Деревья

Лекция 11, 12

План лекции

- Дерево, поддерево и др. определения
- Обходы деревьев
- Представление деревьев
- Дерево двоичного поиска
- АВЛ деревья

Дерево

Ориентированным деревом T называется ориентированный граф G = (A,R) со специальной вершиной r∈ A, называемой корнем, у которого

- степень по входу вершины r равна 0,
- степень по входу всех остальных вершин равна 1,
- каждая вершина a∈A достижима из r.

Базовые свойства деревьев

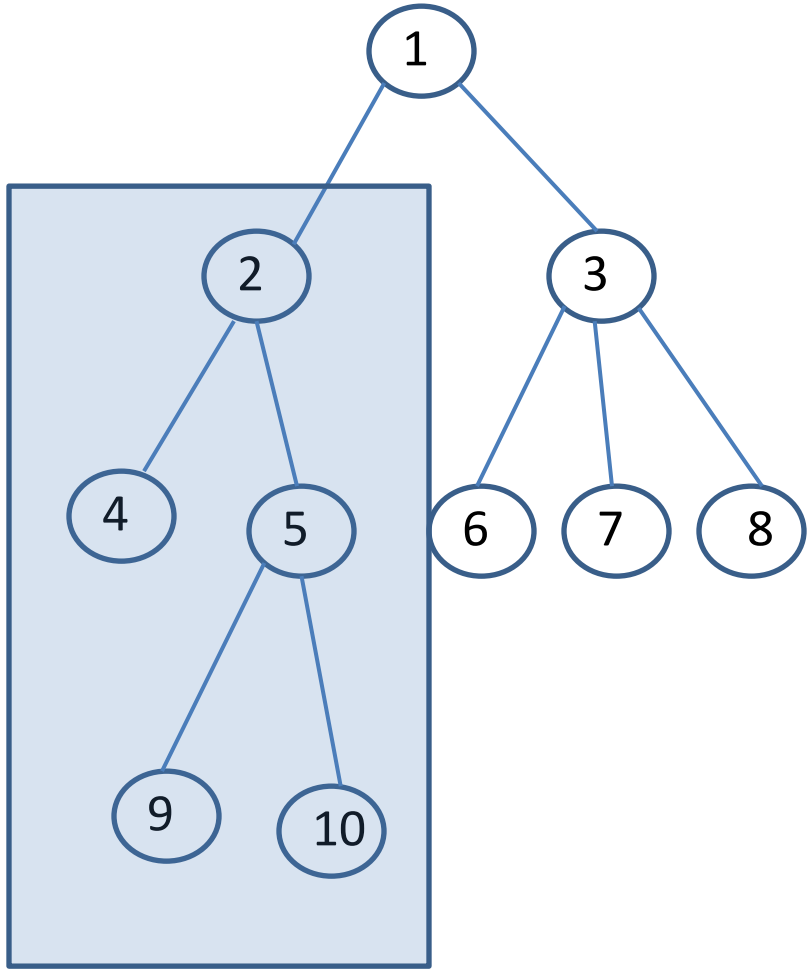
- Дерево не содержит циклов
- Каждая вершина дерева соединяется с его корнем единственным путём

Подерево, лес

Поддеревом дерева T = (A, R) называется такое дерево T' =(A', R'), что

- A' непусто и содержится в A
- R' = (A'xA')∩R
- все потомки вершин из множества A' принадлежат множеству A‘

Ориентированный граф, состоящий из нескольких деревьев, называется лесом



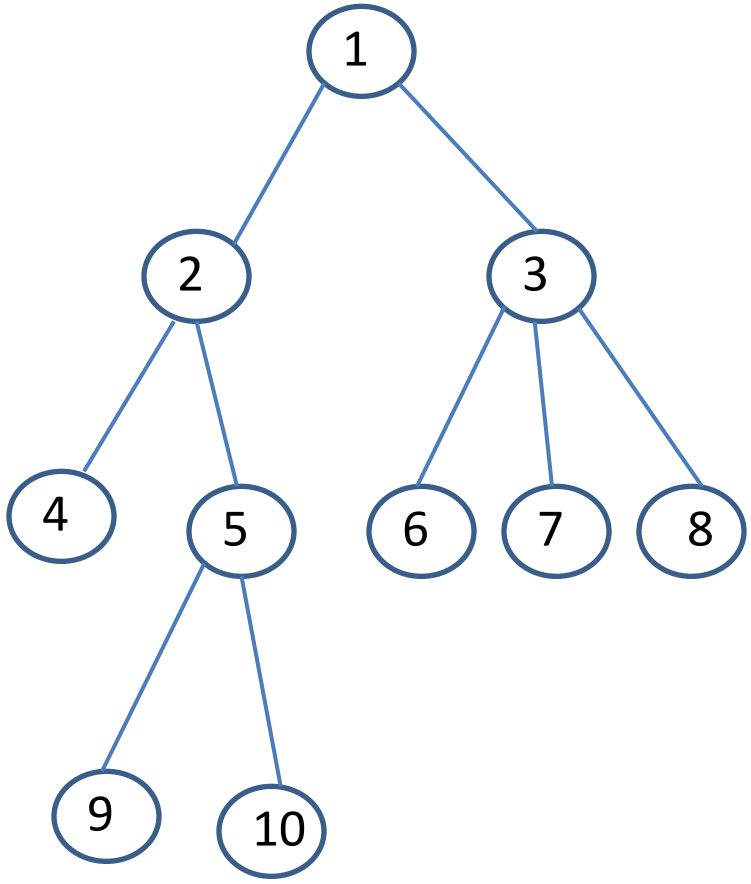
Высота дерева

Пусть T=(A, R) – дерево, (a, b) ∈R, тогда a – отец b, а b – сын a.

Глубина или уровень вершины – длина пути от корня до этой вершины.

Высота вершины – длина максимального пути от этой вершины до листа.

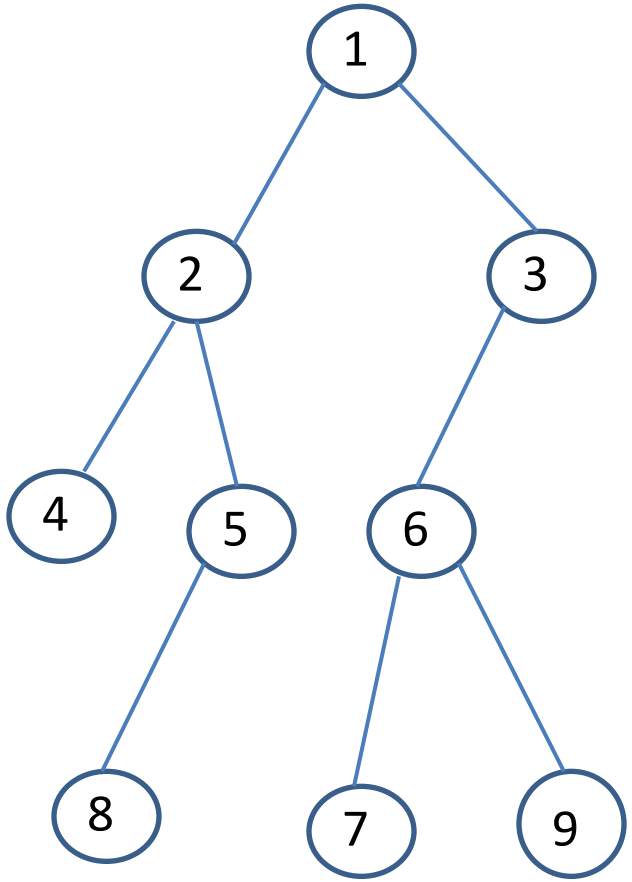
Высота дерева – длина максимального пути от корня до листа.



