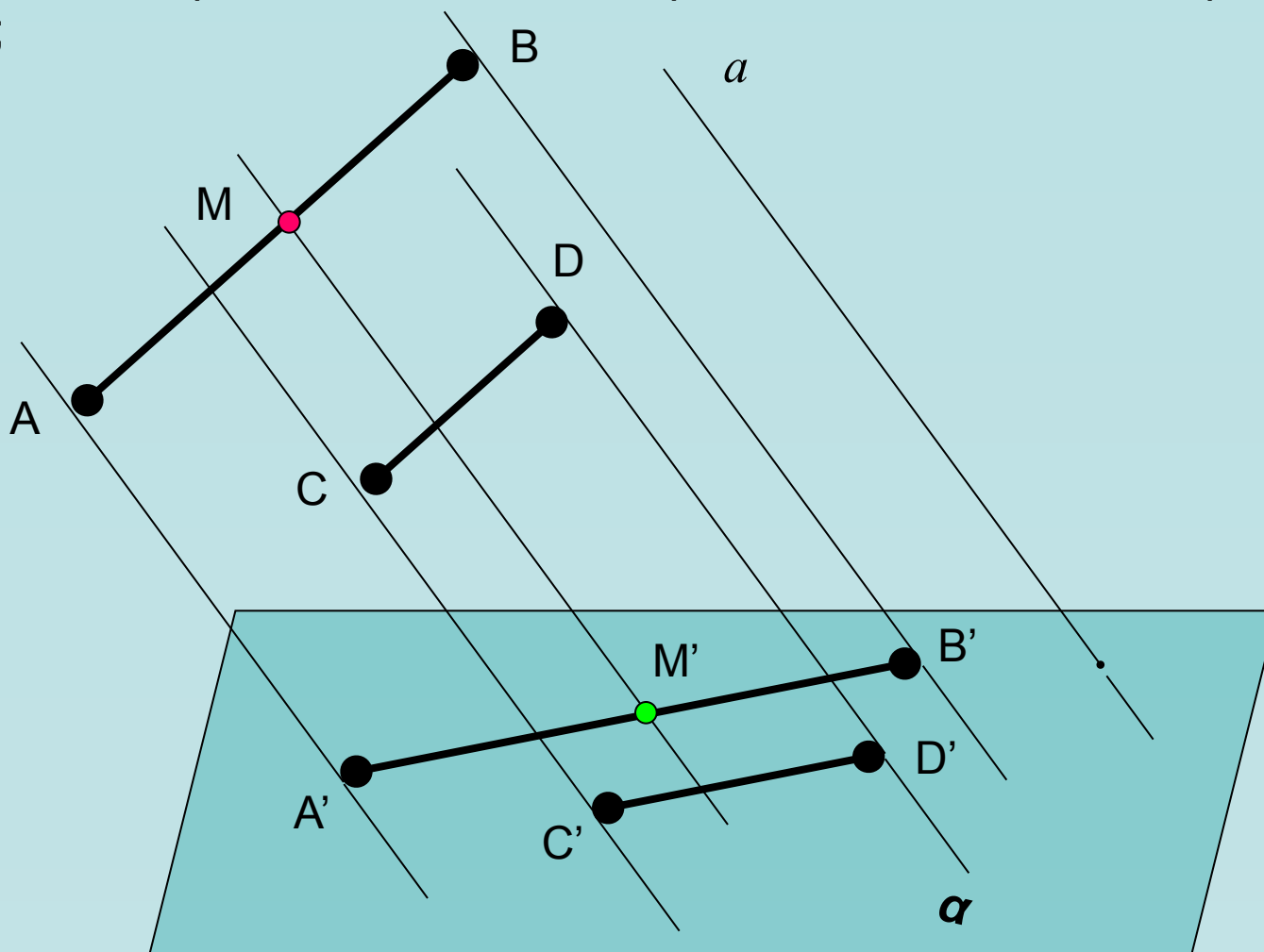
1) паралельність прямих (відрізків, променів) **зберігається**;



$$AB \parallel CD \Rightarrow A'B' \parallel C'D'$$

Паралельне проектування володіє властивостями:

