

Обратная польская запись (ОПЗ)

Сложные вычислительные задачи обычно требуют больших объемов вычислений, поэтому к разработчикам языков программирования предъявлялось требование: максимально приблизить форму записи математических выражений в коде программы к естественному языку математики.

Одну из первых областей системного программирования составили исследования способов трансляции математических выражений.

В результате наибольшее распространение получил метод трансляции с помощью обратной польской записи, которую предложил польский математик Я. Лукашевич.

ОПЗ представляет собой выражение, записанное в постфиксной форме, без скобок, по специальным правилам.

Пусть для операндов A и B выполняется операция сложения.

Привычная форма записи $A+B$ называется *инфиксной*.

Форма записи, в которой знак операции следует перед операндами $+AB$, называется *префиксной*.

Если же операция записывается после операндов $AB+$, то это *постфиксная* форма.

Получение ОПЗ реализуется с использованием структур в виде стека и дерева.

Алгоритм, использующий стек

Получение ОПЗ с использованием стека может осуществляться весьма просто на основе алгоритма, предложенного Дейкстрой, который ввел понятие стекового приоритета операций, например:

Операция	Приоритет
(1
+ -	2
* /	3

Суть алгоритма в следующем

Исходное выражение, записанное в виде строки символов S , просматривается слева направо.

Операнды переписываются в выходную строку B , операции обрабатываются с использованием стека, который первоначально пуст, на основе следующих правил.

1. Если в строке S встретился операнд, то его помещаем в строку B .
2. Если в S встретилась *открывающая скобка*, то ее помещаем в стек.

3. Если в S встретилась *закрывающая скобка*, то извлекаем из стека и записываем в строку B все операции до "(", саму "(" скобку также извлекаем из стека; обе скобки игнорируются.
4. Если в S встретилась операция X , то выталкиваем из стека все операции, приоритет которых не ниже X , после чего саму операцию X записываем в стек.
5. При достижении конца строки S , анализируем стек и, если он не пуст, извлекаем и переписываем его элементы в выходную строку B .

Пример реализации

Исходное выражение задано в виде строки *S*

$$"a + b * c + (d * e + f) * g"$$

Запишем это выражение в форме ОПЗ.

Правильным ответом будет выражение

$$abc*+de*f+g*+$$

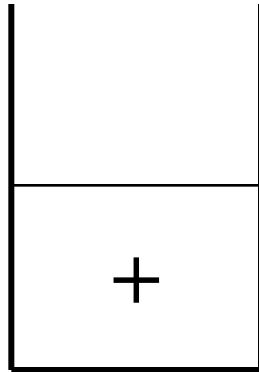
Результат будем получать в строке *B*.

Начинаем последовательно просматривать символы исходной строки, причем *B* – пустая строка и стек пуст.

Всего в строке 15 символов (15 п.п.).

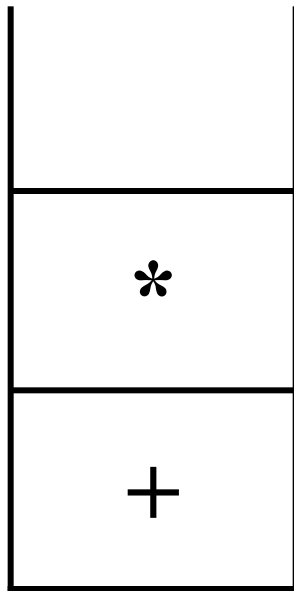
1. Букву «*a*» помещается в строку *B*
2. Операцию «+» помещаем в стек.
3. Букву «*b*» помещаем в строку *B*.

На этот момент стек и строка *B* выглядят следующим образом:



B = " *ab* "

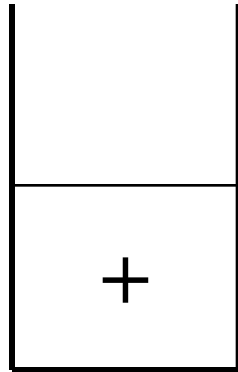
4. Операцию « $*$ » помещаем в стек, т.к. элемент « $+$ » в вершине стека имеет более низкий приоритет.
5. Букву « c » помещаем в строку B , после чего имеем



$B = "abc"$

6. Следующая операция «+»: анализируем стек и видим, что в вершине стека «*» и следующая за ней «+» имеют приоритеты не ниже текущей. Следовательно, обе операции извлекаем из стека и помещаем в строку ***B***, а текущую операцию «+» помещаем в стек.