Бинарное (двоичное) дерево

Упорядоченное дерево – это дерево, в котором множество сыновей каждой вершины упорядочено

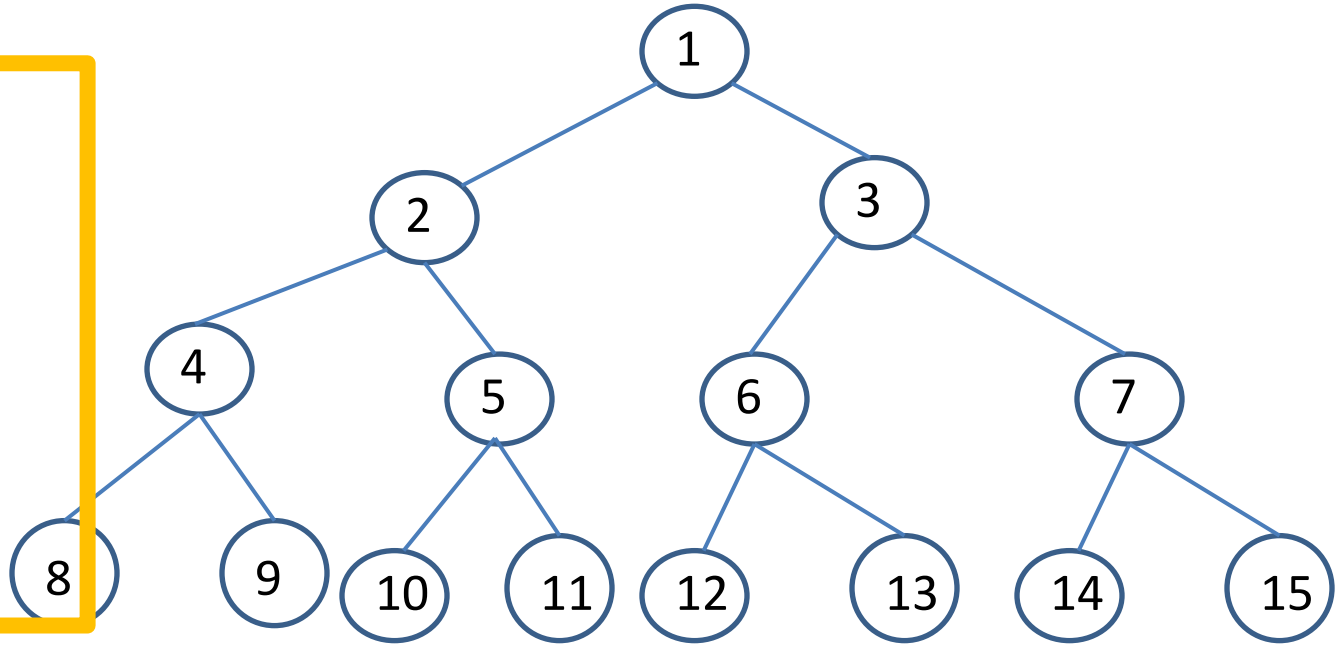
Бинарное дерево – это упорядоченное дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух сыновей



Полное бинарное дерево

Бинарное дерево называется полным, если существует некоторое целое k, такое что любая вершина глубины меньше k имеет как левого, так и правого сына, а если узел имеет глубину k, то он является листом

Сколько вершин содержит полное бинарное дерево высоты *k*?



Обходы деревьев

Обход дерева – это способ перечисления (нумерации) вершин дерева, при котором каждая вершина получает единственный номер

Обходы

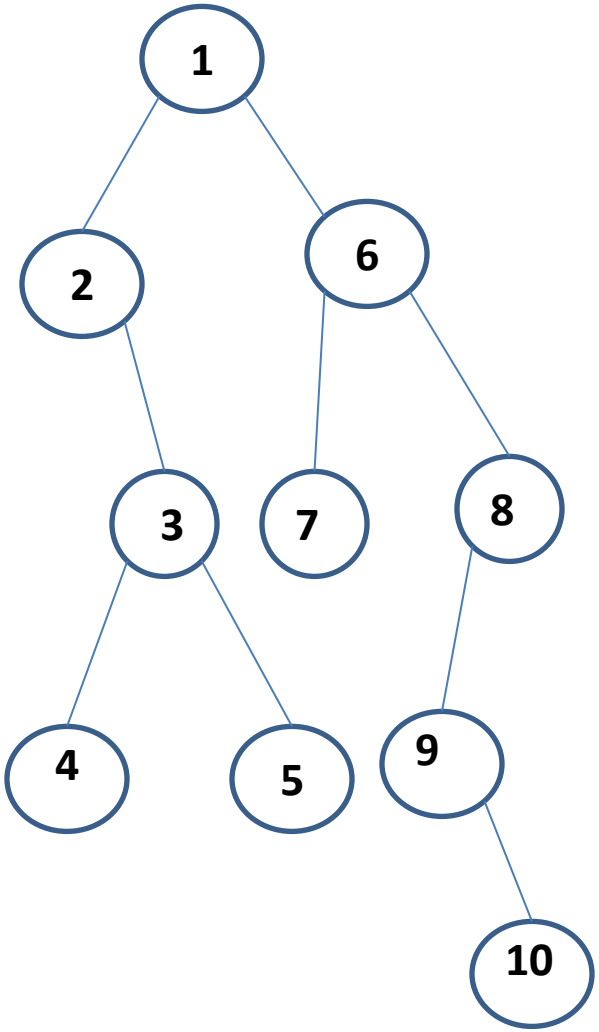
- в глубину
- в ширину

Обходы в глубину

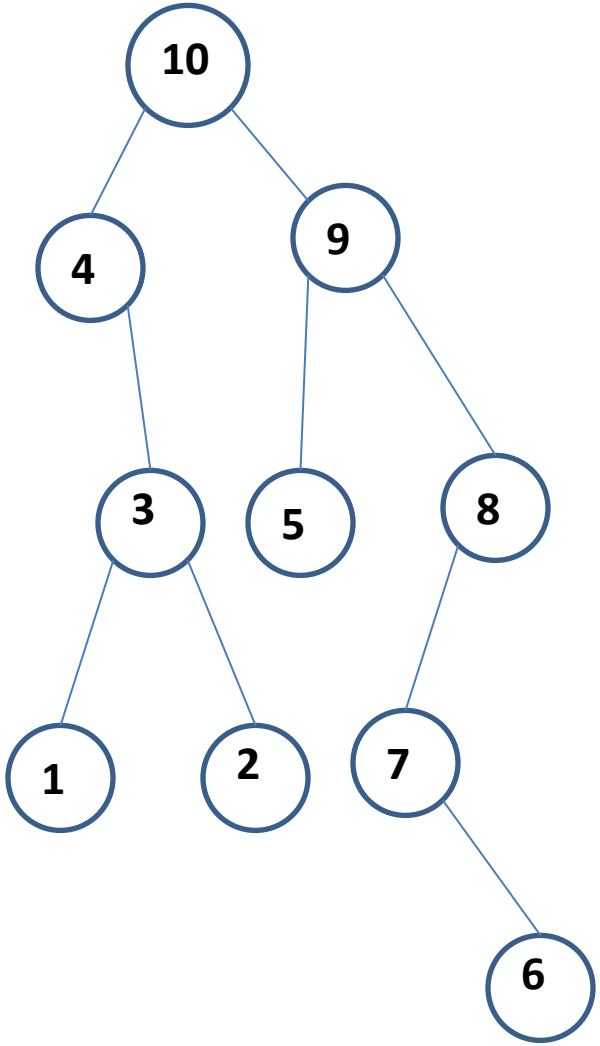
Пусть T – дерево, r - корень, v_1, v_2, …, v_n – сыновья вершины r

- Прямой (префиксный) обход
  - Пронумеровать (посетить) корень r
  - Пронумеровать в прямом порядке поддеревья с корнями v_1, v_2,…, v_n
- Обратный (постфиксный) обход
  - Пронумеровать в обратном порядке поддеревья с корнями v_1, v_2,…, v_n
  - Пронумеровать корень r
- Внутренний (инфиксный) обход для бинарных деревьев
  - Пронумеровать во внутреннем порядке левое поддерево корня r (если существует)
  - Пронумеровать корень r
  - Пронумеровать во внутреннем порядке правое поддерево корня r (если существует)

