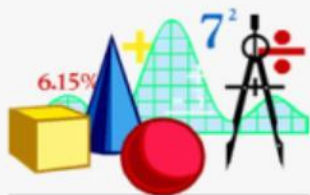


Презентация на тему: «Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл»



Цели урока:

- **ОБУЧАЮЩАЯ:**

- 1) Ввести определение производной функции на основе задач физики, рассматривая при этом физический смысл производной.
- 2) Выяснить геометрический смысл производной дифференцируемой функции.
- 3) Научиться решать задачи на данную тему, используя полученные знания.

- **РАЗВИВАЮЩАЯ:**

- 1) Способствовать развитию общения как метода научного познания, аналитико-синтетического мышления, смысловой памяти и произвольного внимания.
- 2) Развитие навыков исследовательской деятельности.

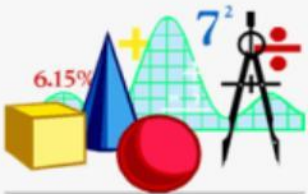
- **ВОСПИТАТЕЛЬНАЯ:**

- 1) Способствовать развитию творческой деятельности.
- 2) Развивать у учащихся коммуникативные компетенции, потребности к самообразованию.



Вопросы:

1. История возникновения производной функции.
2. Понятие производной.
3. Геометрический смысл производной.
4. Физический (механический) смысл производной.

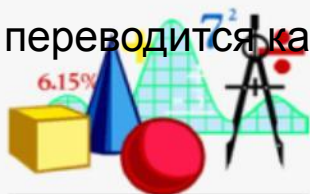


1. История возникновения производной функции

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций, называется **дифференциальным исчислением**. Приращения вида Δf , представляющие собой разности, играют заметную роль при работе с производными. Естественно поэтому появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculus differentialis* нового исчисления, которое переводится как исчисление разностей; это название появилось уже в конце 17в., т.е. при рождении нового метода.

Термин «**производная**» является буквальным переводом на русский французского слова *derivee*, которое ввёл в **1797г. Ж.Лагранж**, он же ввёл современные обозначения **y'** , **f'** . Такое название отражает смысл понятия: функция $f'(x)$ происходит из $f(x)$, является производным от $f(x)$. **И.Ньютон** называл производную функцию **флюксией**, а саму функцию – **флюентой**. **Г.Лейбниц** говорил о дифференциальном отношении и ввёл обозначение производной **df/dx** .

Слово «**экстремум**» происходит от латинского *extremum* (крайний). **Maximum** переводится как наибольший, а **minimum** – наименьший.



Жозеф Луи Лагранж

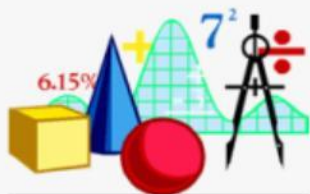
« – величественная пирамида математических наук»

Наполеон I Бонапарт

- Рано изучил сочинения Евклида и Архимеда, Галлея (друга Ньютона).
- В **16 лет** стал преподавать математику в Артиллерийском училище в Турине.
- В **19 лет** стал профессором математических наук.
- В **23 года** стал академиком и иностранным членом Берлинской академии наук.
- Автор трудов по вариационному исчислению, математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям.
- Его работы по математике, астрономии и механике составляют **14 томов**.
- Император Франции сделал учёного сенатором, графом империи и командором ордена Почетного легиона.



1736 - 1813



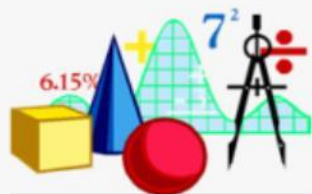
Выдающийся французский математик, ввел термин «**ПРОИЗВОДНАЯ**» и её современное обозначение.

Александр Поуп

Был этот мир глубокой
тьмой окутан.
Да будет свет!
И вот явился Ньютон.

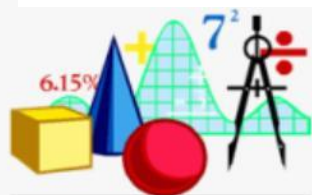
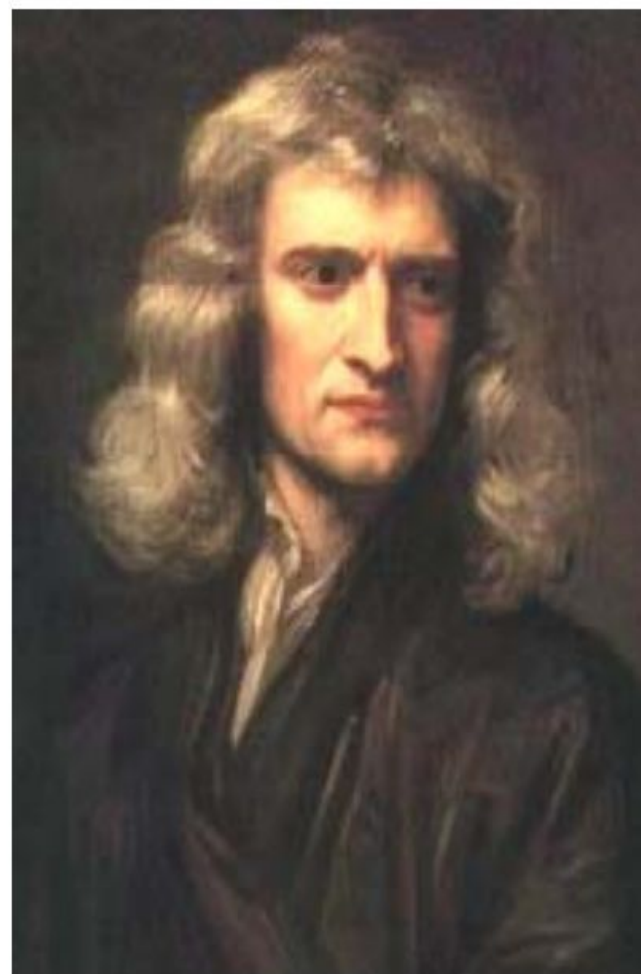


(1688—1744 гг.).