В итоге имеем

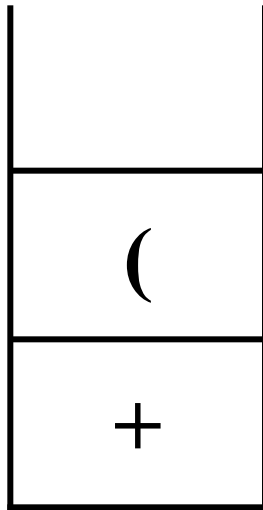


B = " *abc*+* "

7. Далее следует символ «(», его помещаем в стек.

8. Букву «*d*» помещаем в строку *B*.

В результате получается

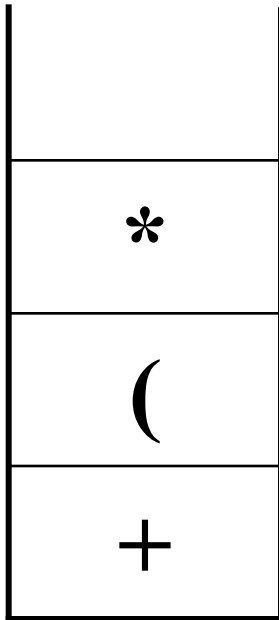


B = " *abc*+d* "

9. Операцию « $*$ » помещаем в стек, т.к. приоритет у скобки самый низкий.

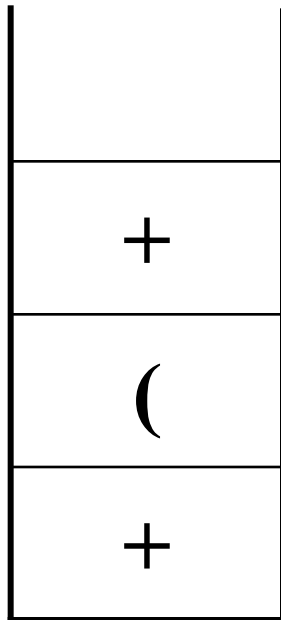
10. Букву « e » помещаем в строку B .

Получили



$B = "abc*+de"$

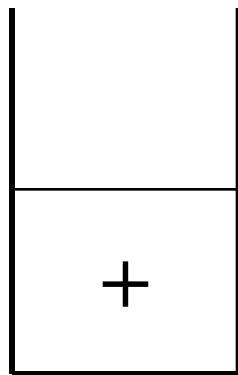
11. Следующая операция «+»: приоритет операции «*» в вершине стека выше, поэтому извлекаем из стека «*» и помещаем в строку *B*. Текущий символ «+» помещаем в стек.
12. Букву «*f*» помещаем в строку *B*. Получаем



B = " *abc*+de*f* "

13. Далее идет закрывающая скобка, все элементы до символа «(» извлекаем из стека и помещаем в строку ***B*** (это элемент «+»), сам символ «(» тоже извлекаем из стека.

Обе скобки игнорируются:

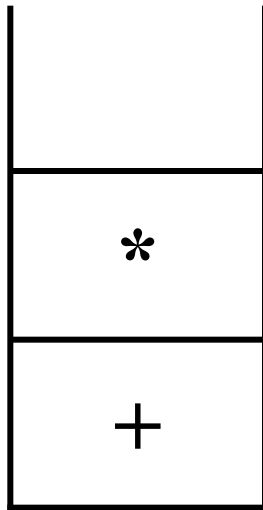


B = ” *abc*+de*f+* ”

14. Операцию « $*$ » помещаем в стек, т.к. ее приоритет выше операции « $+$ » в вершине стека.

15. Букву « g » записываем в строку ***B***.

Получаем



B = " ***abc*+de*f+g*** "

Все символы строки S просмотрены, следовательно, анализируем состояние стека, если он не пуст, то переписываем все его элементы в строку B , т.е. операции « $+$ » и « $*$ » последовательно извлекаем из стека в строку:

 $B = "abc*+de*f+g*+"$

Просмотрев исходную информацию только один раз, мы решили поставленную задачу.