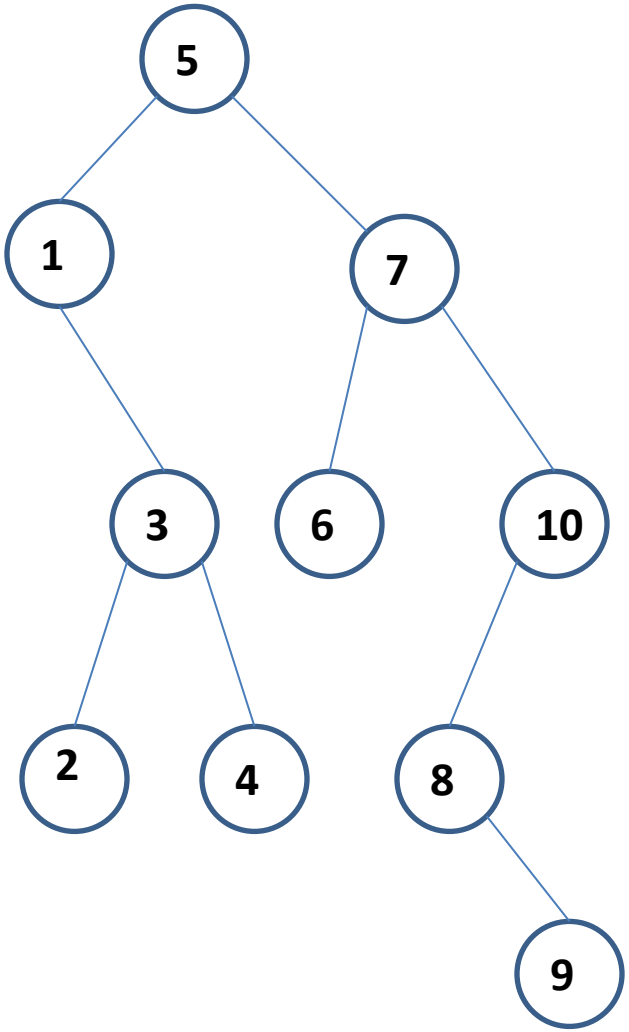
Примеры обходов дерева в глубину



Прямой

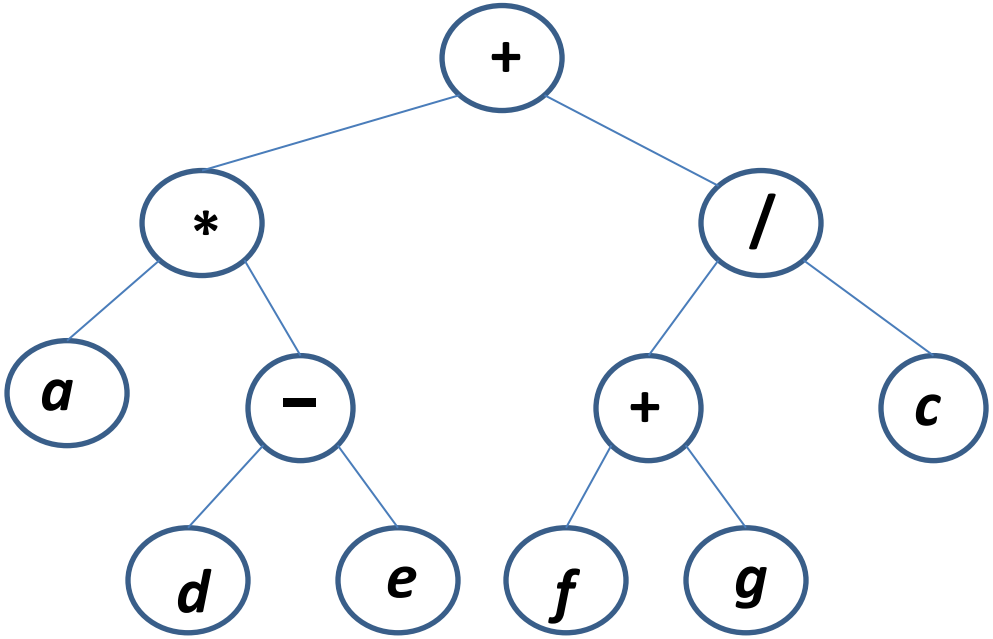


Обратный



Внутренний

Обходы в глубину дерева синтаксического разбора арифметического выражения



- Префиксный обход

  + * a – d e / + f g c
- Постфиксный обход (обратная польская запись)

  a d e – * f g + c / +
- Инфиксный обход (обычная скобочная запись)

  a * (d – e)+ (f + g) / c

Обход деревьев в ширину

Обход вершин дерева по уровням от корня слева направо (или справа налево)

Алгоритм обхода дерева в ширину

Шаг 0:

Поместить в очередь корень дерева

Шаг 1:

Взять из очереди очередную вершину

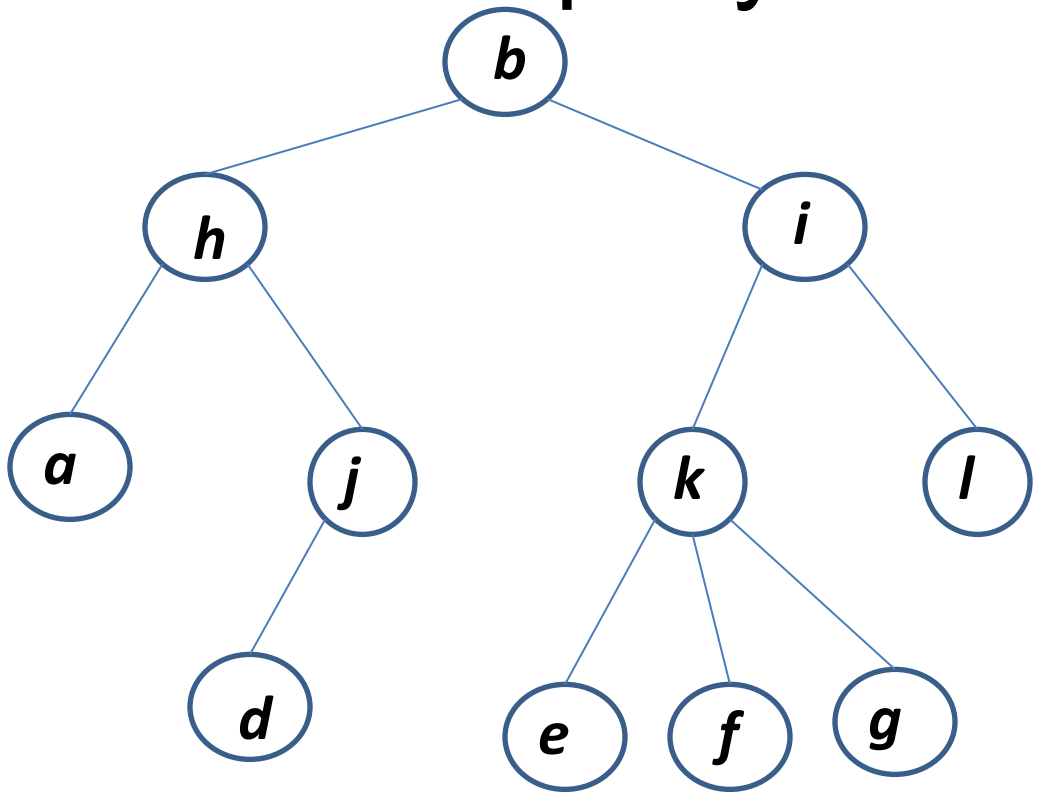
Поместить в очередь всех ее сыновей по порядку слева направо (справа налево)

Шаг 2:

Если очередь пуста, то конец обхода, иначе перейти на Шаг 1

Какой обход получится, если заменить очередь на стек?

