

ТЕМА 8. Линейная непрерывная система и ее представления

1. Классификация элементов систем
2. Уравнения динамики и статики.
3. Понятие передаточной функции
4. Передаточные функции различных соединений звеньев
5. Временные характеристики систем и их элементов

1 Классификация элементов систем

Система автоматического управления – это совокупность элементов, соединенных в замкнутый контур, которые функционируют согласованно и подчинены определенной форме управления.

По функциональному назначению:

- ☐ Измерительные
- ☐ Усилительно-преобразовательные
- ☐ Исполнительные
- ☐ Корректирующие

По виду энергии, используемой для работы:

- ☐ Электрические
- ☐ Механические
- ☐ Гидравлические
- ☐ Пневматические
- ☐ Комбинированные

По характеру математического соответствия между входным и выходным сигналами.

При математическом описании элементы называются **звеньями САУ**.

Несмотря на многообразие различного рода элементов (устройств) и независимо от физических принципов их работы, поведение каждого из них может быть описано дифференциальным уравнением, связывающим входную и выходную переменные.

Элементы описываются, как правило, *дифференциальными уравнениями первого или второго порядка*.

Рассматриваем одномерную модель с одним входом и одним выходом, и обозначим **входную** величину звена через **$u(t)$** , а **выходную** через **$y(t)$** .

При рассмотрении линейных систем статическая характеристика $y = f(t)$ любого звена может быть изображена прямой линией.

В **позиционном (или усилительном)** звене линейной зависимостью $y = Ku$ связаны входная и выходная величина в установившемся режиме. K - коэффициент передачи или коэффициент усиления звена.

В **интегрирующих звеньях** линейной зависимостью

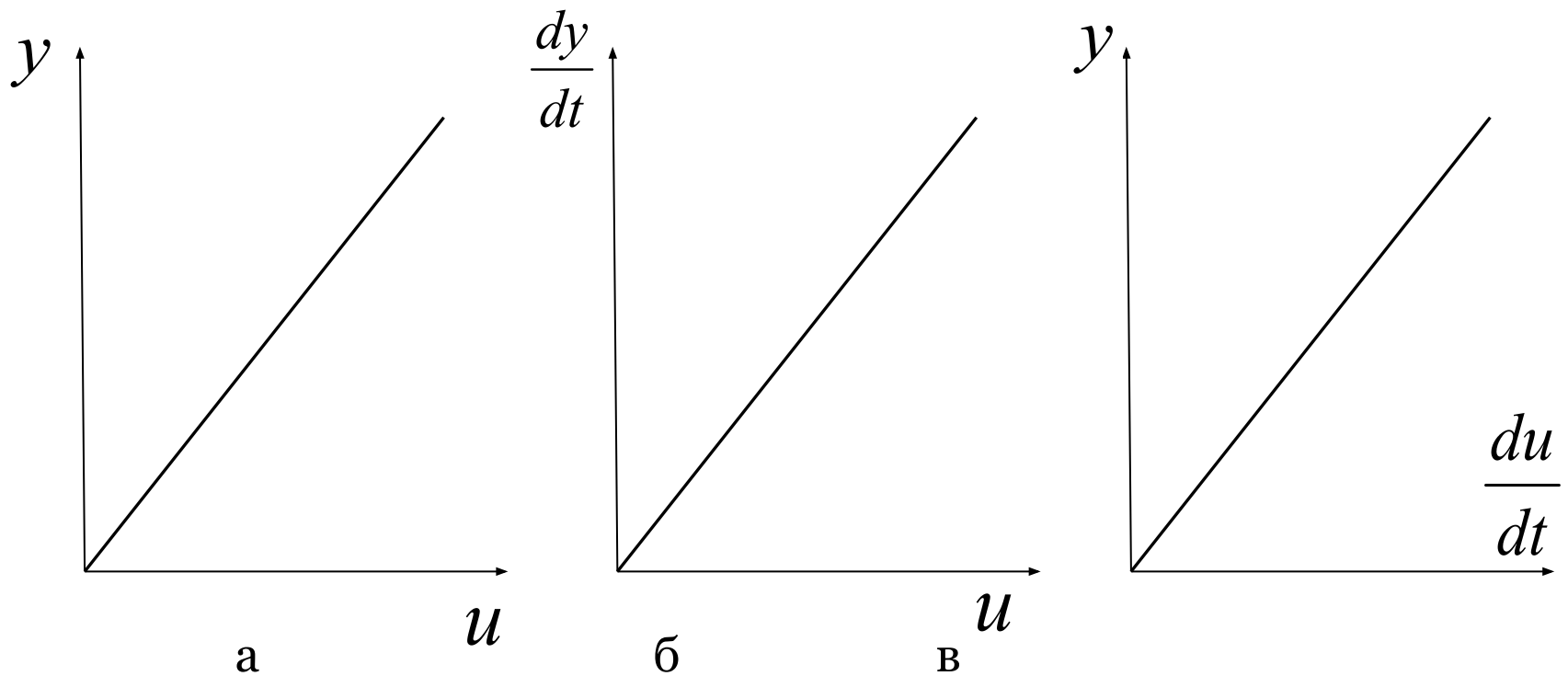
$$\frac{dy}{dt} = Ku \quad \Rightarrow \quad y = K \int u dt$$