Вычисление выражения, записанного в ОПЗ, может проводиться путем однократного просмотра, что является весьма удобным при генерации объектного кода программ.

Рассмотрим простой пример.

Выражение $(A + B) * (C + D) - E$ в виде ОПЗ:

$$AB + CD + * E -$$

Его вычисление проводится следующим образом (R_1 и R_2 – вспомогательные переменные):

Шаг	Анализируемая строка	Действие
1	$AB + CD + * E -$	$R_1 = A + B$
2	$R_1 CD + * E -$	$R_2 = C + D$
3	$R_1 R_2 * E -$	$R_1 = R_1 * R_2$
4	$R_1 E -$	$R_1 = R_1 - E$
5	R_1	

Текст программы, реализующий рассмотренный алгоритм в консольном режиме, может иметь следующий вид:

...

```
struct Stack {  
    char c;           // Символ операции  
    Stack *next;  
};  
  
int Prior (char);  
  
Stack* InS ( Stack*, char);  
  
Stack* OutS ( Stack*, char*);
```

```
void main ()
{
    Stack *t,
    *Op = NULL;    // Стек операций Op – пуст
    char a, In [81], Out [81];
    // In – входная (S), Out – выходная (B) строки
    int  k = 0, l = 0;
    // Текущие индексы для строк
    cout << " Input formula : ";
    cin >> In;
```

// Анализируем символы строки *In*

while (In[k] != '\0') {

// 1. Если символ – буква, заносим ее в *Out*

if (In[k] >= 'a' && In[k] <= 'z')

Out[l++] = In[k];

// 2. Если «(», записываем ее в стек

if (In[k] == '(')

Op = *InS* (Op, In[k]);

/* 3. Если «)», извлекаем из стека в строку ***Out***
все операции до открывающей скобки */

```
if ( In[k] == ')' ) {  
    while ( (Op -> c) != '(' ) {
```

// Считываем элемент ***a*** из стека

```
        Op = OutS ( Op, &a );  
    !Op ) a = '\0';
```

// и записываем его в строку ***Out***.

```
        Out[l++] = a;    }
```

// Удаляем из стека открывающую скобку

t = Op;

Op = Op -> next;

delete t;

}

```

/* 4. Если операция, извлекаем из стека в Out опе-
рации с большим или равным приоритетом */
if (In[k]== '+' || In[k]== '-' || In[k]== '*' || In[k]== '/') {
    while ( Op != NULL &&
        Prior (Op -> c) >= Prior (In[k])) {
        Op = OutS (Op, &a);
        Out[l++] = a;
    }
    // Текущий символ — в стек
    Op = InS (Op, In[k]);
}
k++;
} // Конец цикла анализа входной строки

```


/* 5. Если стек не пуст, переписываем все операции в выходную строку */

```
while ( Op != NULL) {
```

```
    Op = OutS (Op, &a);
```

```
    Out[l++] = a;
```

```
}
```

```
Out[l] = '\0';
```

```
cout << "\n Polish = " << Out << endl;
```

```
getch();
```

```
}
```

//----- Реализация приоритета операций -----

```
int Prior ( char a ) {  
    switch ( a ) {  
        case '*': case '/': return 3;  
        case '-': case '+':   return 2;  
        case '(': return 1;  
    }  
    return 0;  
}
```

// ----- Добавление элемента в стек -----

Stack* *InS* (Stack *p, char s)

{

Stack *t = new Stack;

t->c = s;

t->next = p;

return t;

}

// ----- Извлечение элемента из стека -----

Stack* *OutS* (Stack *p, char *s)

{

Stack *t = p;

*s = p -> c;

p = p -> next;

delete t;

return p;

}

Рассмотрим пример, реализованный в методичке для оконного приложения:

Имя	Знач.
a	1
b	2
c	4
d	1,5
e	2
f	2,25
g	7

Введите выражение

$a+b*(c-d)/e+f$

Полученная ОПЗ

$abcd-*e/+f+$

Результат

5,75

Перевести

Посчитать

```
struct Stack {  
    char info;  
    Stack *next;  
} *begin;  
  
int Prior (char);  
  
Stack* InStack ( Stack*, char);  
  
Stack* OutStack ( Stack*, char*);  
  
double Rezult (String);  
  
double mas[201]; // Массив для вычисления  
  
Set < char, 0, 255 > znak;  
  
// Множество символов-знаков  
  
int Kol = 10;
```