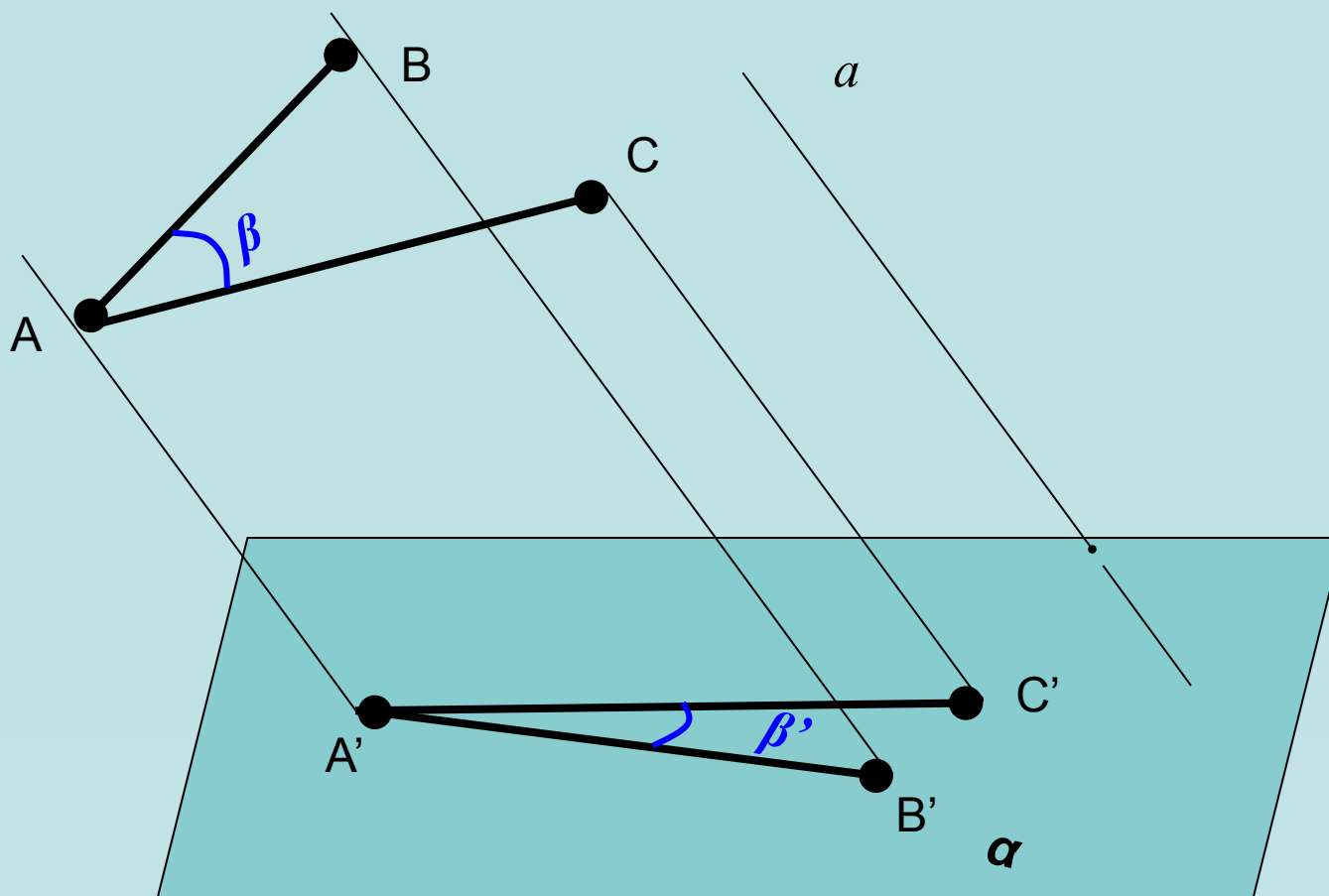
- 1) паралельність прямих (відрізків, променів) **зберігається**;
- 2) відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних або на одній прямій **зберігається**;