связаны производная выходной величины и входная величина в установившемся режиме.

В **дифференцирующих звеньях** линейной зависимостью

$$y = K \frac{du}{dt}$$

связаны в установившемся режиме выходная величина и производная входной величины



Статические характеристики

а – усилительного звена, б – интегрирующего звена,
в – дифференцирующего звена

2 Уравнения динамики и статики

В общем случае линейная система описывается линейным дифференциальным уравнением, представленным в стандартной форме

$$a_n \cdot \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u. \quad (1)$$

где t – текущее время;

n – порядок дифференциального уравнения; $m \geq n$

u – входное воздействие (сигнал);

y – выходное воздействие (сигнал);

a_i и b_j – коэффициенты, определяемые параметрами системы.

Если эти коэффициенты не зависят от времени, то система называется **стационарной**.

Дифференциальные уравнения называют **уравнениями динамики**, они описывают переходные режимы в системах.

Переходной режим возникает при подаче на вход сигнала (включение устройства) и существует до тех пор, пока на выходе не устанавливается определенная величина сигнала .

Переходной процесс – это процесс изменения сигнала $y(t)$ на выходе от момента подачи входного сигнала $u(t)$ до установления процесса на выходе.

С математической точки зрения $y(t)$ – решение дифференциального уравнения.

Уравнение статики – уравнение установившегося режима, когда все производные равны нулю.

3 Понятие передаточной функции

В инженерной практике широко используется метод решения дифференциальных уравнений, основанный на интегральном преобразовании Лапласа и позволяющий свести задачу к алгебраическим действиям.

Для сигнала $f(t)$ преобразование Лапласа

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

где s – оператор Лапласа

$F(s)$ - называется изображением функции $f(t)$

Соответствие между рядом оригиналов и изображений

- $y(t)$ – оригинал ;
- $Y(s)$ – изображение функции $y(t)$;
- s – КОМПЛЕКСНАЯ переменная;

$x(t) (t > 0)$	$X(s) = L[x(t)]$
$1(t)$	$1/s$
$\delta(t)$	1
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s - a)$
e^{-at}	$1/(s + a)$
$t \cdot e^{at}$	$1/(s - a)^2$
$t^n \cdot e^{at}$	$n!/(s - a)^{n+1}$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2 + \omega^2)$

При нулевых начальных условиях, т. е. в том случае, если при $t < 0$ (до момента подачи сигнала) входная и выходная величины, а так же их производные, тождественно равны нулю, от уравнения (1) формально можно перейти к выражению:

$$\begin{aligned} a_n S^n Y(s) + a_{n-1} S^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 S Y(s) + a_0 Y(s) = \\ = b_m S^m U(s) + \dots + b_1 S U(s) + b_0 U(s). \end{aligned} \quad (2)$$

Передаточная функция звена (системы) $W(s)$ – это отношение изображения по Лапласу выходного сигнала **$Y(s)$** к изображению по Лапласу входного сигнала **$U(s)$** при нулевых начальных условиях

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0}, n \geq m.$$

Примем

$$x_2(0) = x_2^{(1)}(0) = \dots = x_2^{(n-1)}(0) = 0;$$

$$x_1(0) = x_1^{(1)}(0) = \dots = x_1^{(m-1)}(0) = 0$$



Прямое преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} a_0 s^n X_2(s) + a_1 s^{n-1} X_2(s) + \dots + a_n X_2(s) = \\ = b_0 s^m X_1(s) + b_1 s^{m-1} X_1(s) + \dots + b_m X_1(s) \end{aligned}$$



$$W(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Передаточные функции звеньев имеют вид:

- **Позиционное или усилительное звено**

$$W(s) = K;$$

- **Интегрирующее звено**

$$W(s) = \frac{K}{s};$$

- **Дифференцирующее звено**

$$W(s) = Ks.$$

Передаточная функция – это одна из форм математических моделей элементов.