Ньютон Исаак (1643-1727) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (с 1672) и его президент (с 1703).

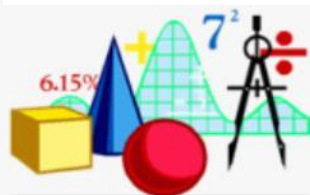
Им начато построение математического анализа на основе учения о пределе, подготовлены основы для дифференциального и интегрального исчисления. В физике обосновал справедливость закона всемирного тяготения, законы движения, теорию света и др.



Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716) – немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк, экономист, дипломат, языковед, член Лондонского королевского общества и Парижской Академии наук, основатель Берлинской Академии наук.

В 18 лет защитил магистерскую диссертацию по философии, в 20 лет стал доктором права.

Является одним из создателей математического анализа, алгебры определителей, дифференциального и интегрального исчислений.



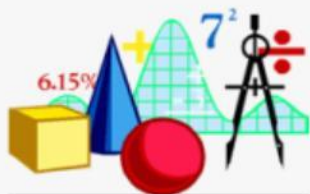
2. Понятие производной

Пусть x - произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности точки x_0 (окрестность точки x_0 - это интервал $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$).

Разность $x - x_0$ называется **приращением аргумента**: $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность $f(x) - f(x_0)$ называется **приращением функции**: $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Отсюда, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

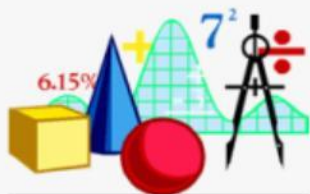


2. Понятие производной

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx , стремящегося к «нулю»:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



2. Понятие производной

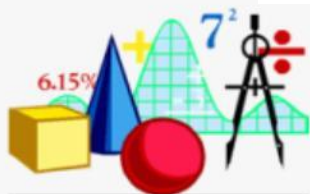
Четыре обозначения для производной:

y' Лагранжа (читается «игрек штрих»)

$\frac{dy}{dx}$ Лейбница (читается «дэ игрек по дэ икс»)

$\dot{y}$ Ньютона (читается «игрек с точкой»)

Dy Коши (читается «дэ игрек»)

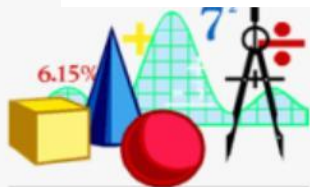


2. Понятие производной

Нахождение производной называется **дифференцированием** этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функцию называют **дифференцируемой в этой точке**.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X , называется **дифференцируемой на этом промежутке**.

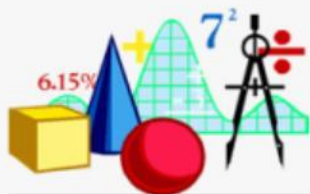


2. Понятие производной

Правило нахождения производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

1. Найти значение функции в точке $x_0 + \Delta x$: $f(x_0 + \Delta x)$
2. Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
3. Найти отношение приращения функции к приращению $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
4. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



2. Понятие производной

Пример: Дана функция $y=x^2$. Найти её производную в произвольной точке и в точке $x=3$.

Решение:

1. $f(x_0+\Delta x)=(x+\Delta x)^2;$

2. $\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2;$

3.
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$
, т.е. $y'=(x^2)'=2x;$

4. при $x=3$ получим $y'(3)=2*3=6.$



Ответ: $y'=2x;$ $y'(3)=6$

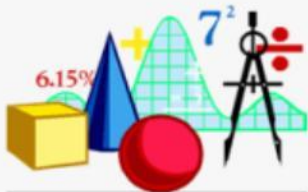
Пример: Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $\frac{3x-1}{2x+5}$.

Решение: Дадим x приращение Δx , тогда y получит приращение

$$\Delta y: \Delta y = \frac{3(x+\Delta x)-1}{2(x+\Delta x)+5} - \frac{3x-1}{2x+5} = \frac{(3x+3\Delta x-1)(2x+5) - (3x-1)(2x+2\Delta x+5)}{(2(x+\Delta x)+5)(2x+5)} =$$
$$= \frac{17\Delta x}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)}.$$

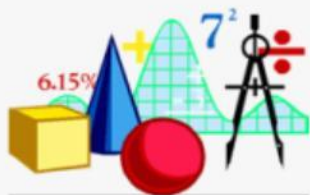
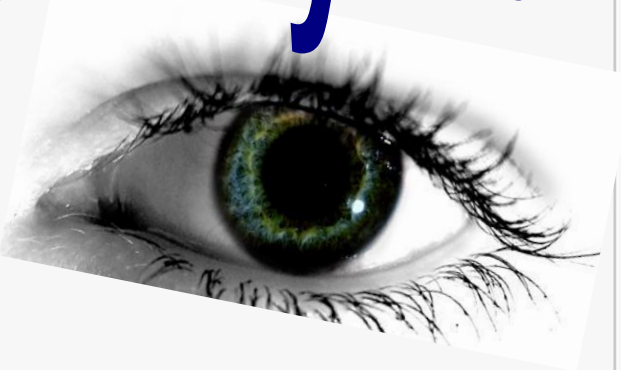
Так как $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{17\Delta x}{\Delta x(2x+2\Delta x+5)(2x+5)} = \frac{17}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)},$

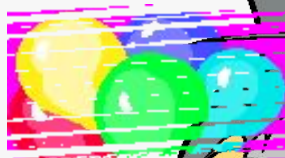
то $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{17}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)} = \frac{17}{(2x+5)^2}.$