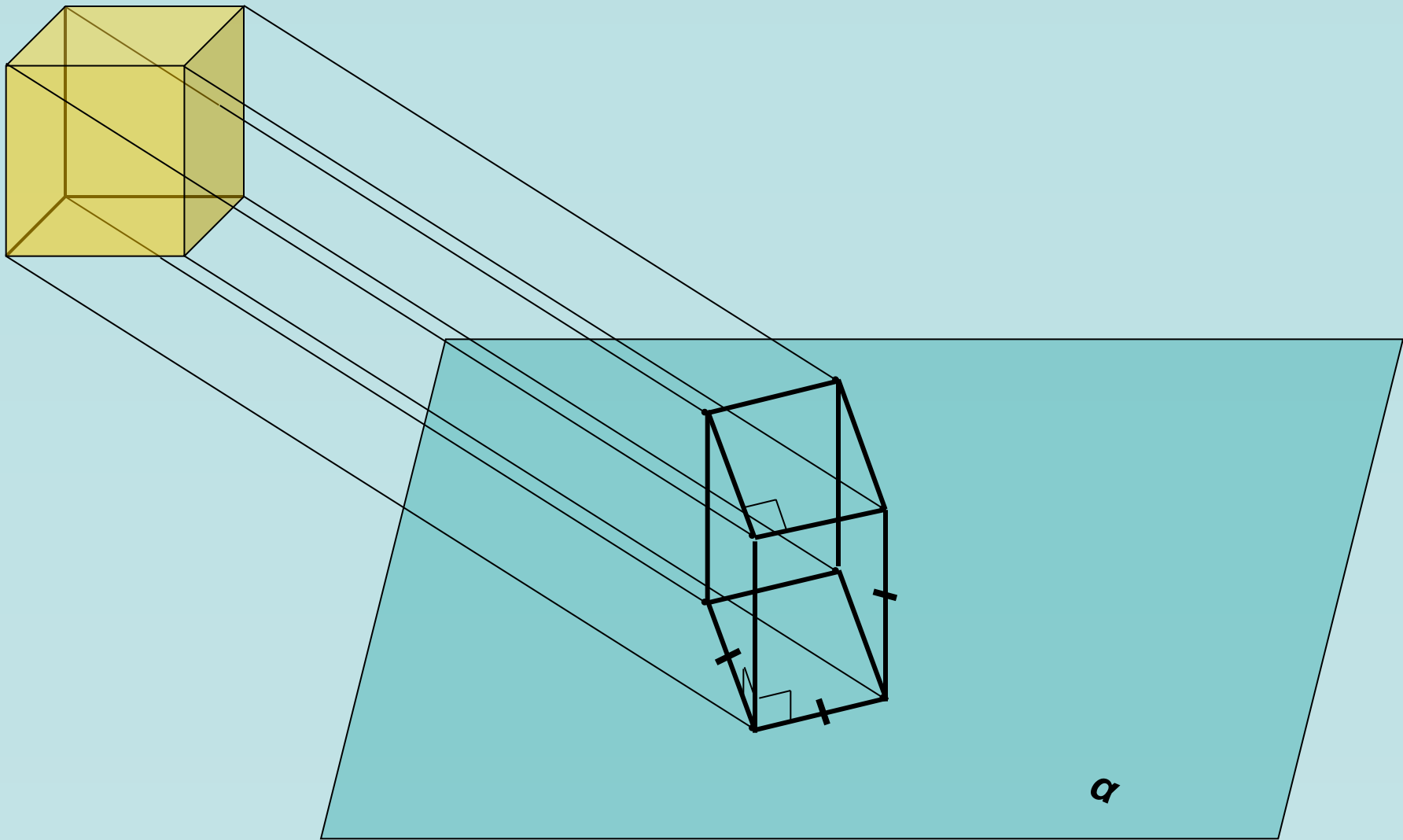
Якщо, наприклад, $AB=2CD$, то $A'B'=2C'D'$ або $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$