Передаточная функция элемента не зависит от того, какой функцией времени является его входное воздействие.

Она зависит лишь от вида дифференциального уравнения и от значений параметров элемента, которые определяют коэффициенты уравнения.

Зная $W(s)$ и $U(s)$ можно найти $Y(s)$ – изображение по Лапласу выходного сигнала: $Y(s) = W(s) * U(s)$, тогда можно найти как обратное преобразование Лапласа:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

$W(s)$ можно представить следующим образом:

$$W(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)},$$

где K – коэффициент усиления,

z_j – нули системы, т. е. корни многочлена числителя,

p_i – полюсы системы, т. е. корни многочлена знаменателя.

Для описания моделей систем и действий над ними широко используется система MATLAB и пакет прикладных программ *Control System Toolbox*.

В пакете введен класс объектов, называемый ***lti* объекты** – линейные с постоянными параметрами. При создании *lti* объекта ему присваивается имя.

- ***tf*-форма**, передаточная функция задается двумя векторами строками, составленными из коэффициентов многочленов числителя и знаменателя в порядке убывания степеней s .

Например, оператор $W = tf([2 \ 1], [1 \ 3 \ 7])$ создает объект W подкласса *tf*, соответствующий передаточной функции

$$W(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+7};$$

zpk-форма нулей, полюсов и коэффициента усиления, в которой передаточная функция описывается двумя векторами-строками и одним числом, задающим нули, полюсы и коэффициент усиления системы.

Например:

$$W = \text{zpk}([-1, -2], [-1 - j, -1 + j], 5)$$

$$W(s) = \frac{5(s+1)(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

При отсутствии нулей на их место записывается знак пусто [].

ss-форма представляет передаточную функцию в параметрах пространства состояний.

При описании элементов и систем кроме входных $u(t)$ и выходных $y(t)$ переменных можно выделить некоторые промежуточные переменные $x(t)$, которые связаны с внутренней структурой системы и называются **переменными состояния**.

В параметрах пространства состояний система n -го порядка с одним входом и одним выходом описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

где A – квадратная матрица порядка n , элементы которой определяются коэффициентами дифференциального уравнения,

B – вектор-столбец $[n \cdot 1]$ постоянных коэффициентов,

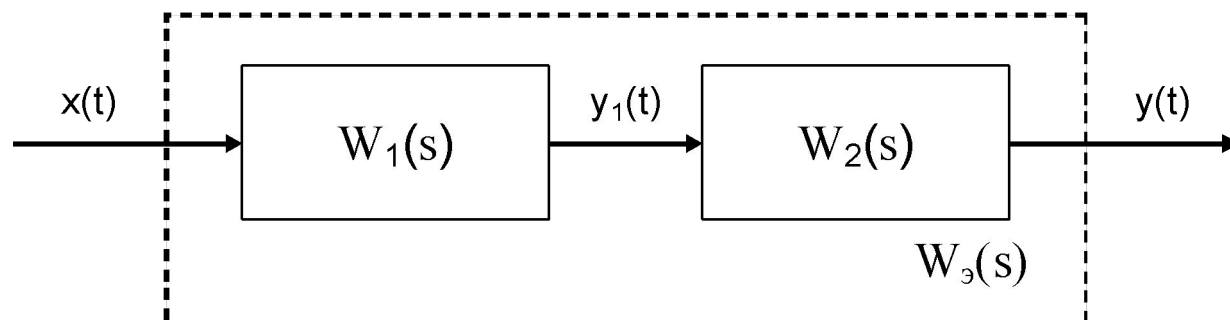
C – вектор-строка $[1 \cdot n]$ постоянных коэффициентов,

D – одноэлементная матрица.