Ответ: $y' = \frac{17}{(2x+5)^2}.$

Электронная физминутка для глаз





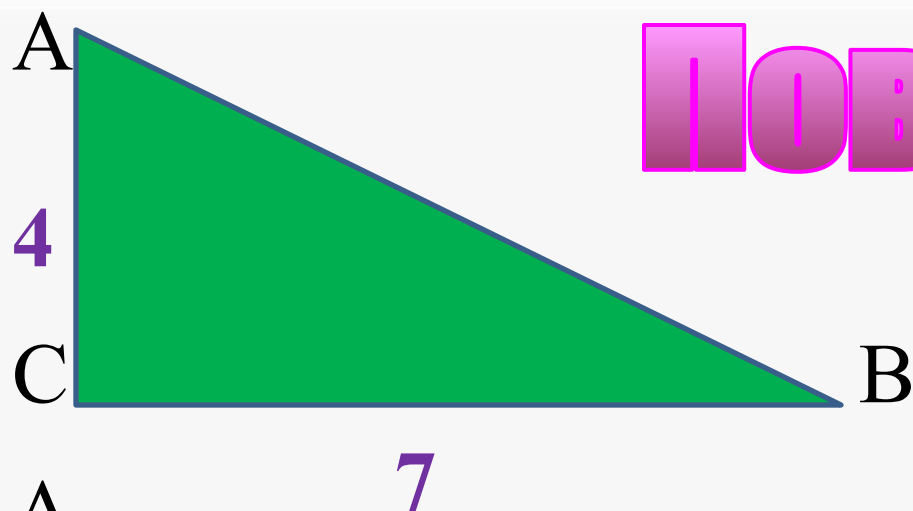
3. Геометрический смысл производной.

Лейбниц Г.В.

«Если продолжить одно из
маленьких звеньев
ломаной, составляющей
кривую линию, то эта
продолженная таким
образом сторона будет
называться
касательной к кривой»

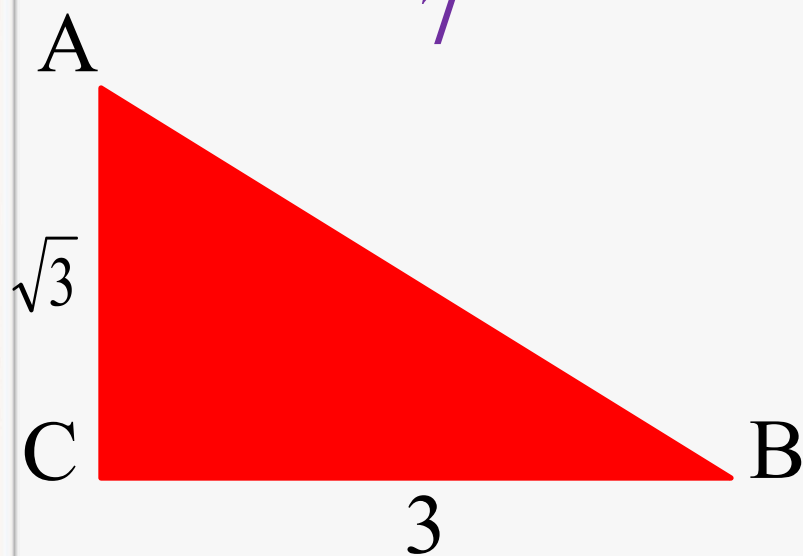


Повторение



tg A - ?

$$\text{Tg } A = 3/\sqrt{3}$$



tg B - ?

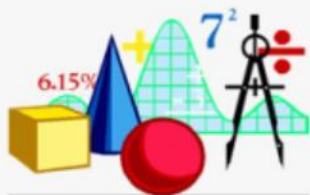
$$\text{Tg } B = \sqrt{3}/3$$

*Вычислите tga, если
 $\alpha = 135^\circ, 120^\circ, 150^\circ$.*

$$\alpha = -1$$

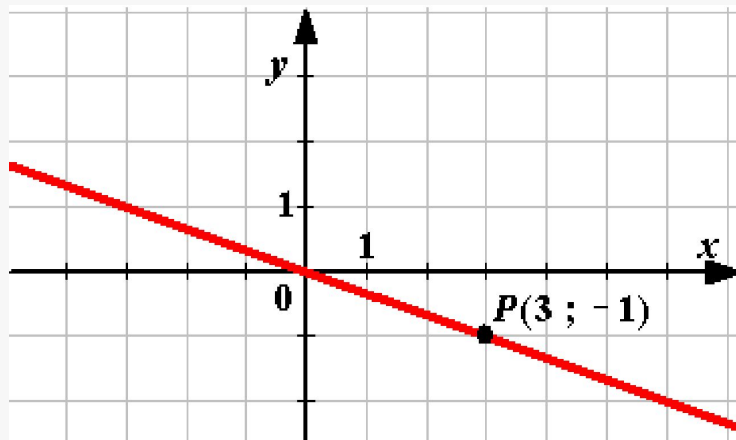
$$\alpha = -\sqrt{3}$$

$$\alpha = -\sqrt{3}/3$$



Повторение

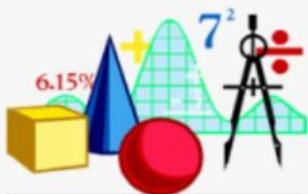
Угловой коэффициент прямой.



Прямая проходит через начало координат и точку **P(3; -1)**. Чему равен ее угловой коэффициент?