//---- Текст функции-обработчика *FormCreate* ----

```
Edit1->Text = "a+b*(c-d)/e";  
Edit2->Text = "";  
char a = 'a';  
StringGrid1->Cells[0][0] = "Имя";  
StringGrid1->Cells[1][0] = "Знач.";  
for (int i = 1; i <= Kol; i++) {  
    StringGrid1->Cells[0][i] = a++;  
    StringGrid1->Cells[1][i] = i;  
}
```

// ---- Текст обработчика кнопки *Перевести* ----

Stack *t;

begin = NULL;

char ss, a;

String InStr, OutStr;

OutStr = "";

Edit2->Text = "";

InStr = Edit1->Text;

znak << '*' << '/' << '+' << '-' << '^';

int len = InStr.Length(), k;


```
for (k = 1; k <= len; k++) {
```

```
    ss = InStr[k];
```

```
// ----- Пункт 1 алгоритма -----
```

```
    if (ss >= 'a' && ss <= 'z' )
```

```
        OutStr += ss;
```

```
// ----- Пункт 2 алгоритма -----
```

```
    if ( ss == '(' )
```

```
        begin = InStack ( begin, ss);
```

// ----- Пункт 3 алгоритма -----

if (ss == ')') {

while ((begin -> info) != '(') {

begin = *OutStack* (begin, &a);

OutStr += a;

}

begin = *OutStack* (begin, &a);

}

// ----- Пункт 4 алгоритма -----

```
if ( znak.Contains ( ss ) ) {  
    while ( begin != NULL &&  
        Prior ( begin->info ) >= Prior ( ss ) ) {  
        begin = OutStack ( begin, &a );  
        OutStr += a;  
    }  
    begin = InStack ( begin, ss );  
} // Конец оператора if  
} // Конец оператора for
```

// ----- Пункт **5** алгоритма -----

while (begin != NULL) {

begin = *OutStack* (begin, &a);

OutStr += a;

}

Edit2 -> Text = OutStr;

// Выводим полученную строку

}

//---- Текст обработчика кнопки *Посчитать* ----

```
char ch;
```

```
String OutStr = Edit2 -> Text;
```

```
for ( int i = 1; i <= Kol; i++) {
```

```
    ch = StringGrid1 -> Cells[0][i][1];
```

```
    mas[int(ch)] = StrToFloat(SG1->Cells[1][i]);
```

```
}
```

// *SG* это *StringGrid*

```
Edit3->Text=FloatToStr( Rezult ( OutStr ) );
```

//-- Функция реализации приоритета операций --

```
int Prior ( char a ){  
    switch ( a ) {  
        case '^':          return 4;      // !!!  
        case '*': case '/': return 3;  
        case '-': case '+': return 2;  
        case '(':          return 1;  
    }  
    return 0;  
}
```

//----- Расчет арифметического выражения -----

```
double Rezult(String Str)
{
    char ch, ch1, ch2, chr;
    double op1, op2, rez;
    znak << '*' << '/' << '+' << '-' << '^';
    chr = 'z' + 1;
    for (int i=1; i <= Str.Length(); i++) {
        ch = Str[i];
```

```
if (! znak.Contains (ch) )  
    begin = InStack ( begin, ch );  
else {  
    begin = OutStack ( begin, &ch1 );  
    begin = OutStack ( begin, &ch2 );  
    op1 = mas[int (ch1)];  
    op2 = mas[int (ch2)];
```



```

switch (ch){
    case '+' : rez = op2 + op1;      break;
    case '-' : rez = op2 - op1;      break;
    case '*' : rez = op2 * op1;      break;
    case '/' : rez = op2 / op1;      break;
    case '^' : rez = pow(op2,op1);   break;
}
mas[int (chr)] = rez;
begin = InStack ( begin, chr);
chr++;
}      // Конец else
}      // Конец оператора for
return rez;
}

```