Паралельне проектування володіє властивостями:

- 1) паралельність прямих (відрізків, променів) **зберігається**;
- 2) відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних або на одній прямій **зберігається**;
- 3) Лінійні розміри плоских фігур (довжини відрізків, величини кутів) **не зберігаються** (виключення – див. зауваження 4).

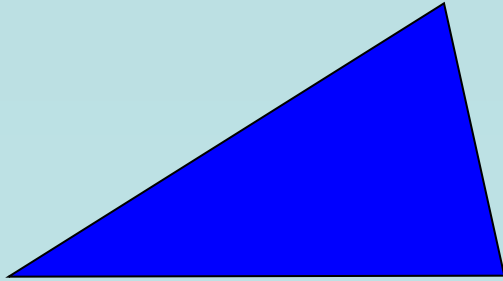


Побудуємо зображення куба:

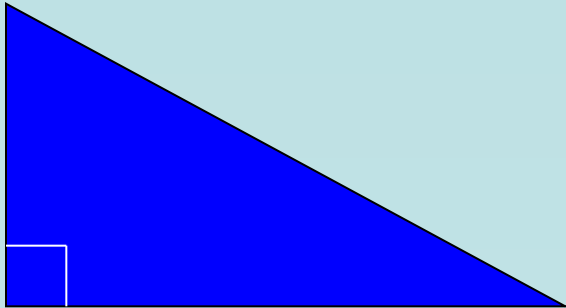


Далі розберемо приклади зображення деяких плоских фігур...