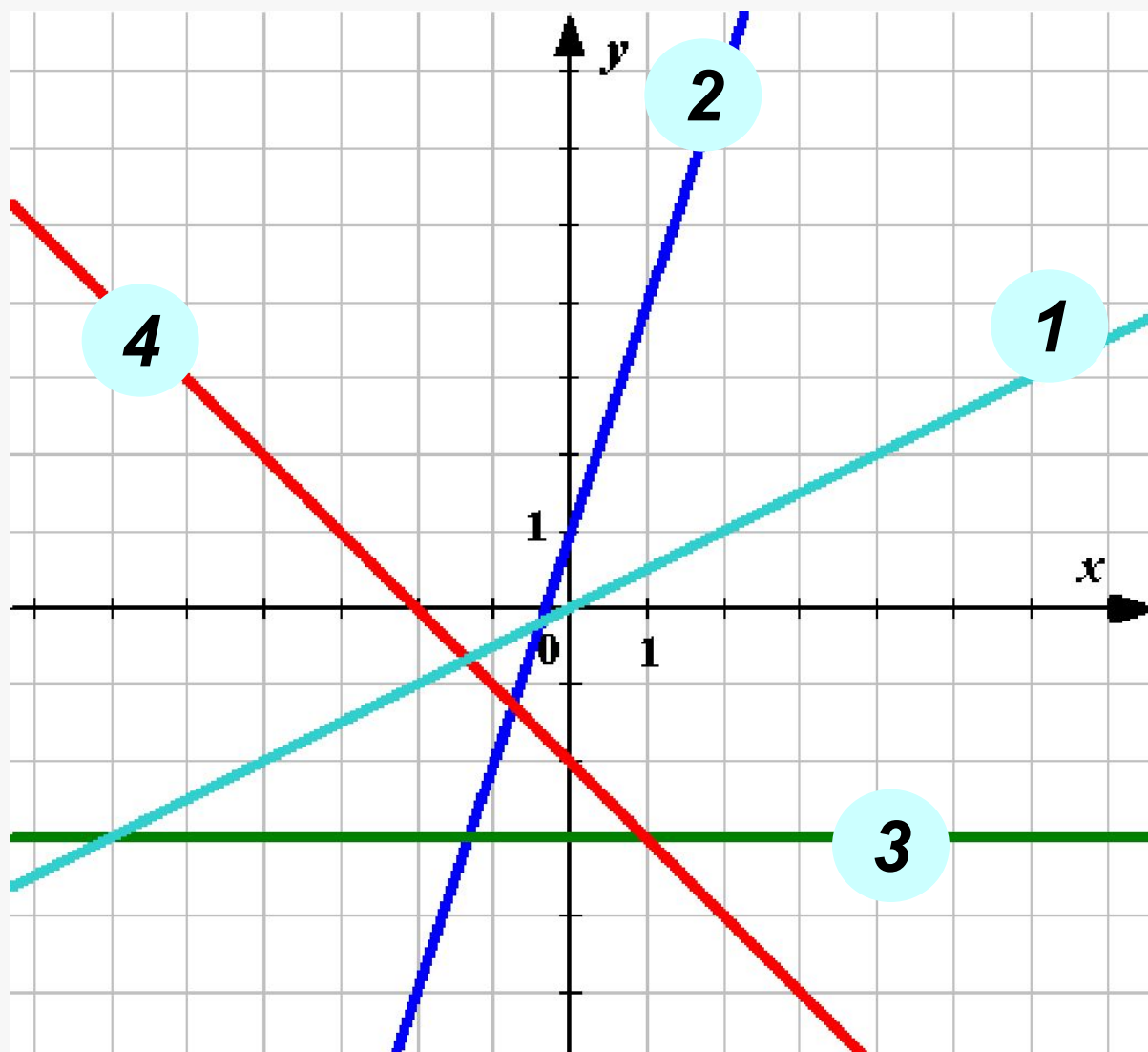
$$y=kx+b \rightarrow y=kx$$

$$-1 = 3k \rightarrow k = -\frac{1}{3}$$



Повторение

Найдите угловые коэффициенты прямых:



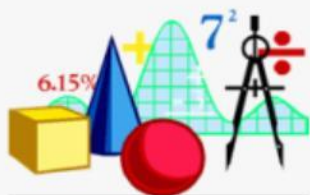
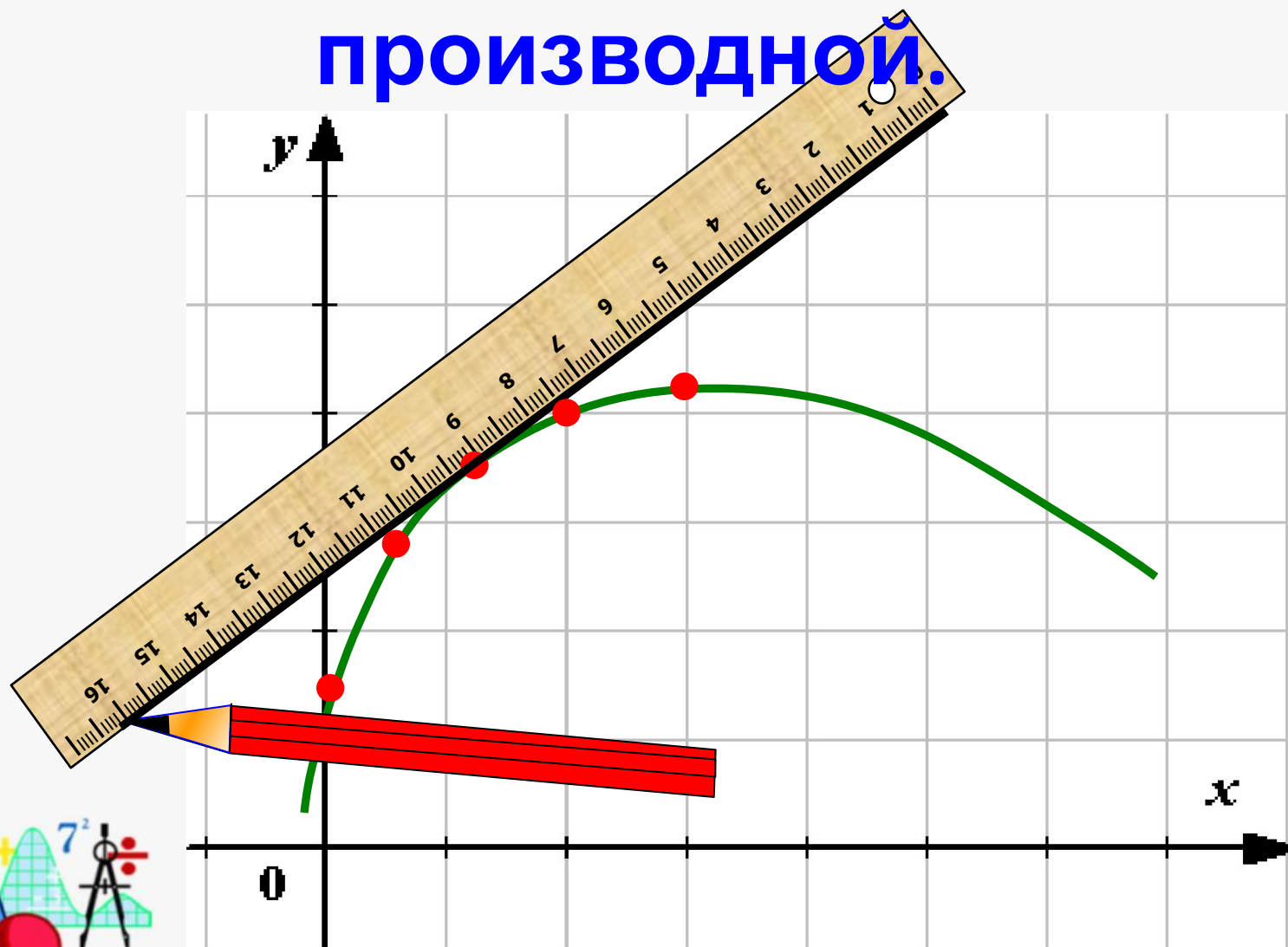
1 $k=0,5$