Пример обхода дерева в ширину



b	h	i	a	j	k	l	d	e	f	g

Бинарное дерево -- операции

```
T          -- данные
tree_t     -- двоичное дерево с данными T
place_t    -- ячейка дерева

tree_t  create  ();                  place_t  left  (place_t t);
void    insert  (tree_t *t, T val);  place_t  right (place_t t);
void    erase   (tree_t *t, T val);  T        getval (place_t t);
place_t find    (tree_t t, T val);   void     setval (place_t t, T val);
void    destroy (tree_t *t);         place_t  end   ();
```

Представление бинарных деревьев с помощью указателей

```
struct place_t {
    T data;             // данные
    struct place_t *left;    // левое п/дерево
    struct place_t *right;   // правое п/дерево
};
struct tree_t {
    struct place_t *root;
};
typedef struct tree_t          tree_t;
typedef struct place_t     *   place_t;
```

Представление полных бинарных деревьев с помощью массива

Пусть T[2^k-1] – массив для хранения вершин дерева, k- высота дерева.

В T[0] хранится корень дерева.

Левый сын узла *i* расположен в позиции 2*i+1

правый сын – в позиции 2*i+2 .

Отец узла, находящегося в позиции i>0, расположен в позиции (i-1) div 2

Пример представления с помощью массива

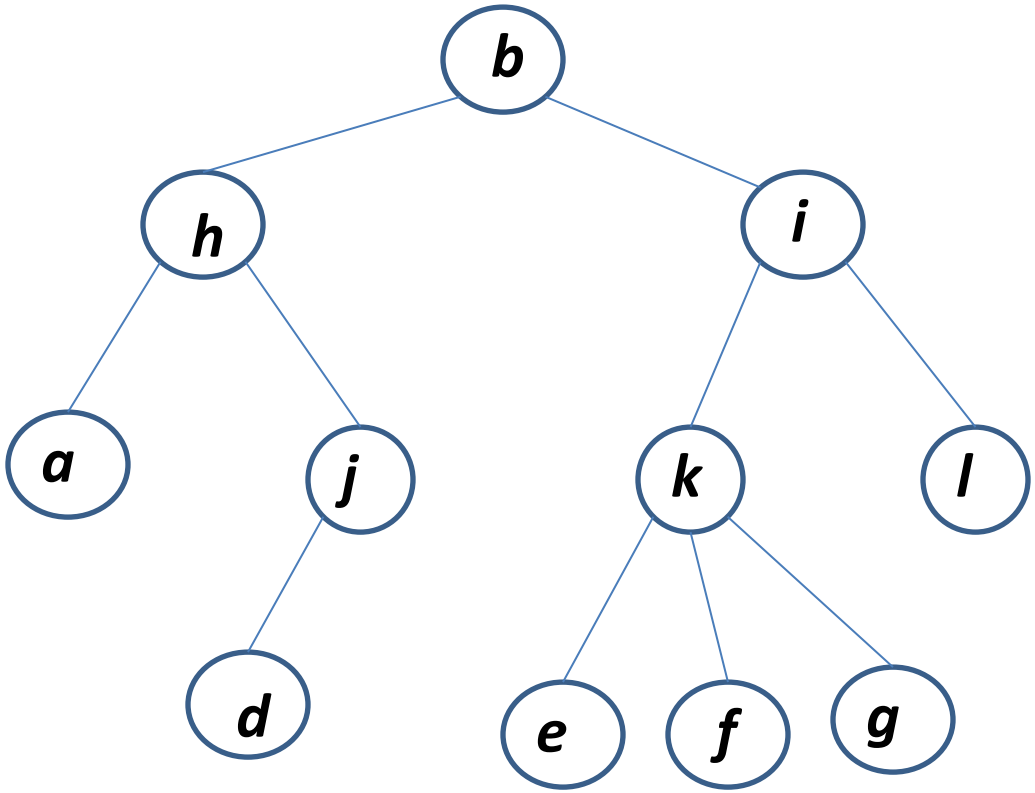
<table>
<tr><td colspan="8">A[0]</td></tr>
<tr><td colspan="4">A[1]</td><td colspan="4">A[2]</td></tr>
<tr><td colspan="2">A[3]</td><td colspan="2">A[4]</td><td colspan="2">A[5]</td><td colspan="2">A[6]</td></tr>
<tr><td>A[7]</td><td>A[8]</td><td>A[9]</td><td>A[10]</td><td>A[11]</td><td>A[12]</td><td>A[13]</td><td>A[14]</td></tr>
</table>

Скобочное представление деревьев

Левое и правое скобочные представления Lrep(T) и Rrep(T) дерева T строятся по следующим рекурсивным правилам

1. Если корнем дерева T служит вершина a, не имеющая прямых потомков, то
   Lrep (T) = Rrep(T) = a
2. Если корнем дерева T служит вершина a с поддеревьями T_1, T_2, . . ., T_n, расположенными в этом порядке (их корни — прямые потомки вершины a), то
   Lrep(T) = a(Lrep (T_1), Lrep (T_2) , . . ., Lrep (T_n))
   Rrep(T) = (Rrep(T_1), Rrep(T_2), . . ., Rrep (T_n))a

Пример скобочного представления неориентированного дерева



- Lrep(T) = b (h (a, j (d)), i (k (e, f, g), l))
- Rrep(T) = ((a, (d) j) h, ((e, f, g) k, l) i) b

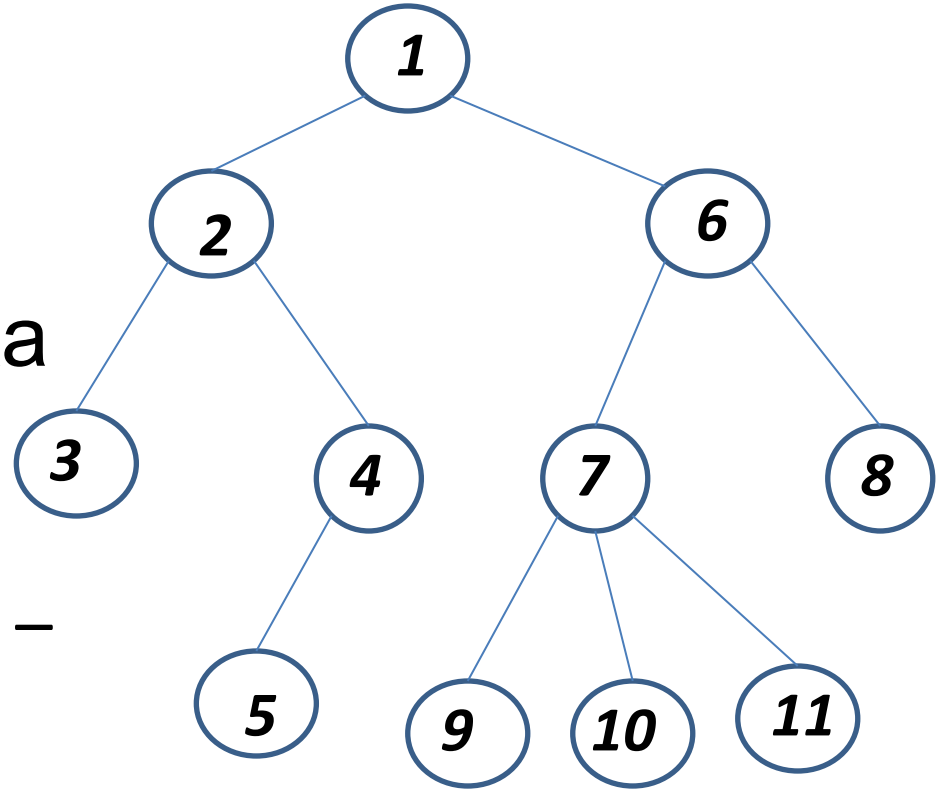
Пример печати левого скобочного представления двоичного дерева

```
void print_Lrep          (tree_t t)
{
    print_Lrep_body   (t.root);
}


void print_Lrep_body      (place_t t)
{
    if (t == end()) return;
    printf              ("%d(", getval(t));
    print_Lrep_body   (left(t));
    print_Lrep_body   (right(t));
    printf              (")");
}
```