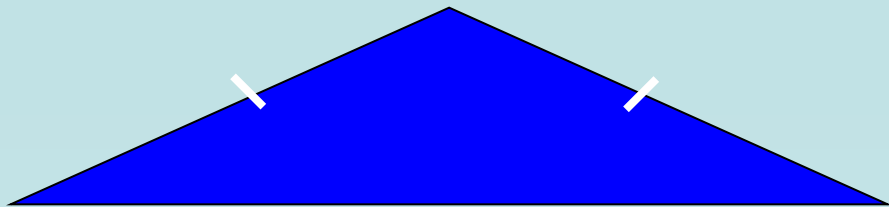
Фігура у просторі



Довільний трикутник

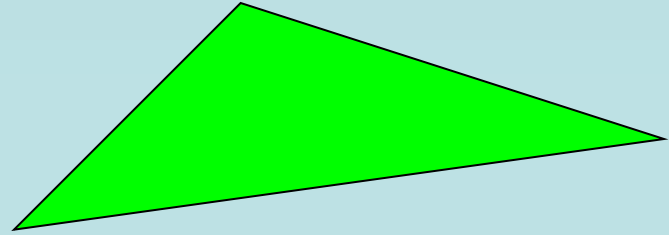


Прямокутний трикутник

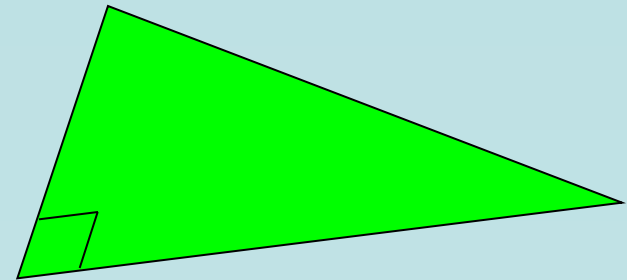


Рівнобічний трикутник

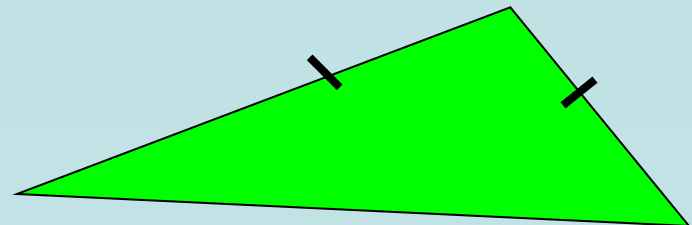
Її зображення на площині



Довільний трикутник

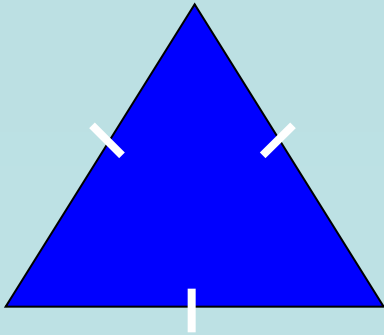


Довільний трикутник

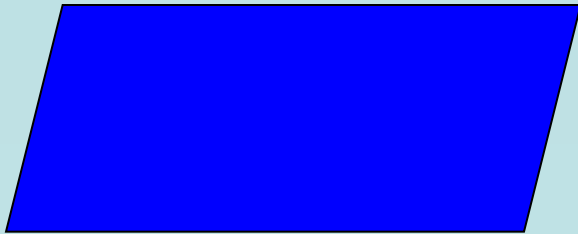


Довільний трикутник

Фігура у просторі



Рівнобічний трикутник

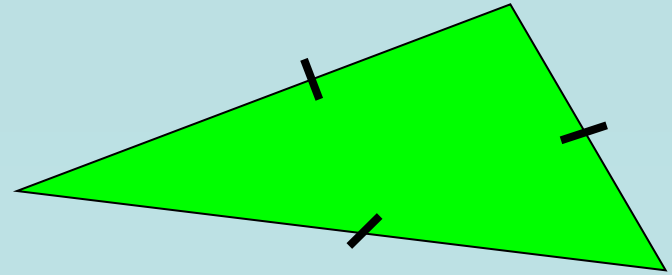