2 $k=3$

3 $k=0$

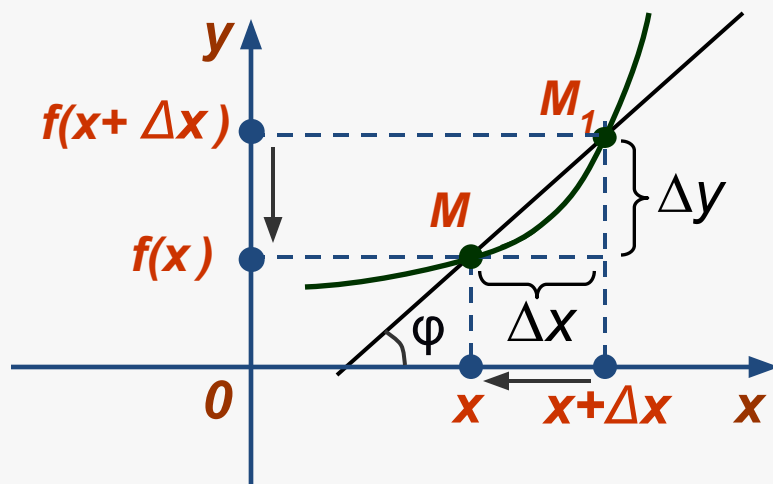
4 $k=-1$

3. Геометрический смысл производной.



3. Геометрический смысл производной

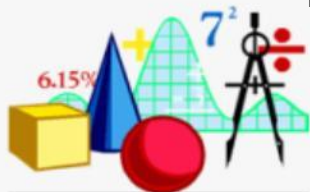
Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.



$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

3. Геометрический смысл производной.

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

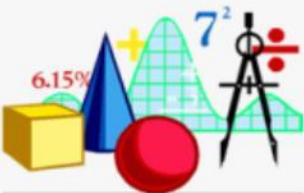
Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Уравнение
касательной

Уравнение
нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.



$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Пример: Найти уравнение касательной и нормали для функции $f(x)=x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Решени

е:
1) $\Delta y(3) = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 9 = 6\Delta x + \Delta x^2,$

2) $f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6 + \Delta x) = 6.$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной

$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ – уравнение нормали ($f'(x_0) \neq 0$).

3) $y_{\text{кас}} - 9 = 6(x - 3)$ $y_{\text{норм}} - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$

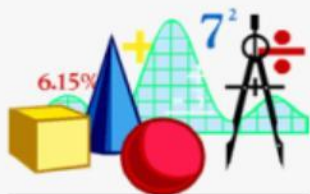
$y_{\text{кас}} = 6x - 9$

$y_{\text{норм}} = -\frac{1}{6}x + 9\frac{1}{2}.$

Ответ

$y_{\text{кас}} = 6x - 9$

$y_{\text{норм}} = -\frac{1}{6}x + 9\frac{1}{2}.$

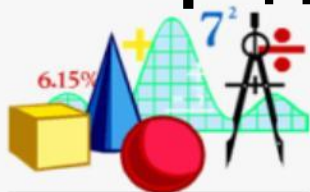


3. Физический (механический) смысл производной

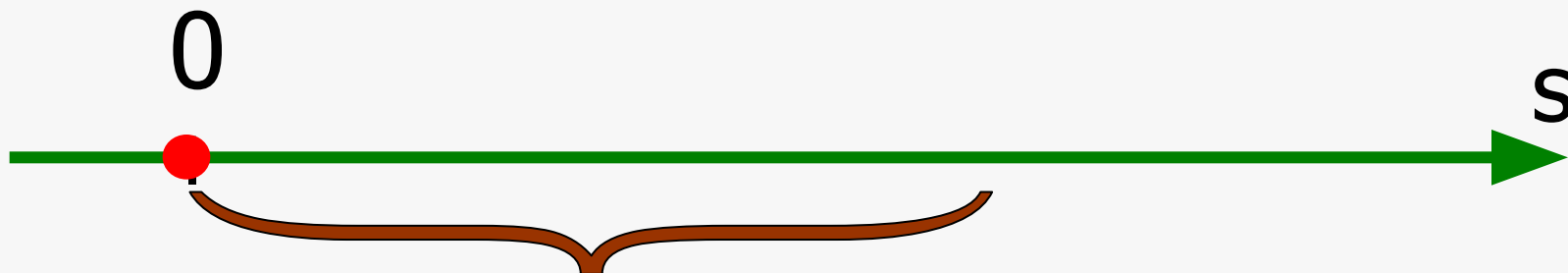
Исаак
Это кто?
Ньютон



«Когда величина является
максимальной или
минимальной, в этот
момент она не течет ни
вперед, ни назад»