4 Передаточные функции различных соединений звеньев

При последовательном соединении звеньев с известными передаточными функциями $W_1(s)$, $W_2(s)$, ..., $W_n(s)$ передаточные функции перемножаются:

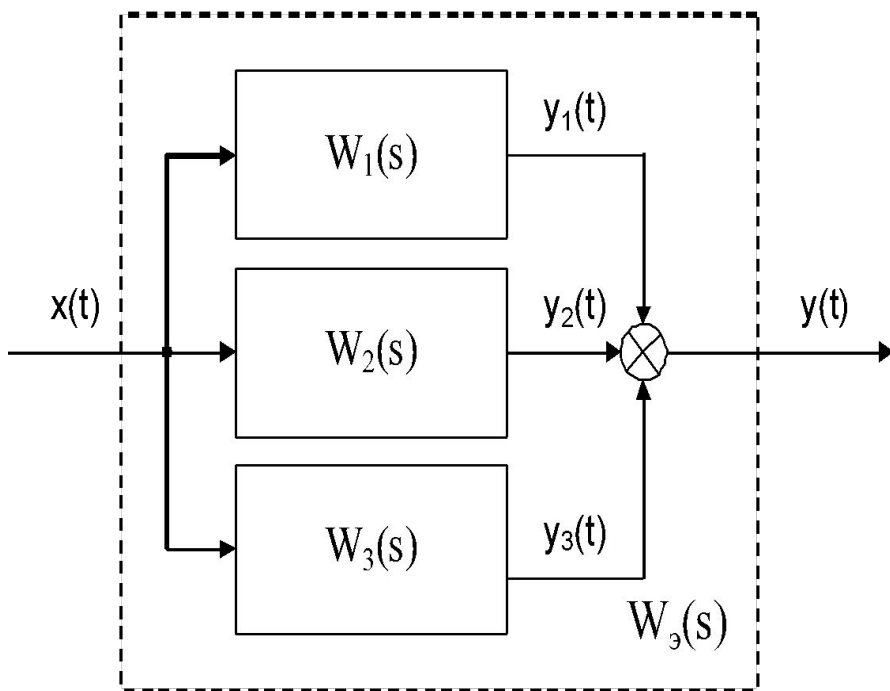
$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot \dots \cdot W_n(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$



$$W_3(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$$

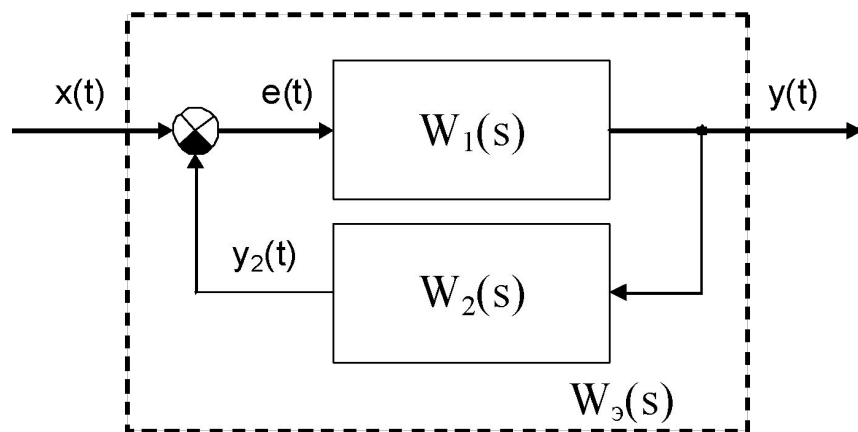
При параллельном соединении звеньев с передаточными функциями $W_1(s)$, $W_2(s)$, ..., $W_n(s)$ передаточные функции складываются

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s).$$



$$\begin{aligned} Y(s) &= [W_1(s) + W_2(s) + W_3(s)] \cdot X(s) \\ &= W_3(s) \cdot X(s) \end{aligned}$$

Соединение звеньев с обратной связью имеет прямую цепь передачи сигнала и цепь обратной связи.



Для соединения с отрицательной обратной связью справедливы следующие соотношения:

$$Y(s) = W_1(s) \cdot E(s) = W_1(s) \cdot [X(s) - Y_2(s)]$$

$$Y_2(s) = W_2(s) \cdot Y(s)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= W_1(s) \cdot X(s) - W_1(s) \cdot Y_2(s) = \\ &= W_1(s) \cdot X(s) - W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot Y(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) + W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot Y(s) = W_1(s) \cdot X(s)$$