Паралелограм

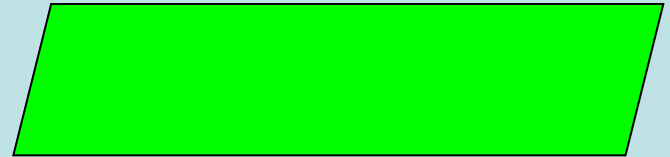


Прямокутник

Її зображення на площині



Довільний трикутник

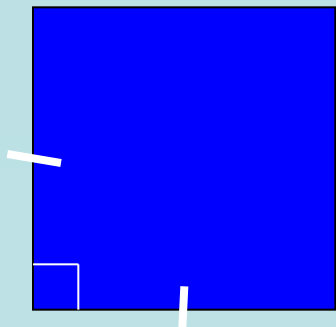


Довільний паралелограм

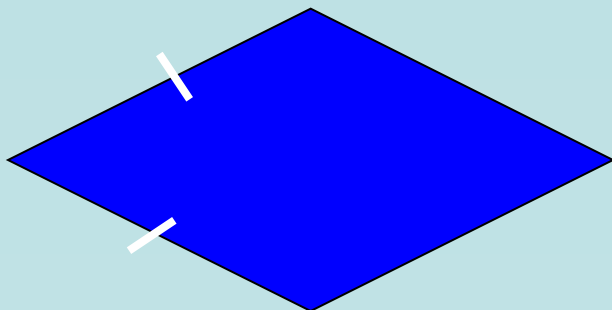


Довільний паралелограм

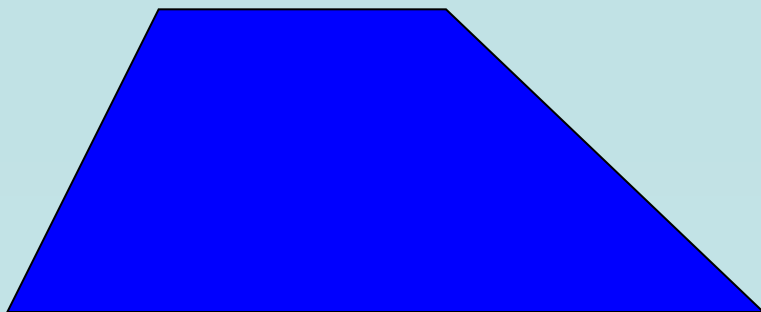
Фігура у просторі



Квадрат

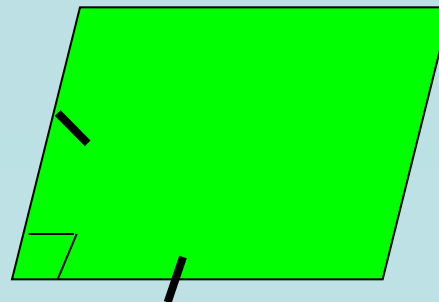


Ромб

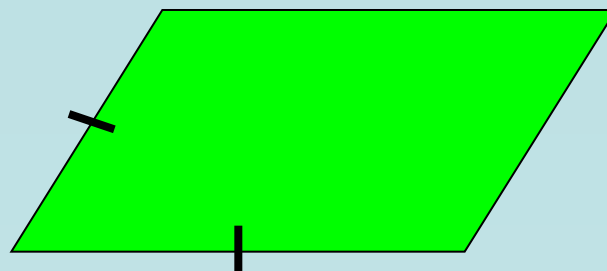


Трапеція

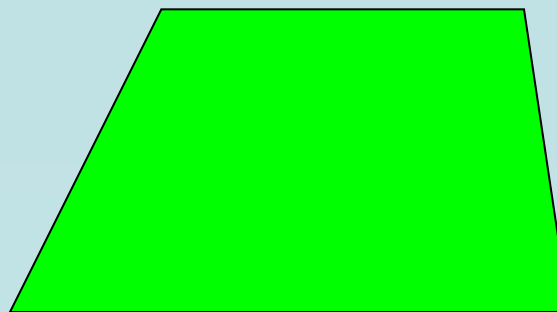
Її зображення на площині



Довільний паралелограм