3. Физический (механический) смысл производной



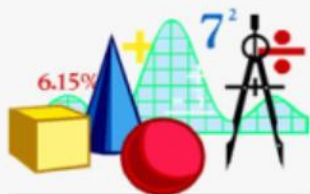
$S(t)$ за время **t**

$$S'(t) = V(t) \quad V'(t) = a(t)$$

$S(t)$ – перемещение точки за время **t**

$V(t)$ – скорость точки в момент **t**

$a(t)$ – ускорение точки в момент **t**



3. Физический (механический) смысл производной

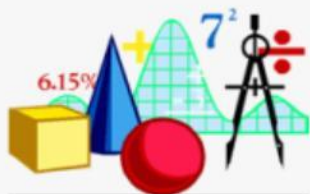
Пример: Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$. Вычислите скорость движения точки:

- а) в момент времени t ;
- б) в момент времени $t=2$ с.

Решение:

а) $v(t) = s'(t) = (2t^3 - 3t)' = 2 * 3t^2 - 3 * 1 = 6t^2 - 3$

б) $v(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(\text{м} / \text{с})$



Ответ: $V(t)=6t^2-3$; $V(2)=21$ м/с

3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Материальная точка движется

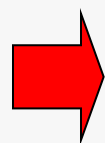
по закону

$$S(t) = \frac{9}{2}t^2 - 7t + 6 \quad (\text{м}).$$

В какой момент времени (с) скорость точки будет равна 12,8 м/с ?

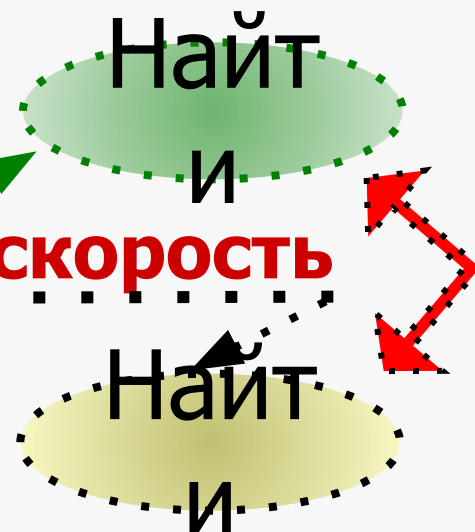
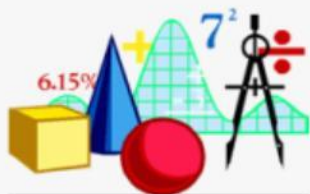
Решение: $S'(t) = V(t)$

$$S'(t) = 9t - 7 = V(t) \quad V(t) = 12,8$$



$$9t - 7 = 12,8$$

$$9t = 19,8 \quad \underline{\underline{t = 2,2 \text{ (с)}}}.$$



3. Физический (механический)

СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пример: Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-4t^2$

Найдите скорость и ускорение в момент времени $t=5c$.

Решение:

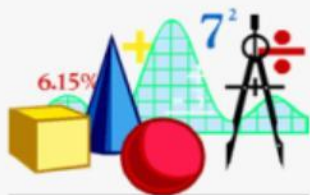
$$v(t) = (x(t))' = 3t^2 - 4 * 2t = 3t^2 - 8t$$

$$v(5) = 3 * 5^2 - 8 * 5 = 75 - 40 = 35(м / с)$$

$$a(t) = (v(t))' = (3t^2 - 8t)' = 6t - 8$$

$$a(5) = 6 * 5 - 8 = 22(м / с^2)$$

Ответ: $V(5)=35$ м/с; $a(5)=22$ м/с²



3. Физический (механический) смысл производной

$$x(t) = (t - 1)^3, \text{ где } t \in [0; 10]$$

1. Найти среднюю скорость движения на указанном отрезке

$$v_{cp} = \frac{x(10) - x(0)}{10 - 0} = \frac{9^3 - (-1)^3}{10} = \frac{730}{10} = 73 \text{ м/с}$$

2. Найти мгновенную скорость в момент времени $t=3$ сек.

$$v(t) = x'(t) = 3(t - 1)^2$$

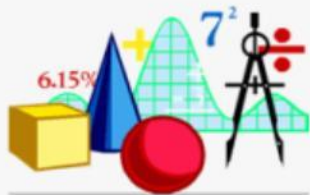
$$v_{мгн} = v(3) = 3(3 - 1)^2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ м/с}$$