$$Y(s) = W_1(s) / [1 + W_1(s) \cdot W_2(s)] \cdot X(s)$$

В итоге получаем

$$W_3(s) = W_1(s) / [1 + W_1(s) \cdot W_2(s)] \quad - \text{ООС} \quad (3)$$

$$W_3(s) = W_1(s) / [1 - W_1(s) \cdot W_2(s)] \quad - \text{ПОС} \quad (4)$$

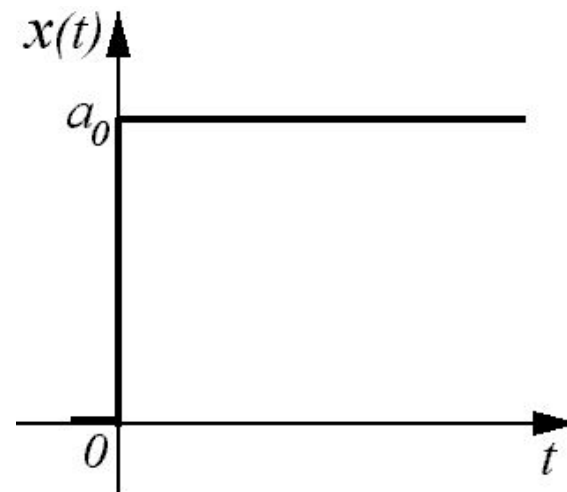
Обратная связь может быть отрицательной и положительной

5 Временные характеристики систем и их элементов

Типовые воздействия

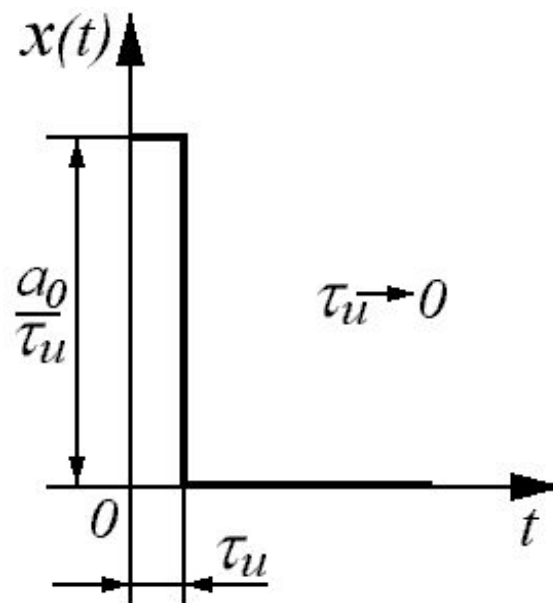
Единичное ступенчатое воздействие

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ a_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

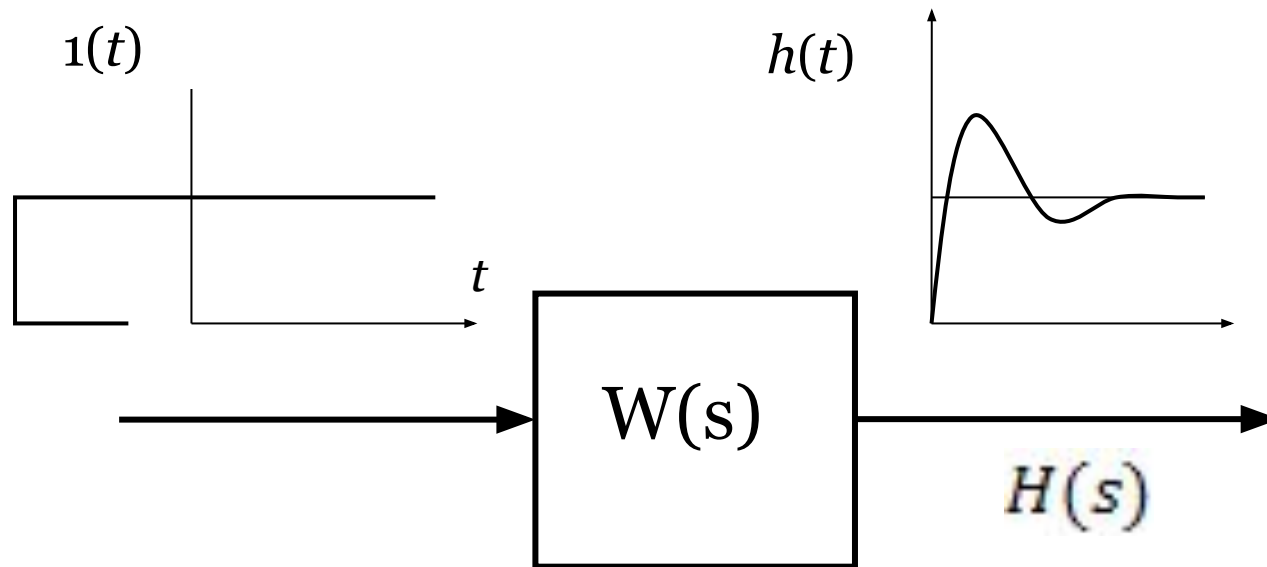


Единичное импульсное воздействие, (дельта – функция)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases}$$