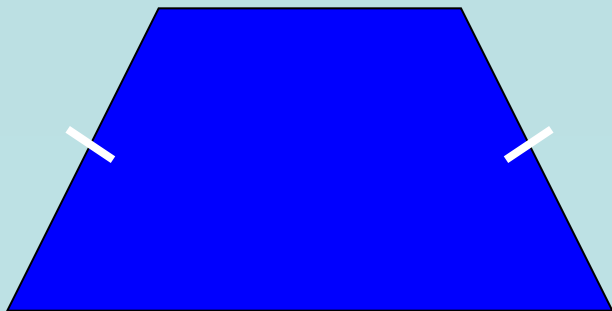


Довільний паралелограм

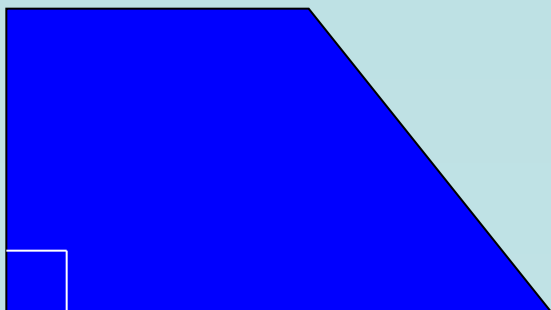


Довільна трапеція

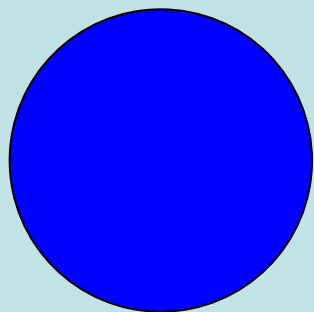
Фігура у просторі



Рівнобічна трапеція

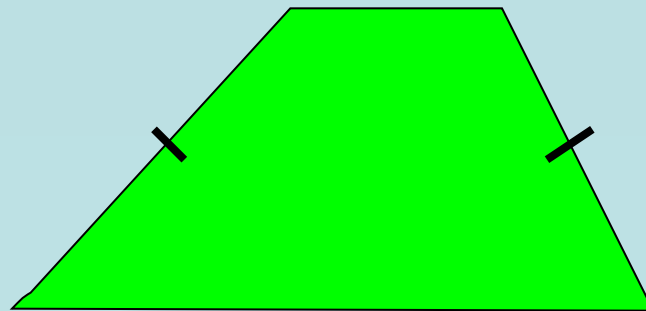


Прямокутна трапеція

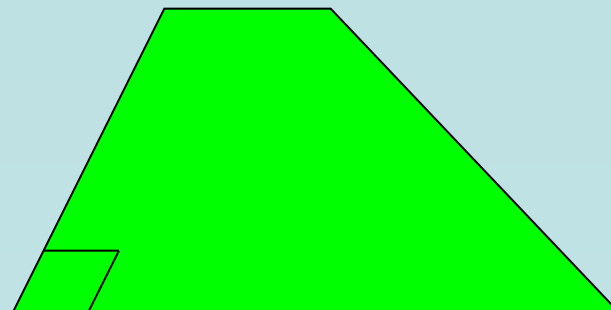


Круг (коло)

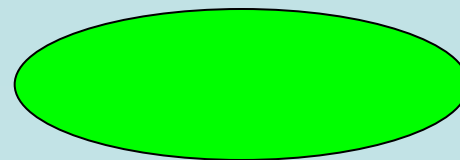
Її зображення на площині



Довільна трапеція

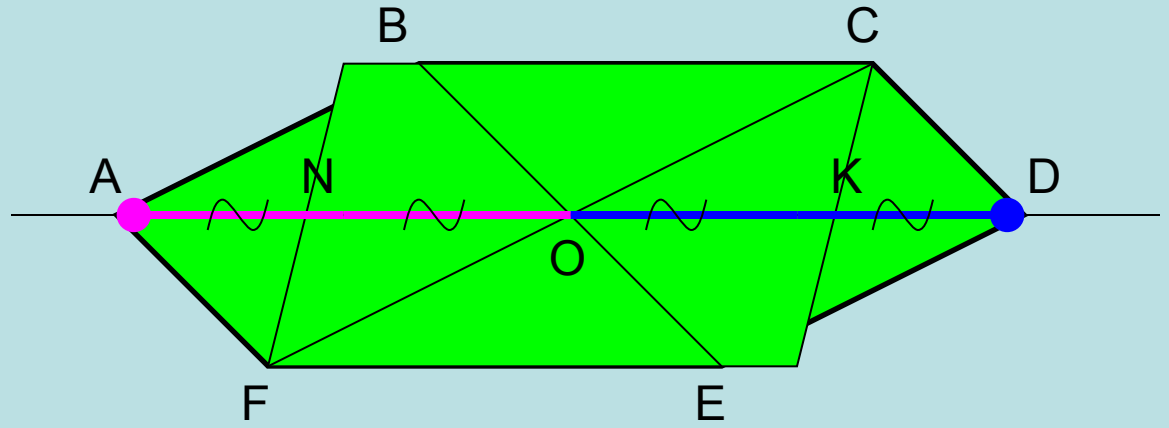
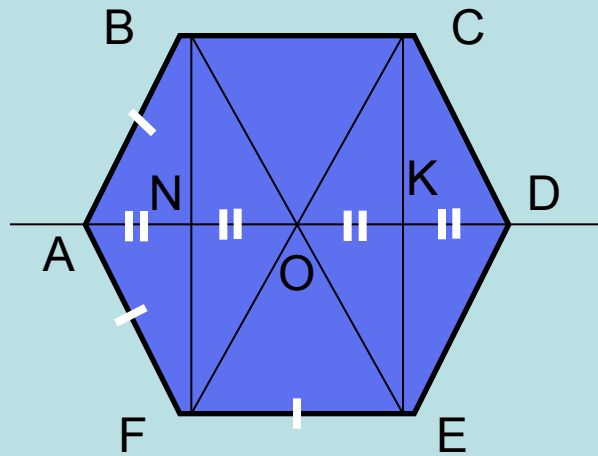