Представление дерева списком прямых предков

- Вершины дерева нумеруются числами от 1 до n
- i-й элемент списка прямых предков равен
  - 0, если вершина i – это корень
  - номер отца вершины i, иначе



0 1 2 2 4 1 6 6 7 7 7

Дерево двоичного поиска

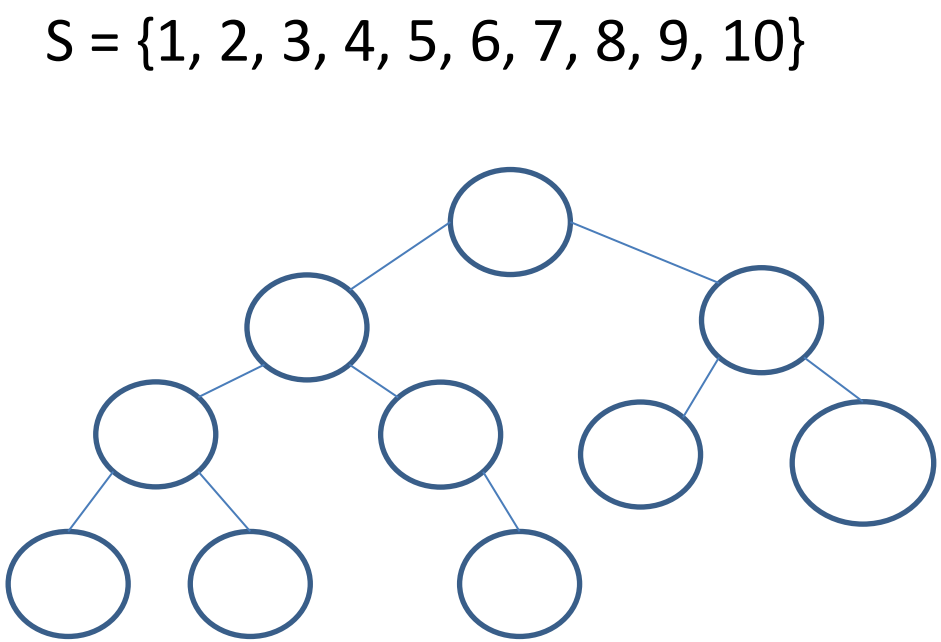
Деревом двоичного поиска для множества S называется помеченное двоичное дерево, каждый узел v которого помечен элементом $l(v) \in S$ так, что

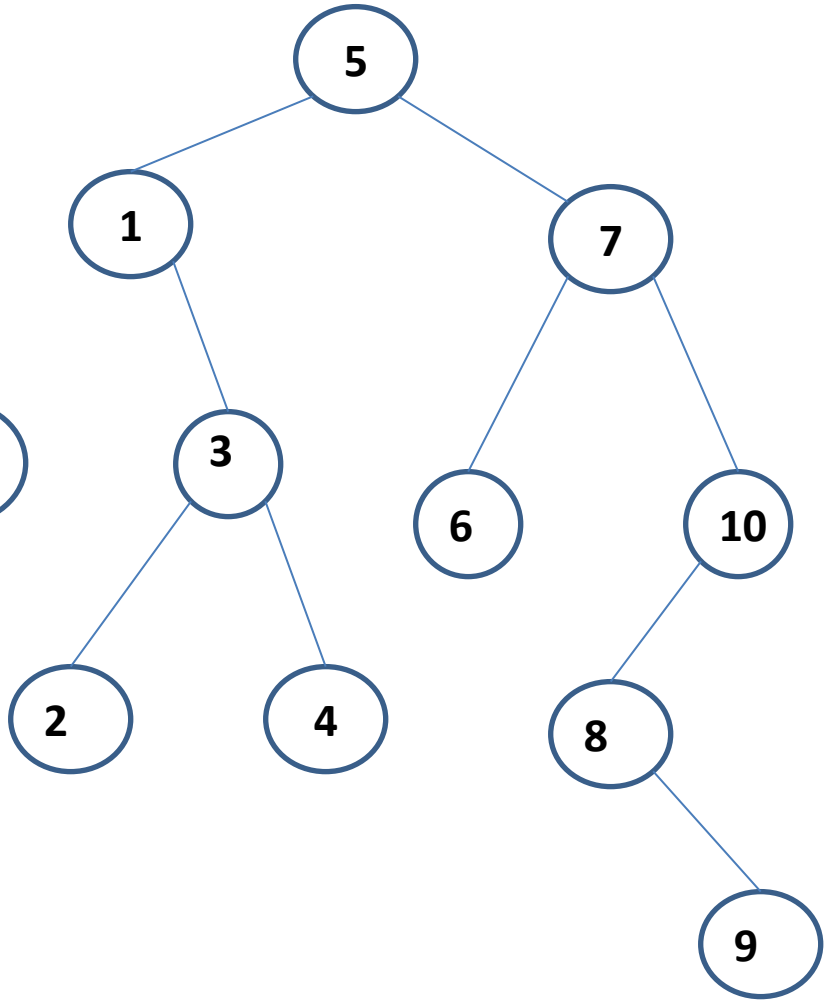
1. $l(u) < l(v)$ для каждого узла u из левого поддерева узла v,
2. $l(w) > l(v)$ для каждого узла w из правого поддерева узла v,
3. для любого элемента $a \in S$ существует единственный узел v , такой что $l(v) = a$.

Примеры ДДП

Примеры ДДП для множества

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}





Поиск в дереве двоичного поиска

```
Вход
   Дерево Д двоичного поиска для множества S, элемент a.
Выход
   истина, если a∈S
   ложь иначе

логическая функция ПОИСК (a, Lrep(Д))
{
   если Lrep(Д) == x, то вернуть I(x) == a;
   иначе
    Lrep(Д) = x(Л, П);
    если a == I(x), то вернуть истина;
    иначе если a < I(x),  то вернуть ПОИСК(a, Л);
    иначе вернуть ПОИСК(a, П);
    всё;
   всё;
}
```

Как обойтись без рекурсии?

Сбалансированные деревья АВЛ

- Георгий Михайлович Адельсон-Вельский р. 1922

- Евгений Михайлович Ландис 1921-1997

- Один алгоритм организации информации // Доклады АН СССР. 1962. Т. 146, № 2. С. 263–266

Сбалансированные деревья АВЛ

- Время вставки вершины в дерево двоичного поиска, содержащее n вершин
  - O(log2n) в лучшем случае для полных деревьев
  - O(n) в худшем случае для вырожденных деревьев, имеющих структуру списка

- Можно устранить вырождение дерева в список и сократить время вставки вершины с O(n) до O(log2n) даже в худшем случае

- Дерево двоичного поиска сбалансировано, если высоты поддеревьев каждой из его вершин отличаются не более, чем на единицу

Вставка вершины в АВЛ дерево

АВЛ дерево вставка(значение x, АВЛ дерево T)

если T == NULL, то вернуть x(NULL,NULL)

иначе

T имеет вид a(L, R);

TT = x < a ? a(вставка(x, L), R)

: a(L, вставка(x, R));