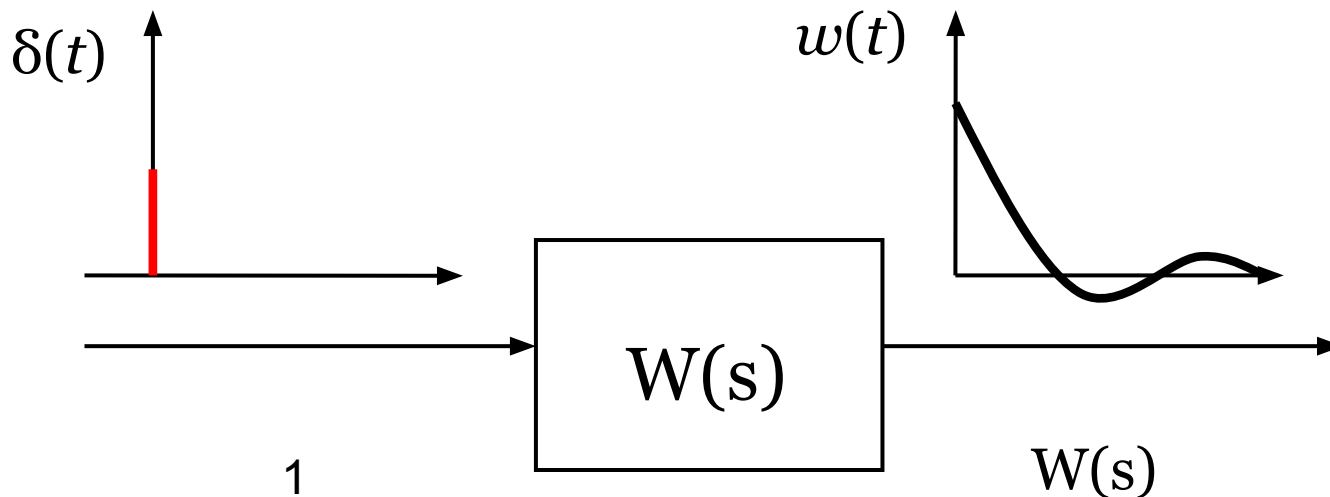
Переходная функция $h(t)$ – это функция, определяющая изменение выходной величины системы (или отдельного элемента) при воздействии на входе единичного ступенчатого сигнала $1(t)$ при нулевых начальных условиях.



$$L\{1[t]\} = \frac{1}{s}$$

$$h(t) = x_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

Импульсная переходная (или весовая) функция $w(t)$ – это функция, определяющая изменение выходной величины системы (или отдельного элемента) при воздействии на входе дельта функции $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.



$$L\{\delta(t)\} = 1.$$

$$L\{w(t)\} = W(s),$$

Передаточная функция $W(s)$ является изображением весовой функции $w(t)$

Пример 1: Найти весовую функцию системы, если переходная функция равна

$$h(t) = 4(1 - e^{-0.3t}).$$

Решение: Найдем изображение переходной функции

$$H(s) = L\{4(1 - e^{-0.3t})\} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 0,3} = \frac{1,2}{s(s + 0,3)}.$$

Получаем передаточную функцию или изображение весовой функции

$$W(s) = \frac{1,2}{s(s + 0,3)}.$$

Откуда весовая функция системы определяется по формуле

$$w(t) = L^{-1}\{1,2 / (s + 0,3)\} = 1,2e^{-0,3t}.$$

Пример 2. Определить передаточную, переходную и весовую функции звена, которое описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy}{dt} + y = ku.$$

Решение:

Переходя в область изображений по Лапласу

$$Ts \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s)$$

найдем передаточную функцию

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts+1}$$

Весовая или импульсная переходная характеристика:

$$W(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts+1} \right\} = \frac{K}{T} e^{\frac{-t}{T}}.$$

Переходная характеристика:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts+1)} \right\} = K(1 - e^{\frac{-t}{T}}).$$