3. Найти ускорение при $t=3$ сек

$$a(t) = v'(t) = 6(t - 1)$$

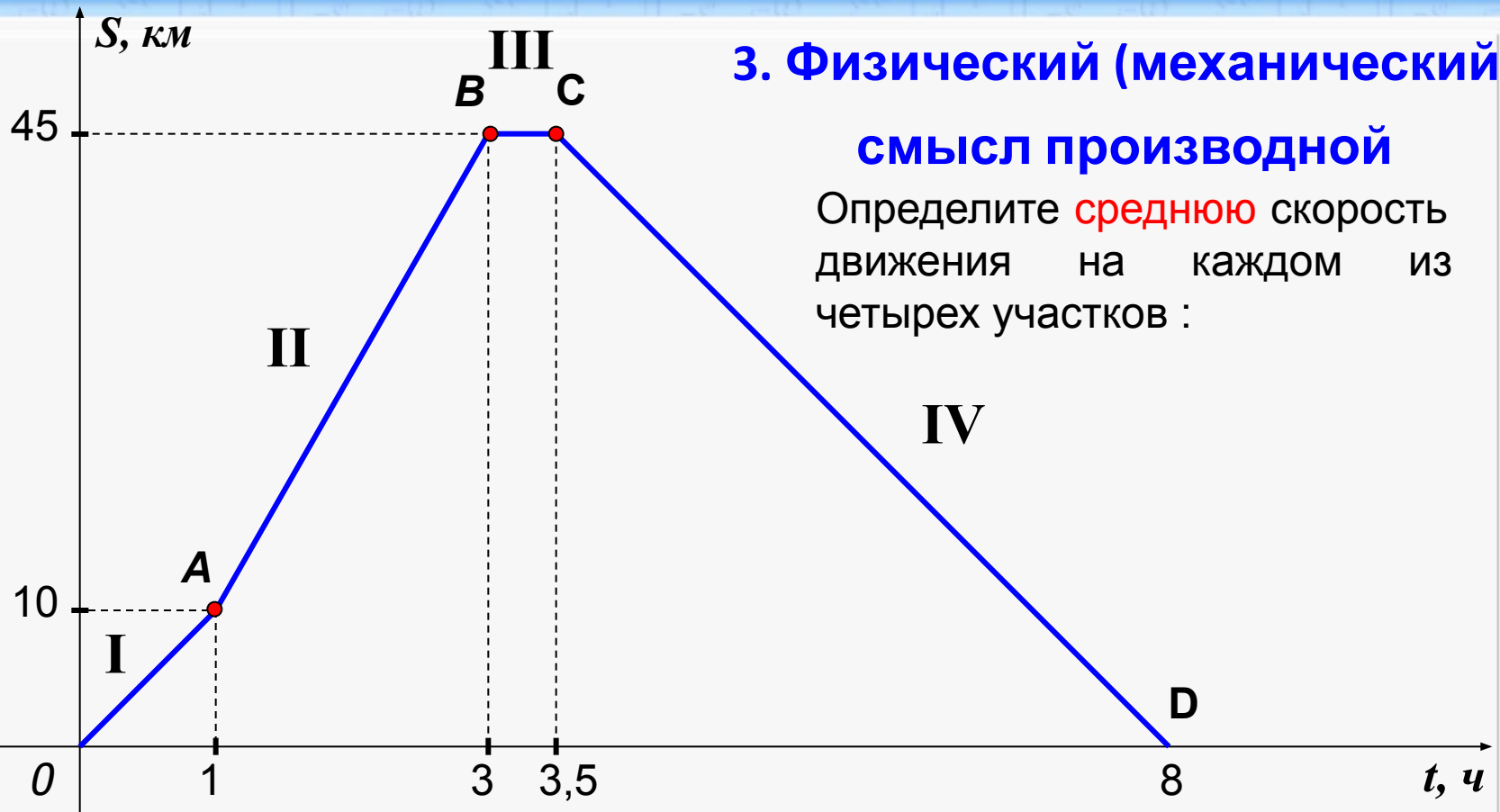
$$a(3) = 12 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $V_{cp} = 73 \text{ м/с};$
 $V(3) = 12 \text{ м/с}; a(3) = 12 \text{ м/с}^2$



3. Физический (механический) смысл производной

Определите **среднюю** скорость движения на каждом из четырех участков :

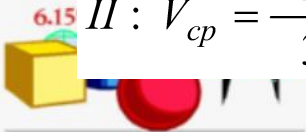


$$I: V_{cp} = \frac{10 - 0}{1 - 0} = \frac{10}{1} = 10 \text{ км/ч}$$

$$III: V_{cp} = \frac{45 - 45}{3,5 - 3} = \frac{0}{0,5} = 0 \text{ км/ч}$$

$$II: V_{cp} = \frac{45 - 10}{3 - 1} = \frac{35}{2} = 17,5 \text{ км/ч}$$

$$IV: V_{cp} = \frac{45 - 0}{8 - 3,5} = \frac{45}{4,5} = 10 \text{ км/ч}$$



3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t) = 1 - 6t + 2,5t^2$ и $s_2(t) = -3 + 2t + 0,5t^2$. Определить в какой момент времени скорости их будут равны.

Решение:

$$1) V_1(t) = (2.5t^2 - 6t + 1)' = 5t - 6$$

(формула нахождения скорости движения 1 тела)

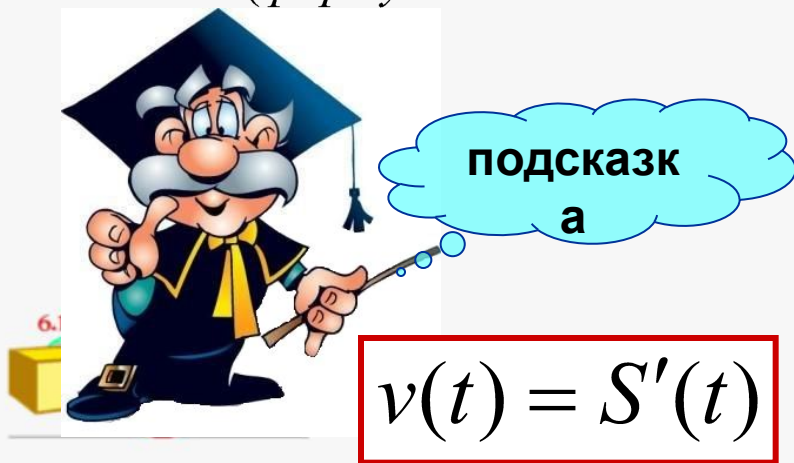
$$2) V_2(t) = (0.5t^2 + 2t - 3)' = t + 2$$

(формула нахождения скорости движения 2 тела)

3) по условию в момент времени t_0 их скорости равны, т.е.

