

Курс «Прикладные задачи ТМО»

Вторая модель Эрланга

Лекция 8

Схема 2-й модели Эрланга

$$M \mid M \mid v \mid r < \infty$$

$$\lambda \mid \mu$$

Структурные параметры:

v - количество приборов (линий пучка)

r - количество мест в очереди

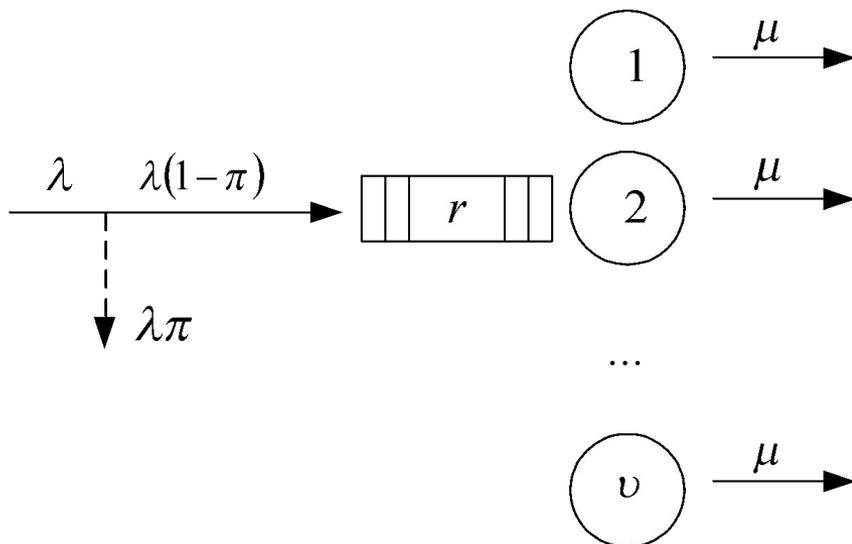
R - емкость системы

Нагрузочные параметры:

λ - интенсивность входящего ПП заявок

μ - интенсивность экспоненциального распределения СВ длительности обслуживания заявки

π - вероятность блокировки заявки, $\pi = P_{v+r}$



Математическая модель

$X(t)$ - число заявок в СМО в момент t , $t \geq 0$

$J = \{0, 1, \dots, R\}$ - пространство состояний системы,

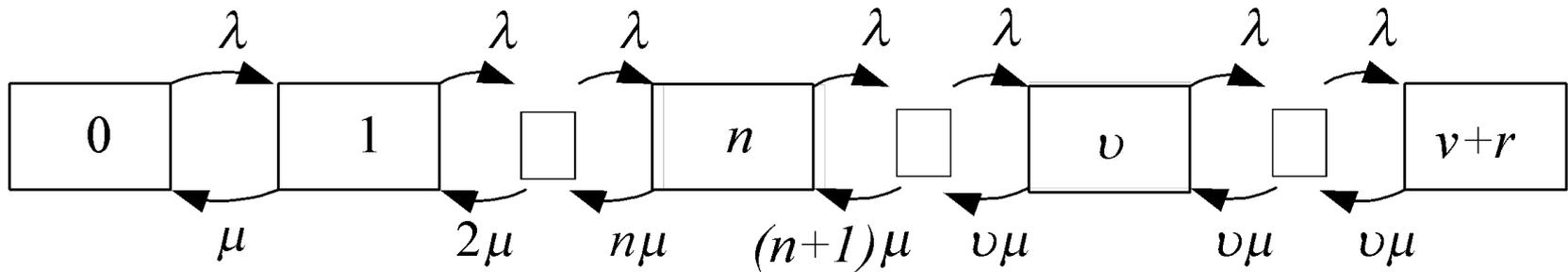
Случайный процесс (СП) $X(t)$ – ПРГ, $X(t) \in J$

$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = n\}$ - стационарная вероятность