восстановить сбалансированность в корне дерева TT

вернуть TT

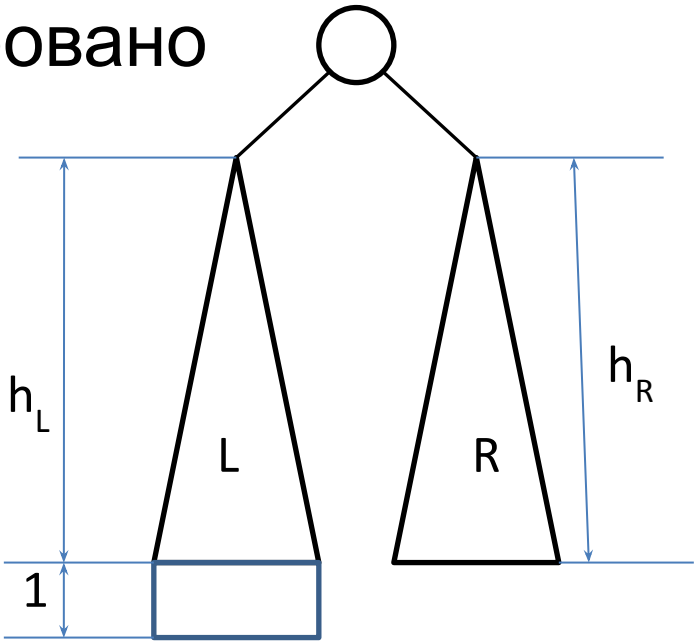
Вставка вершины в АВЛ дерево

Высота TT == высота T ==> TT сбалансировано

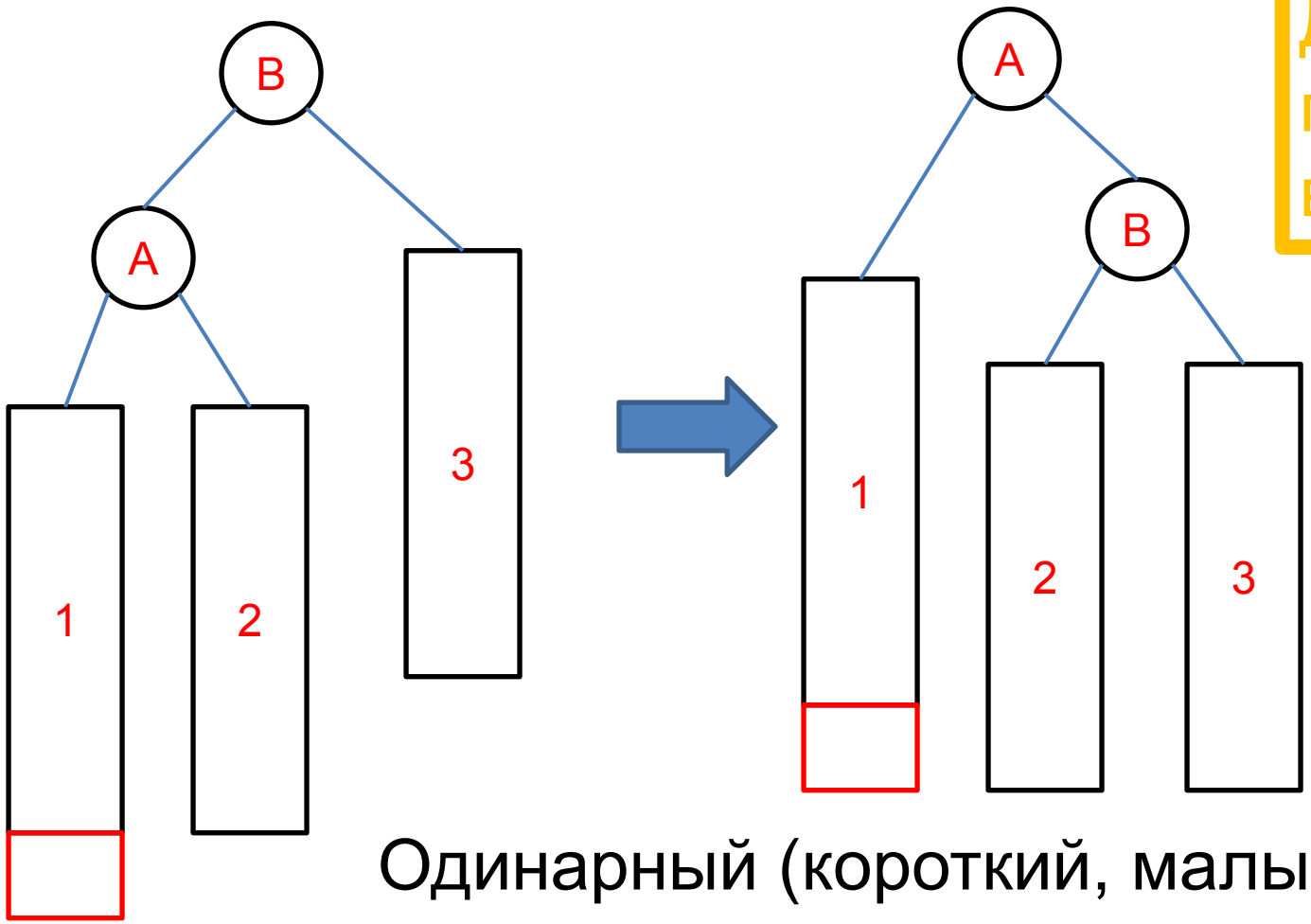
Высота TT == высота T + 1 и x < a

- $h_L == h_R$ ==> TT сбалансировано
- $h_L < h_R$ ==> TT сбалансировано
- $h_L > h_R$ ==> TT НЕ сбалансировано

Что делать, если x > a?



Разгрузка левой-левой ветки

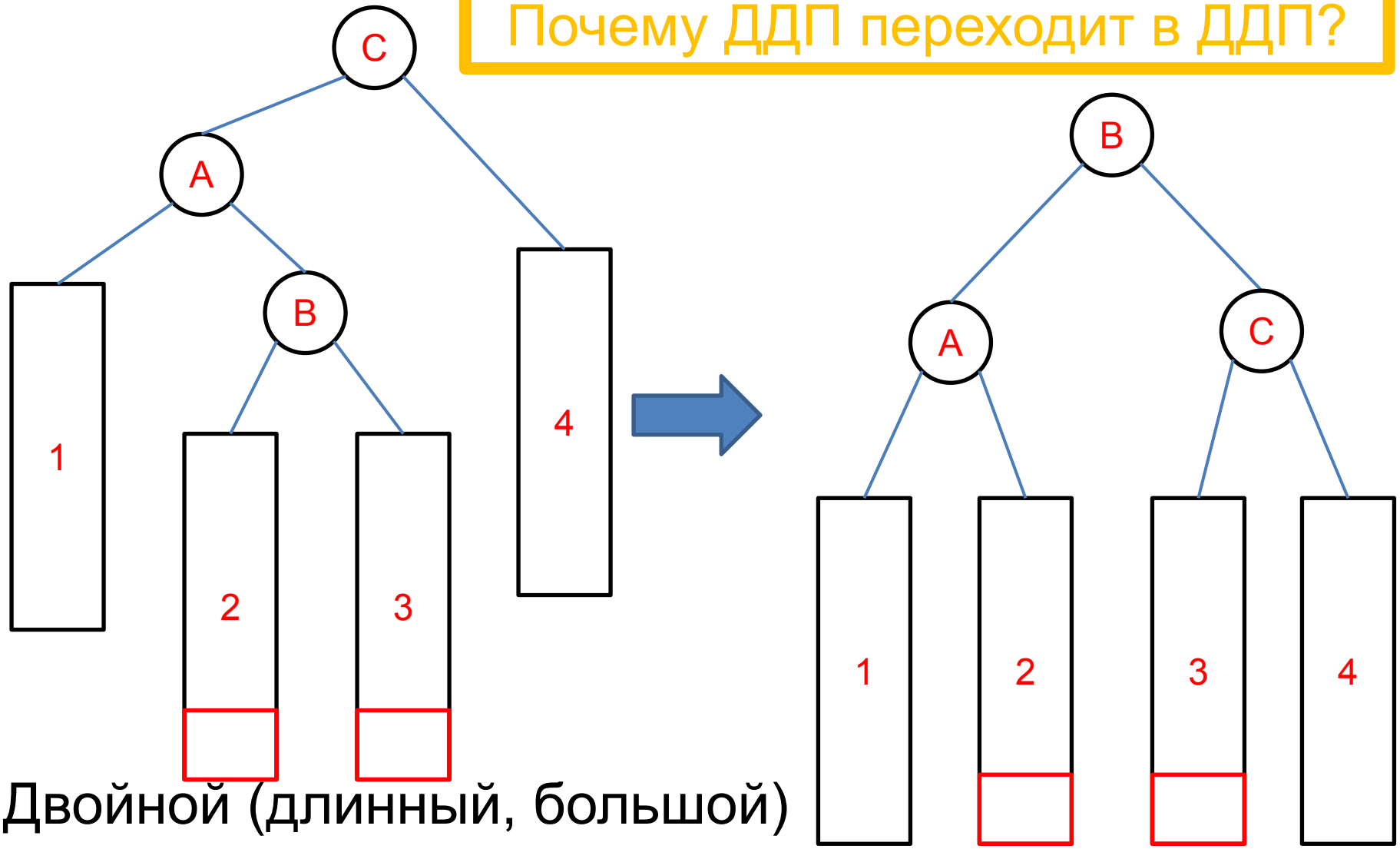


Почему ДДП переходит в ДДП?