$$5t_0 - 6 = t_0 + 2$$

$$t_0 = 2$$



Ответ: при $t_0 = 2$ с

3. Физический (механический) смысл производной

Задача по химии

Пример: Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью $p(t) = t^2/2 + 3t - 3$ (моль). Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

РЕШЕНИЕ: 1) $v(t) = p'(t) = t + 3$,
2) $v(3) = p'(3) = 3 + 3 = 6$ (моль/сек)



подсказк
а

$$v(t) = P'(t)$$

Ответ: 6 моль / сек

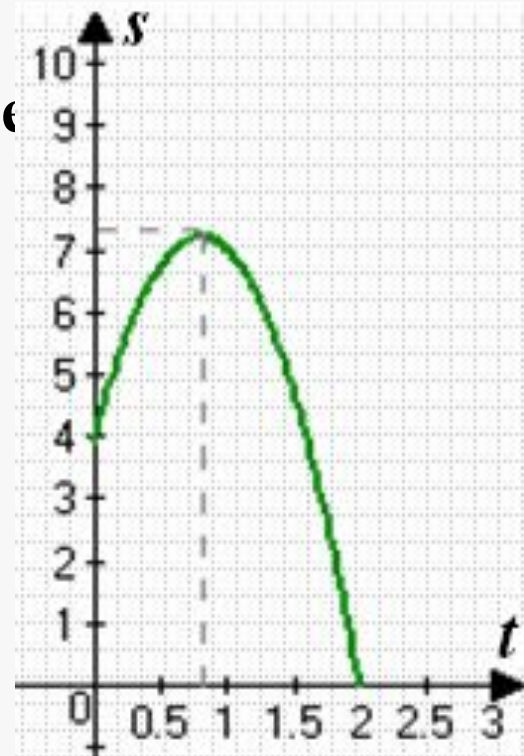
3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Тело, подброшенное вверх движется по закону $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$. Найдите:

- 1) скорость тела в начальный момент времени
- 2) наибольшую высоту подъёма тела.

РЕШЕНИЕ:

- 1) $v(t) = s'(t) = 8 - 10t$ - скорость тела;
- 2) $t=0$, $v(0) = s'(0) = 8$ м/с – скорость тела в начальный момент времени



- 3) $s(0,8) = 4 + 8 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,64 = 7,2$ м – максимальная высота броска тела.

Ответ: 8 м/с ; 7,2 м.



подсказка

$$v(t) = S'(t)$$

УСТНО! Задача по физике

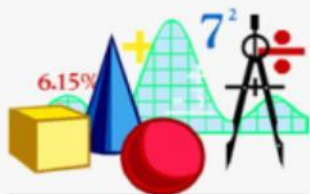
Точка движется прямолинейно по закону

$$S(t) = t^3 - 2t^2.$$

Выберите какой из формул задается скорость движения точки в момент времени t .

$$S'(t) = v(t)$$

1) $3t^2 - 2$; 2) $t^2 - 4t$; 3) $3t^2 - 4t$; 4) $t^4 - 2t^3$



Ответ: 3

УСТНО!

Задача по экономике

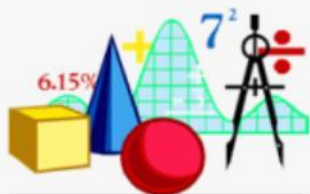
Объем продукции V цеха в течение дня зависит от времени по

$$V(t) = -5/3t^3 + 15/2t^2 + 50t + 70.$$

Вычислите производительность труда $\Pi(t)$.

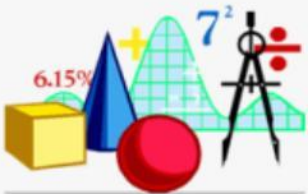
$$V'(t) = \Pi(t).$$

Ответ: $\Pi(t) = -5t^2 + 15t + 50$

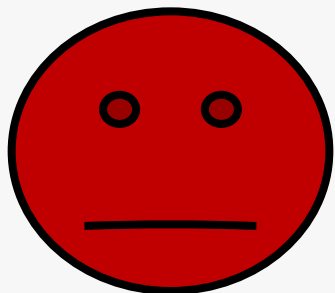


Подведём итог:

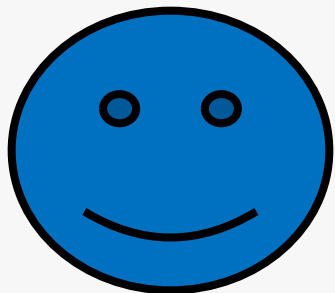
1. Что называется касательной к графику функции в точке?
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. Сформулируйте алгоритм нахождения уравнения касательной?
4. В чём заключается физический смысл производной?



Выберете смайлик, соответствующий вашему настроению и состоянию после проведенного урока



тревожно, не уверен в себе



спокойно, у меня все получится

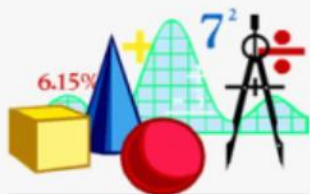


безразлично, что будет, то и будет



Домашнее задание:

Написать конспект занятия. Выделить формулы и определения.



Используемая литература:

1. Учебник Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа 10-11»
2. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
3. Алгебра и начала математического анализа: Задачник, Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
4. Алгебра и начала анализа. Самостоятельные и контрольные работы для 10-11 классов. / Ершова А.П., Голобородько В.В. – М.: ИЛЕКСА, 2010
5. ЕГЭ 2010. Математика. Задача В8. Рабочая тетрадь / Под редакцией А.Л.Семенова и И.В.Ященко – М.: Издательство МЦНМО, 2010
6. МАТЕМАТИКА СБОРНИК ТЕСТОВ ПО ПЛАНУ ЕГЭ 2009. Учебно-методическое пособие. под редакцией А. Г. Клово, Д. А. Мальцева; Ростов-на-Дону. НИИ школьных технологий