состояния $n \in J$

$\{p_n, n \in J\}$ - стационарное распределение вероятностей
ПРГ $X(t)$

Диаграмма интенсивностей переходов



Интенсивности

переходов ПРГ $X(t)$:

$$a_{n,n+1} =: \lambda_n = \lambda u(r - n),$$

$$a_{n,n-1} =: \mu_n = \mu \min(n, v),$$

$$a_{n,n} = -\lambda_n - \mu_n.$$

СУГБ

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n+1)\mu p_{n+1} = 0, \quad n = \overline{1, \nu-1};$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \nu\mu)p_n + \nu\mu p_{n+1} = 0, \quad n = \overline{\nu, \nu+r-1};$$

$$\lambda p_{\nu+r-1} - \nu\mu p_{\nu+r} = 0.$$

СУЛЬ

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \quad n = \overline{1, \nu};$$

$$\lambda p_{n-1} = \nu\mu p_n, \quad n = \overline{\nu, \nu+r}.$$

Условие нормировки: $\sum_{n=0}^{\nu+r} p_n = 1$

Стационарное распределение (1/4)

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n = \overline{0, v}; \\ \left(\frac{\rho}{v}\right)^{n-v} p_v = \frac{\rho^n}{v! v^{n-v}} p_0, & n = \overline{v, v+r}. \end{cases}$$

Здесь

$\rho = \lambda/\mu$ - предложенная нагрузка на СМО

Стационарное распределение (2/4)

p_0 определяется из условия нормировки $\sum_{n=0}^{v+r} p_n = 1$:

$$\begin{aligned} p_0 &= \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \sum_{n=v}^{v+r} \left(\frac{\rho}{v} \right)^{n-v} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \sum_{m=0}^r \left(\frac{\rho}{v} \right)^m \right]^{-1} = \\ &= \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v} \right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Стационарное распределение (3/4)

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1}, & n = \overline{0, v-1}; \\ \frac{\rho^n}{v! v^{n-v}} \cdot \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1}, & n = \overline{v, v+r}. \end{cases}$$

Вероятностные характеристики (1/2)

Вероятность π блокировки заявки:

$$\pi = P_{v+r} = \frac{\rho^{v+r}}{v!v^r} \cdot P_0 \quad \text{при } r < \infty$$

Средняя длина Q очереди (ср. число заявок в очереди):

$$Q = 0 \cdot (p_0 + p_1 + \dots + p_v) + 1 \cdot p_{v+1} + 2 \cdot p_{v+2} + \dots + r \cdot p_{v+r} = \sum_{n=1}^r n p_{v+n} =$$
$$= \frac{\rho^{v-1}}{(v-1)!} \cdot \frac{1 + r \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1} - (r+1) \left(\frac{\rho}{v}\right)^r}{\left(\frac{v}{\rho} - 1\right)^2} \cdot p_0, \quad r < \infty$$

Вероятностные характеристики (2/2)

Среднее число заявок в системе:

Просуммируем СУЛБ, получим

$$\lambda(1 - \pi) = \mu \left(\sum_{n=0}^{v-1} n p_n + \sum_{n=v}^{v+r} v p_n \right) = \mu \bar{n},$$

где \bar{n} - среднее число занятых приборов.

Тогда среднее число заявок в системе N находится по формуле

$$N = \bar{n} + Q$$

Вероятностно-временные характеристики

η – случайная величина (СВ) времени обслуживания,

$$B(t) = P\{\eta < t\} = \exp(-\mu t) - \text{ФР СВ } \eta,$$

$$M\eta = \int_0^{\infty} t dB(t) = \frac{1}{\mu} - \text{ср. значение СВ } \eta.$$

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$$W(t) = P\{\omega < t\} - \text{ФР СВ } \omega,$$

$$M\omega = \bar{\omega} - \text{ср. значение СВ } \omega.$$

ν – СВ времени пребывания заявки в СМО,

$$V(t) = P\{\nu < t\},$$

$$M\nu = \bar{\nu} - \text{ср. значение СВ } \nu.$$

Время ожидания начала обслуживания

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$W(t) = P\{\omega < t\}$ - ФР СВ ω ,

$M\omega = \bar{\omega}$ - ср. значение СВ ω .