Одинарный (короткий, малый) поворот

Разгрузка правой-левой ветки

Почему ДДП переходит в ДДП?

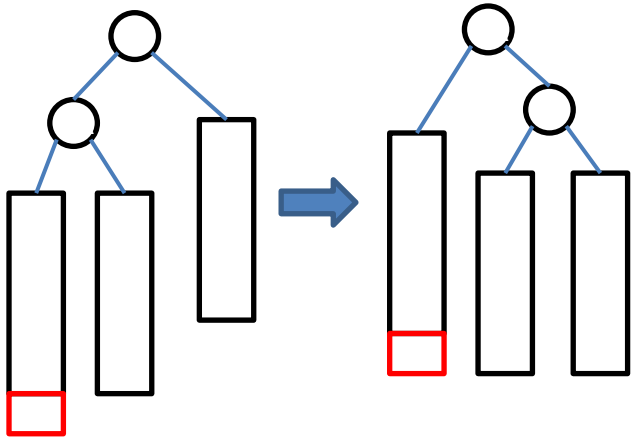


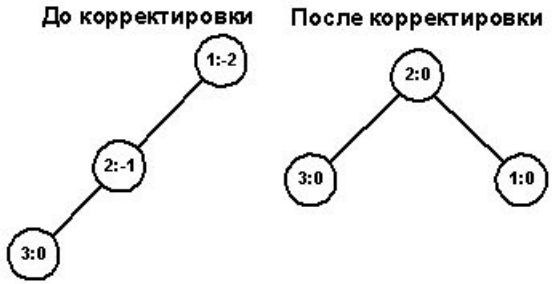
Двойной (длинный, большой) поворот

Оптимизация вставки в АВЛ-дерево

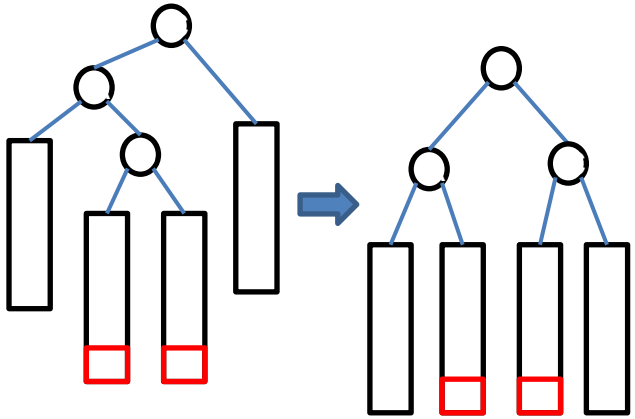
- Для балансировки достаточно хранить разность высот левого и правого поддеревьев
  - -1: Высота левого поддерева на 1 больше высоты правого поддерева
  - 0: Высоты поддеревьев одинаковы
  - +1: Высота правого поддерева на 1 больше высоты левого поддерева