Довільна трапеція



Овал (еліпс)

Розберемося, як побудувати зображення правильного шестикутника.

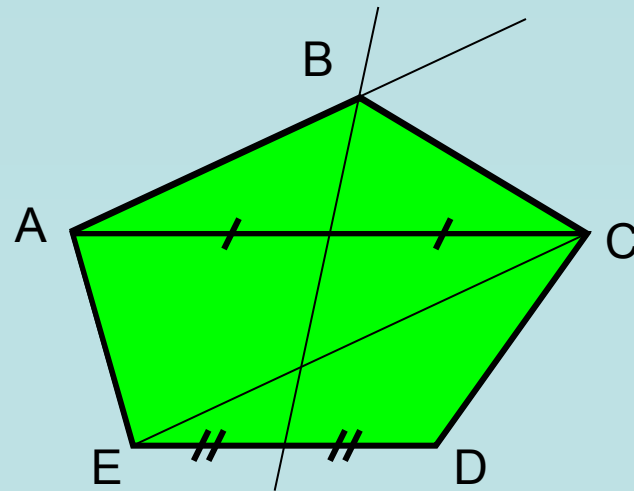
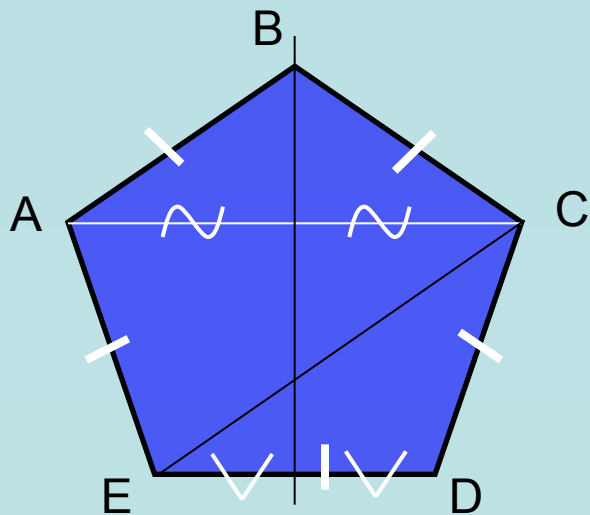


Розіб'ємо правильний шестикутник на три частини: прямокутник FBCE та два рівнобічні трикутники $\triangle FAB$ та $\triangle CDE$. Побудуємо спочатку зображення прямокутника FBCE – довільний паралелограм FBCE. Залишилося знайти положення двох останніх вершин – точок A і D.

Згадаємо властивості правильного шестикутника, помітимо, що: 1) ці вершини лежать на прямій, яка проходить через центр прямокутника та паралельна сторонам BC та FE; 2) $OK = KD$ та $ON = NA$.

Тобто, 1) знаходимо на зображенні точку O та проводимо через неї пряму, паралельну BC та FE, отримуючи при цьому точки N і K;

2) Відкладаємо від точок N та K від центра O на пряму такі ж відрізки – у результаті отримаємо дві останні вершини правильного шестикутника A та D.



Самостійно побудуйте зображення *правильного п'ятикутника*.

Зауваження: розбийте фігуру на дві частини – рівнобоку трапецію та рівнобічний трикутник, а потім скористайтесь деякими властивостями цих фігур і, звичайно ж, властивості паралельного проектування.