Вероятность немедленного обслуживания:

$$P\{\omega = 0\} = \sum_{n=0}^{v-1} P_n = \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1} \sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!}.$$

ФР времени ожидания заявки

Пусть в момент t поступления заявки в СМО $X(t) = i, i = \overline{0, \nu + r}$.

$$i = \nu + r: \quad P\{\text{заявка будет потеряна}\} = \pi = p_{\nu+r}$$

$$i = \overline{0, \nu + r - 1}: \quad P\{\text{заявка будет принята в СМО}\} = 1 - \pi = 1 - p_{\nu+r}$$

$$i = \overline{0, \nu - 1}: \quad P\{\text{заявка немедленно начнет обслуживаться}\} = \\ = P\{\omega = 0\} = \sum_{n=0}^{\nu-1} p_n$$

$i = \overline{\nu, \nu + r - 1}$: заявка ожидает начала обслуживания в течение времени, необходимого для обслуживания полностью загруженной системой $(i - \nu + 1)$ заявок.

$$P\{(i - \nu + 1) \text{ заявок покинет СМО за время } t\} = E_{i-\nu+1}(t)$$

- ФР Эрланга с параметрами $\nu\mu$ и $(i - \nu + 1)$.

ПЛС ФР времени ожидания заявки

$$\begin{aligned} \text{ФР } W(t) = P\{\omega < t\} &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\nu-1} p_n + \sum_{i=\nu}^{\nu+r-1} p_i E_{i-\nu+1}(t) \right] = \\ &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \sum_{j=0}^{r-1} p_{\nu+j} E_{j+1}(t) \right] \end{aligned}$$

ПЛС $\omega(s)$, $s \geq 0$, СВ ω :

$$\begin{aligned} \omega(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dW(t) &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + p_{\nu} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\rho^j}{\nu^j} \int_0^{\infty} e^{-st} dE_{j+1}(t) \right] = \\ &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + p_{\nu} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\lambda^j}{(\nu\mu)^j} \frac{(\nu\mu)^{j+1}}{(\nu\mu + s)^{j+1}} \right] = \end{aligned}$$

Среднее время ожидания заявки

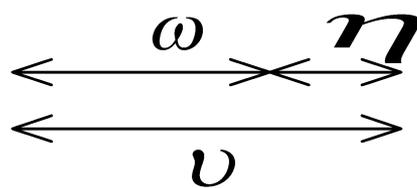
ПЛС $\omega(s)$, $s \geq 0$, ФР $W(t)$:

$$\begin{aligned}\omega(s) &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \nu\mu p_\nu \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\lambda^j}{(\nu\mu + s)^{j+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \nu\mu p_\nu \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\nu\mu + s}\right)^r}{\nu\mu + s - \lambda} \right]\end{aligned}$$

Среднее время ожидания $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = -\omega'(0) = \frac{p_\nu}{1-\pi} \cdot \frac{\nu\mu - \left(\frac{\rho}{\nu}\right)^r [(r+1)\nu\mu - r\lambda]}{(\nu\mu - \lambda)^2}$$

ФР времени пребывания заявки в СМО



$$v = \omega + \eta$$

$$\text{ФР } V(t) = P\{v < t\} - ?$$

ПЛС $v(s)$, $s \geq 0$, ФР $V(t)$:

$$v(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dV(t) = \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + v\mu p_v \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{v\mu + s}\right)^r}{v\mu + s - \lambda} \right] \cdot \frac{\mu}{\mu + s}$$

Среднее время пребывания \bar{v} :

$$\bar{v} = -v'(0) = \bar{\omega} + \frac{1}{\mu}$$