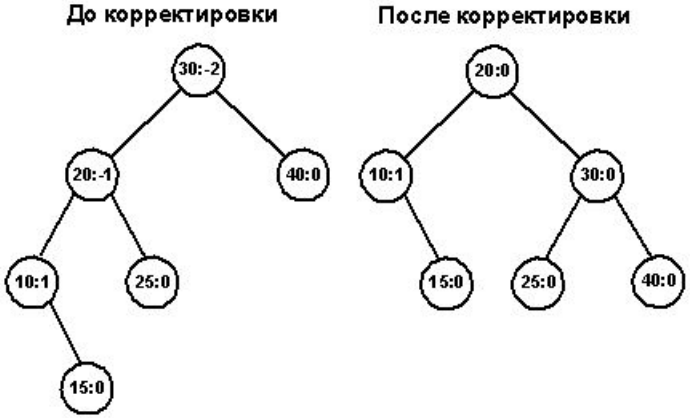
Одинарный поворот





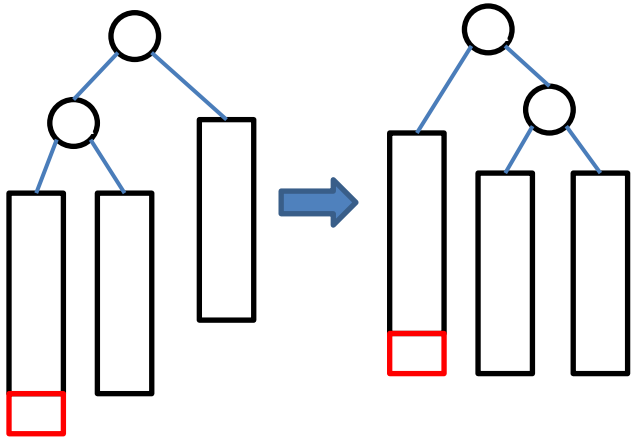
Одинарный поворот

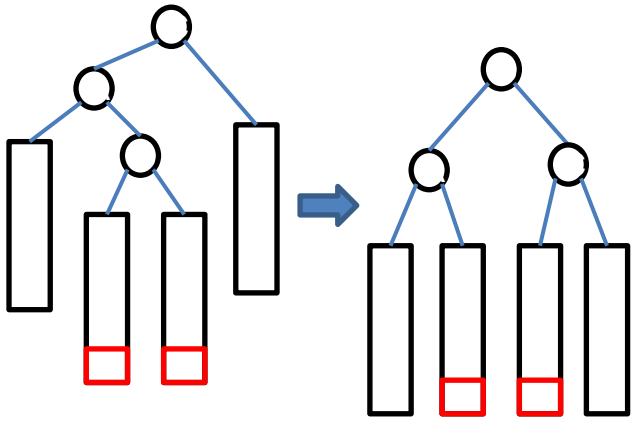


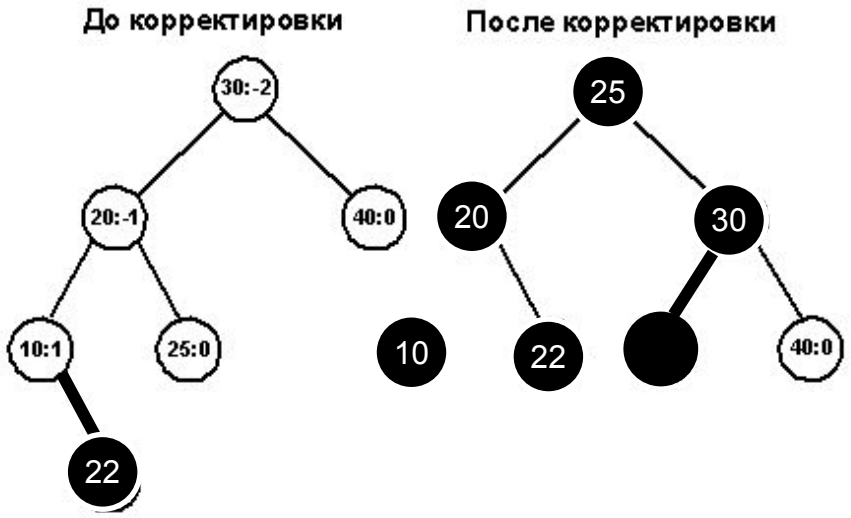


Двойной поворот

Двойной поворот

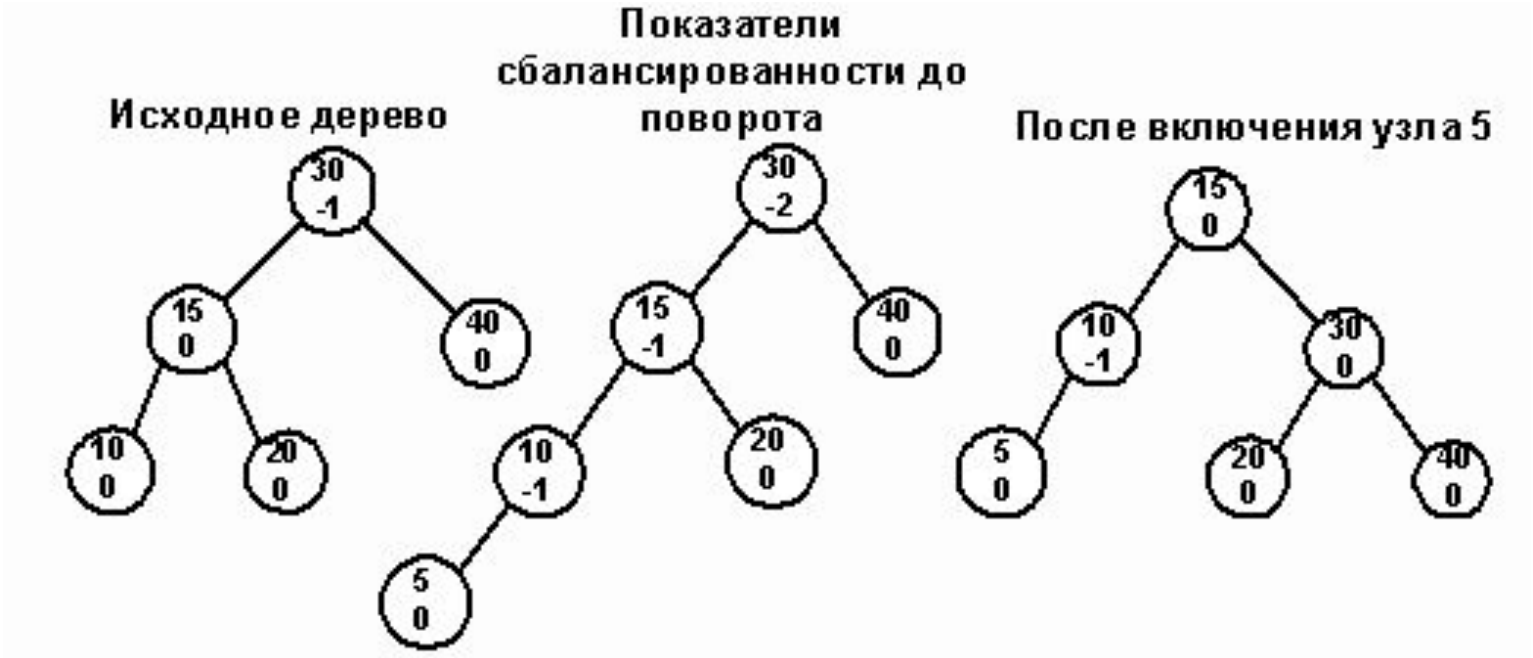






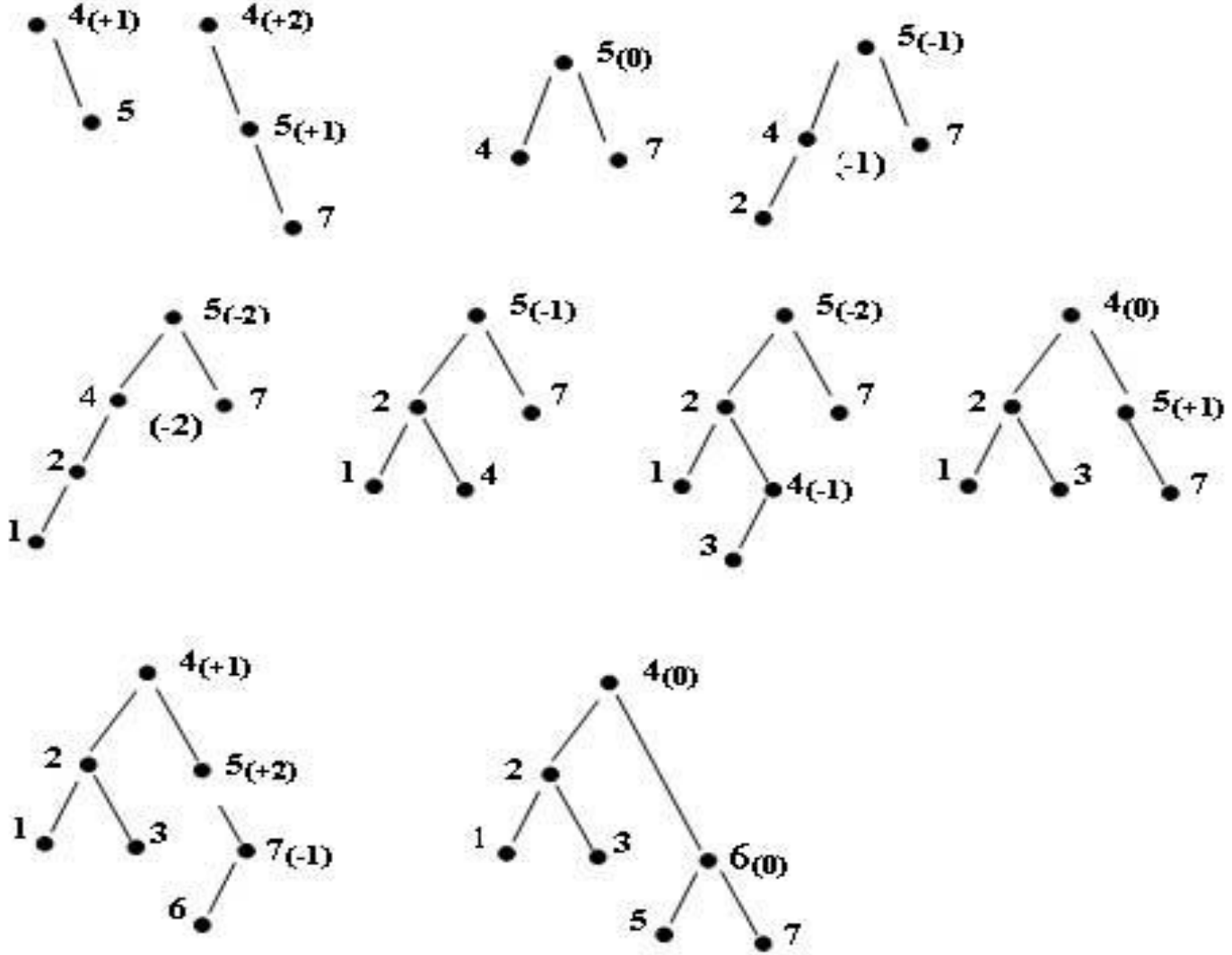
Двойной поворот

Пример поворота



Какой поворот изображён на рисунке?

Пример построения АВЛ-дерева



Заключение

- Дерево, поддерево и др. определения
  - Основные свойства
- Обходы деревьев
  - В ширину, в глубину
- Представление деревьев
  - Указатели, массив, скобочная запись, список прямых предков
- Дерево двоичного поиска
- АВЛ деревья